

C*-環の自由積の stable rank

渚 勝 (千葉大学理学部)

1. INTRODUCTION

この報告は、1996 年夏に K. Dykema, U. Haagerup, M. Rørdam により証明された次の命題の概略を述べたものです。

定理 単位元を持ち、忠実な正規化されたトレース τ_i を持つ C*-環 A_i の族 $\{(A_i, \tau_i) | i \in I\}$ を考える。 $i_1 \neq i_2 \in I$ として $x \in A_{i_1}, y, z \in A_{i_2}$ で

$$\tau_{i_1}(x) = \tau_{i_2}(y) = \tau_{i_2}(z) = \tau_{i_2}(z^*y) = 0$$

となるものが存在することを仮定する。このとき、トレースによる自由積 C*-環 $(A, \tau) = *_{i \in I} (A_i, \tau_i)$ の stable rank は 1 となる。

stable rank という概念は、M. A. Rieffel [Rf] により導入されたものであり、単位元を持つ C*-環 A が $\text{sr}(A)=1$ であるとは、 A の可逆元全体 $G(A)$ が A で稠密となることを意味する。ここでは一般的な次元の定義は与えないが stable rank が 1 となる C*-環は cancellation property など K-理論に付随する情報を与えることが知られている。自由群の reduced group C*-algebra の stable rank を計算することは [Rf] で呈示された問題で、上の定理はそれに答えたものであり、単位元を持つ simple, finite C*-algebra は stable rank が 1 であるという予想をサポートする結果にもなっていました。ですが、この予想については、最近 J. Villadsen [V] により否定的な解答が得られています。

ここでは、環の自由積についてではなく、2個の生成元を持つ自由群の群環の場合について、証明を与えることにします。(実際、プレプリントも自由群の場合の証明を別にかいています。)ただし、その議論を環の自由積に適用したときに、その問題点と証明の流れがつかめるように留意したつもりです。

以下のような3つの話題をみておくと、証明の概略が把握しやすくなると思います。

- (1) A の元 T と $G(A)$ との距離の評価
- (2) Avitzour 条件
- (3) 2個の生成元を持つ自由群の群 C*-環のノルムと l^2 -ノルムの関係

この3つの内容を説明したのちに証明を述べます。

2. $G(A)$ との距離

単位元を持つ C^* -環 A の可逆元全体を $G(A)$ と表す。 A の元 T と $G(A)$ の距離を $\alpha(T)$ と表す。つまり、

$$\alpha(T) = \inf\{\|T - S\| \mid S \in G(A)\}.$$

この $\alpha(T)$ を評価する方法が M. Rørdam [Rr] により命題 1 のように与えられ、その系としての命題 2 が 5 章で用いられる。

まず記号についての注意。 T の極分解 $T = V|T| = |T^*|V$ を考えると、 $|T|, |T^*| \in A$ 、 $|T|, |T^*|$ のスペクトル分解を考えて $[0, \lambda]$ に対応するスペクトル射影をそれぞれ E_λ, F_λ と表す。このとき、 $VE_\lambda = F_\lambda V$ および $f(0) = 0$ となる連続関数 f に対して $Vf(|T|) \in A$ となる。

命題 1 [Rørdam]

$$\alpha(T) = \inf\{\lambda \mid V(1 - E_\lambda) \in G(A)(I - E_\lambda)\}.$$

命題 2 [Rørdam] 単位元を持つ C^* -環 A が $sr(A) \neq 1$ のとき $\|P\| = \alpha(P) = 1$ となる $P \in A$ が存在する。

証明 $sr(A) \neq 1$ より $G(A)$ は A で稠密ではない。従って $\alpha = \alpha(T) > 0$ となる $T \in A$ が存在する。 0 が $G(A)$ の閉包に属することから $\|T\| \geq \alpha$ がわかる。 $h(0) = 0$ となる連続関数 h を次のように定める

$$h(t) = \min\left\{\frac{t}{\alpha}, 1\right\}.$$

このとき T の極分解 $T = V|T|$ に対して $Vh(|T|) = P$ とおくと $P \in A$ 、 $\|P\| = 1$ となる。 $|T|$ と $h(|T|)$ の値域射影が一致することに注意すると、 $Vh(|T|)$ は P の極分解になっていることがわかる。 E_λ (resp. \tilde{E}_λ) を $[0, \lambda]$ に対する $|T|$ (resp. $h(|T|)$) のスペクトル射影とすると、 $\lambda < 1$ に対して $\tilde{E}_\lambda = E_{\alpha\lambda}$ となる。ここで $\alpha(P) < 1$ と仮定すると命題 1 より、 $0 \leq \lambda < 1$ 、 $S \in G(A)$ で $V(I - \tilde{E}_\lambda) = S(I - \tilde{E}_\lambda)$ となるものが存在する。つまり $V(I - E_{\alpha\lambda}) = S(I - E_{\alpha\lambda})$ となる。これより $\alpha(T) \leq \alpha\lambda < \alpha$ となり矛盾。従って $1 \leq \alpha(P) \leq \|P\| = 1$ となる。 \square

今後の議論で必要な事実は命題 2 ですが、参考までに以下に命題 1 の証明を述べておきます。

(\leq の証明) $V(I - E_\lambda) = S(I - E_\lambda)$ となる $S \in G(A)$ が存在すると仮定する。 $f_\lambda(0) = 0$ となる連続関数 f_λ を次のように定める

$$f_\lambda(t) = \max\{t - \lambda, 0\}.$$

$T_\lambda = Vf_\lambda(|T|)$ とおくと

$$\begin{aligned} T_\lambda &= Vf_\lambda(|T|) = V(I - E_\lambda)f_\lambda(|T|) \\ &= S(I - E_\lambda)f_\lambda(|T|) = Sf_\lambda(|T|). \end{aligned}$$

任意の正数 ε に対して $S(f_\lambda(|T|) + \varepsilon I)$ は可逆となるから T_λ は $G(A)$ の閉包に属する。 $\|T - T_\lambda\| = \lambda$ に注意すれば $\lambda \geq \alpha(T)$ が得られる。 \square

(\geq の証明) $a > \alpha(T)$ とし、 $\alpha(T) < b < a$ となる b を選ぶ。
 $\alpha(T^*) = \alpha(T) < b$ だから $\|T^* - X\| < b$ となる $X \in G(A)$ が選べる。
 連続関数 f を次のように定めるとき

$$f(t) = \begin{cases} 1/b, & (t \leq b) \\ 1/t, & (t > b) \end{cases}$$

$Y = Xf(|T^*|)$ とおけば、 $Y \in G(A)$ となり

$$\|(I - YV)(I - E_b)\| < 1 \quad (*)$$

を満たす。この評価は後ですることにして、次に $g(0) = 0$ を満たす連続関数 g を

$$g(t) = \begin{cases} 0, & (t \leq b) \\ (t - b)/(a - b), & (b < t \leq a) \\ 1, & (t > a) \end{cases}$$

と定義すれば $Z = (I - YV)g(|T|) \in A$, $\|Z\| < 1$ となる。従って $I - Z \in G(A)$ であり

$$\begin{aligned} (I - Z)(I - E_a) &= I - E_a - Z(I - E_a) \\ &= I - E_a - (I - YV)g(|T|)(I - E_a) \\ &= I - E_a - (I - YV)(I - E_a) = YV(I - E_a) \end{aligned}$$

より、 $V(I - E_a) = Y^{-1}(I - Z)(I - E_a)$, $Y^{-1}(I - Z) \in G(A)$ となる。
 (*) の評価については

$$\begin{aligned} \|(I - YV)(I - E_b)\| &= \|(V^* - Y)V(I - E_b)\| = \|(V^* - Y)(I - F_b)V\| \\ &= \|(V^* - Y)(I - F_b)\| = \|(V^*|T^*|f(|T^*|) - Y)(I - F_b)\| \\ &\leq \|T^*f(|T^*|) - Y\| = \|(T^* - X)f(|T^*|)\| < b \cdot \frac{1}{b} = 1 \end{aligned}$$

となる。 \square

3. AVITZOUR 条件

Powers[P] により導入され、Choi[Ch] により拡張された、ある種の C^* -環の単純性、トレース状態の一意性を導く条件について説明する。この事実が 5 章の証明で、直接必要ということではないがアイデアとして有用なものである。まず Powers が用いた論法を見やすくする Choi のノルム評価式について、述べることにする。

命題 3 [Choi] H_0, H_1 をヒルベルト空間とし $H = H_0 \oplus H_1$ とする。 $b \in B(H)$ は $bH_0 \subset H_1$ を満たすものとする。 n 個のユニタリ作用素 u_1, u_2, \dots, u_n が $u_i u_j^* H_1 \subset H_0, (i \neq j)$ を満たすとき

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^* b u_i \right\| \leq \frac{2\|b\|}{\sqrt{n}}$$

が成立する。

証明 まず $bH \subset H_1$ のときを考えることにする。 $cH \subset H_0$ となる $c \in B(H)$ に対して H_0 と H_1 の直交性に注意すると

$$\|b + c\|^2 \leq \|b\|^2 + \|c\|^2$$

が成立する。 $(u_i u_j^*)^* b (u_i u_j^*) H \subset H_0 (i \neq j)$ だから

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n u_i^* b u_i \right\|^2 &= \left\| u_1 \left(\sum_{i=1}^n u_i^* b u_i \right) u_1^* \right\|^2 = \left\| b + \sum_{i=2}^n u_1 u_i^* b u_i u_1^* \right\|^2 \\ &\leq \|b\|^2 + \left\| \sum_{i=2}^n u_i^* b u_i \right\|^2 \leq \dots \leq n\|b\|^2 \end{aligned}$$

が導ける。

$bH_0 \subset H_1$ のときは次のように考えると

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$b = b_1 + b_2^*$ と分解して

$$b_1 H \subset H_1, b_2 H \subset H_1, b_2^* H \subset H_0, \max\{\|b_1\|, \|b_2\|\} \leq \|b\|$$

となるようにできる。このとき

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n u_i^* b u_i \right\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^n u_i^* b_1 u_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n u_i^* b_2 u_i \right\| \\ &\leq \sqrt{n}\|b_1\| + \sqrt{n}\|b_2\| \leq 2\sqrt{n}\|b\| \end{aligned}$$

となる。

□

Powers は 2 個の生成元を持つ自由群 F_2 の reduced group C^* -環の単純性と忠実な有限トレースが一意的に存在することを以下のような議論で示した。

F_2 の生成元を a, b とする。任意の $g \in F_2$ に対して

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1, & (h = g) \\ 0, & (h \neq g) \end{cases}$$

によってヒルベルト空間 $l^2(F_2)$ のベクトルを表す。また $g, h \in F_2$ に対して

$$\lambda(g)\delta_h = \delta_{gh}$$

によって $l^2(F_2)$ 上のユニタリ作用素 $\lambda(g)$ が定義できる。この $\lambda(g)$ ($g \in F_2$) が生成する C^* -環を reduced group C^* -環といい、 $C_r^*(F_2)$ と表す。 $C_r^*(F_2)$ は $\tau(\cdot) = \langle \cdot \delta_e | \delta_e \rangle$ という標準的な忠実なトレース状態をもつ。

単位元でない F_2 の元 g_1, g_2, \dots, g_n に対して適当に大きな自然数 k を選ぶと $b^{-k}g_1b^k, b^{-k}g_2b^k, \dots, b^{-k}g_nb^k$ の縮約した元の形は b のべきで始まり b のべきで終わるようにできる。ここで $h_r = b^k a^r$ ($r \in \mathbb{N}$) と置くことにする。ヒルベルト空間 $l^2(F_2)$ を次の 2 つの部分空間に分解する。

$$H_0 = \langle \delta_g \mid g = e \text{ or } g = a^\pm \dots \rangle, \quad H_1 = \langle \delta_g \mid g = b^\pm \dots \rangle.$$

このとき

$$\lambda(b^{-k}g_ib^k)H_0 \subset H_1 \quad \lambda(a^r)H_1 \subset H_0$$

となり命題 3 を適用すれば $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(g_i) \in C_r^*(F_2)$, $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \lambda(h_r)^* x \lambda(h_r) \right\| &= \left\| \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \lambda(a^r)^* \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(b^{-k}g_ib^k) \right) \lambda(a^r) \right\| \\ &\leq \frac{2 \left\| \sum \alpha_i \lambda(b^{-k}g_ib^k) \right\|}{\sqrt{N}} = \frac{2 \|x\|}{\sqrt{N}} \end{aligned}$$

という評価が得られる。この議論で N が任意であることに注意すれば次の 2 つの命題が直ちに従う。

命題 4 [Powers] $C_r^*(F_2)$ の元 x と正数 ε に対して有限個のユニタリ $u_1, u_2, \dots, u_n \in C_r^*(F_2)$ と正数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$) が存在して

$$\left\| \tau(x)1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^* x u_i \right\| < \varepsilon$$

となる。

証明 $x \in C_r^*(F_2)$ に対して $\|x - y\| < \varepsilon/3$ となる $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(g_i) \in C_r^*(F_2)$ を選ぶ。 $\alpha_1 = 0$ を許すことにすれば $g_1 = e$ と仮定して良い。

トレースの定義より $\tau(y) = \alpha_1$ だから

$$\tau(y)1 - y = \sum_{i=2}^n \alpha_i \lambda(g_i), \quad g_2, \dots, g_n \neq e.$$

上の議論より N 個のユニタリ $u_1, u_2, \dots, u_N \in C_r^*(F_2)$ が取れて

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j^* (\tau(y)1 - y) u_j \right\| = \left\| \tau(y)1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j^* y u_j \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

とできる。このとき、

$$\begin{aligned} \left\| \tau(x)1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j^* x u_j \right\| &\leq |\tau(x - y)| + \left\| \tau(y)1 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j^* y u_j \right\| \\ &\quad + \left\| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u_j^* (y - x) u_j \right\| < \varepsilon \end{aligned}$$

となる。 □

命題 5 [Powers] $C_r^*(F_2)$ は単純 (閉両側イデアルは自明なものに限る) である。またトレース状態はただ一つである。

証明 $C_r^*(F_2)$ の $\{0\}$ でない閉両側イデアルを J とする。 $x \in J$ を 0 でない正の元とするとトレース τ の忠実性より $\tau(x) \neq 0$ が従う。また $x \in J$ より $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^* x u_i \in J$ だから命題 4 より $\tau(x)1 \in J$ となる。つまり、 $J = C_r^*(F_2)$ となる。

φ を $C_r^*(F_2)$ 上のトレース状態とすると命題 4 より

$$|\tau(x) - \varphi(x)| = \left| \varphi(\tau(x)1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^* x u_i) \right| < \varepsilon$$

が導け $\tau = \varphi$ となる。 □

以上の Powers の議論を Choi は位数 2, 3 の 2 つのユニタリが生成する C^* -環の単純性、トレースの一意性に拡張した。この C^* -環は Choi 環と呼ばれているが、自由積の言葉でいうと \mathbb{Z}_2 と \mathbb{Z}_3 の自由積群 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ の reduced group C^* -環、または、2 つの C^* -環 $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ と $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ の重みが均等なトレース状態による自由積 C^* -環とすることができる。

位数 2, 3 の元によって生成される自由群

$$G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle a, b \mid a^2 = e, b^3 = e \rangle$$

の場合を考えてみる。 $c_n = (ba)^n b^{-1}$ ($n \in \mathbb{N}$) とおくと、長さ l の a, b の縮約語 w に対して、 $2n \geq l$ のとき $c_n^{-1} w c_n$ は b のべきで始まり b の

べきで終わる縮約形をもつ。ここで $h_i = ab^{-1}(ab)^i$ とおくと

$$h_i h_j^{-1} = \begin{cases} ab^{-1}(ab)^{i-j-1}ab^{-1}a & (i > j) \\ aba(b^{-1}a)^{j-i-1}ba & (i < j) \end{cases}$$

従って $l^2(G)$ を次の 2 つの部分空間 H_0, H_1 に分解すると

$$H_0 = \langle \delta_g \mid g = e \text{ or } g = a^\pm \dots \rangle, \quad H_1 = \langle \delta_g \mid g = b^\pm \dots \rangle$$

$$\lambda(c_n^{-1}wc_n)H_0 \subset H_1, \quad \lambda(h_i)\lambda(h_j)^*H_1 \subset H_0$$

という関係が成立する。これに命題 3 を適用すれば上と同じように $C_r^*(G)$ の単純性、トレース状態の一意性が得られる。

この Choi の議論を拡張して Avitzour は次の環の自由積に関する命題を証明した。

命題 6 [Avitzour] A, B を単位元をもつ C^* -環とし、 φ, ψ をそれぞれ忠実なトレース状態とする。 $u \in A, v, w \in B$ をユニタリ元とし

$$\varphi(u) = \psi(v) = \psi(w) = \psi(v^*w) = 0$$

を満たすものとする。このとき φ, ψ による A, B の自由積 C^* -環は単純で、ただ一つのトレース状態をもつ。

まず C^* -環の自由積について説明する。

単位元をもつ 2 つの環 A, B の自由積 $A * B$ というのは、 A, B で生成され単位元を同一視する以外は何の関係ももたない環のことである(純代数的な概念である)。 φ, ψ をそれぞれ A, B 上の線形汎関数とするとき $A * B$ 上の線形汎関数 $\varphi * \psi$ は以下の関係式で定まる。 $\varphi * \psi|_A = \varphi, \varphi * \psi|_B = \psi$ で

$$(\varphi * \psi)((c_1 - (\varphi * \psi)(c_1)) \cdots (c_n - (\varphi * \psi)(c_n))) = 0$$

ただし $n \in \mathbb{N}$ かつ $c_i \in A$ (resp. B) ならば $c_{i+1} \in B$ (resp. A)。このとき A_0, B_0 を φ, ψ のカーネルとすると $A * B$ は線形空間として

$$\mathbb{C} \oplus A_0 \oplus B_0 \oplus (A_0 \otimes B_0) \oplus (B_0 \otimes A_0) \oplus (A_0 \otimes B_0 \otimes A_0) \oplus \cdots$$

と表せる。

A, B が単位元をもつ C^* -環で φ, ψ が状態であるときは GNS-表現 $(A, \pi_\varphi, H_\varphi, \omega_\varphi), (B, \pi_\psi, H_\psi, \omega_\psi)$ つまり

$$\varphi(a) = (\pi_\varphi(a)\omega_\varphi | \omega_\varphi), \quad \psi(b) = (\pi_\psi(b)\omega_\psi | \omega_\psi)$$

を考え、次のようなヒルベルト空間を作る

$$H = \mathbb{C}\Omega \oplus H_\varphi^0 \oplus H_\psi^0 \oplus (H_\varphi^0 \otimes H_\psi^0) \oplus (H_\psi^0 \otimes H_\varphi^0) \\ \oplus (H_\varphi^0 \otimes H_\psi^0 \otimes H_\varphi^0) \oplus \cdots$$

ただし $H_\varphi^0 = \text{Ker}\varphi, H_\psi^0 = \text{Ker}\psi$ とする。同一視 $\mathbb{C}\Omega \oplus H_\varphi^0 \cong H_\varphi$ を用いて

$$H \cong H_\varphi \otimes (\mathbb{C} \oplus H_\psi^0 \oplus (H_\psi^0 \otimes H_\varphi^0) \oplus (H_\psi^0 \otimes H_\varphi^0 \otimes H_\psi^0) \oplus \dots)$$

の同一視を与えるユニタリを U_φ とする。つまり $U_\varphi\Omega = \omega_\varphi$, c が H_φ^0 で始まるときは $U_\varphi c = c$, c が H_ψ^0 で始まるときは $U_\varphi c = \omega_\varphi \otimes c$ となる。このとき A の H への表現を $U_\varphi^*(\pi_\varphi(\cdot) \otimes I)U_\varphi$ と定義する。同様に U_ψ が定義できて B の H への表現ができる。この2つの表現を用いて $A*B$ の H 上の表現 π が定まり、 $\pi(A*B)$ のノルム閉包を φ, ψ による $A*B$ の自由積 C^* -環という。このとき $c \in A*B$ に対して

$$(\varphi * \psi)(c) = (\pi(c)\Omega | \Omega)$$

となっている。

トレース状態どうしの自由積はまたトレース状態になることが知られている。命題6に話を戻すと、群の生成元の語のかわりに $A*B$ が A_0, B_0 の語として表されていると見ると類似の議論が展開できる。 W_0 を $A*B$ の部分集合で A_0 の元で始まる語または v で始まる語または \mathbb{C} とする。 W_1 を $A*B$ の部分集合で $\psi(v*b) = 0$ となる B_0 の元 b から始まる語とする。 $H_i = \overline{\pi(W_i)\Omega}$ ($i = 0, 1$) とすると $H = H_0 \oplus H_1$ となる。 0 でない整数 k に対して、ユニタリ $(vu)^k$ は

$$(vu)^k H_1 \subset H_0$$

を満たす。また、スカラーでない A_0, B_0 の語 x についてトレースの性質から

$$(\varphi * \psi)((uv)^j x (uv)^{-j}) = 0$$

となる。 j が十分大のときは $(uv)^j x (uv)^{-j}$ は、 u または v^* で始まり v または u^* で終わる語の一次結合となる。このとき

$$www((uv)^j x (uv)^{-j})w^*u^*w^*$$

は w で始まり w^* で終わる語となるから

$$www((uv)^j x (uv)^{-j})w^*u^*w^*H_0 \subset H_1$$

を満たす。これで命題3を用いる状況が整ったので命題6の証明は完結する。

4. $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|_2$ の評価

この章では作用素ノルムとヒルベルト空間のノルムを計算するので、言葉を準備しておきます。ここで考える離散群 G は F_2 です。自由群の縮約語の長さを持ちいて

$$E_n = \{s \in G \mid |s| = n\} \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

という集合とその特性関数 χ_n を定義します。 G 上の複素数値関数 f についてサポートを

$$\text{supp}(f) = \{s \in G \mid f(s) \neq 0\}$$

と定義し、 $\text{supp}(f)$ が有限のとき

$$\lambda(f) = \sum_{s \in G} f(s)\lambda(s)$$

とします。ヒルベルト空間の元としてのノルム $\|f\|_2$ は

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{s \in G} |f(s)|^2 \right)^{1/2} = \tau(\lambda(f)^* \lambda(f))^{1/2}$$

で与えられる。サポートが有限な 2 つの関数 f, g に対して畳み込み積を

$$(f * g)(s) = \sum_{t, u \in G, tu=s} f(t)g(u)$$

と定義します。

5 章で必要となるのは次の命題です。

命題 7 [Haagerup] f を G 上の有限サポートを持つ関数とする。このとき

$$\|\lambda(f)\| \leq 2 \left(\sum_{s \in G} |f(s)|^2 (1 + |s|)^4 \right)^{1/2}$$

特に、サポートの語の最大長さを N とすると

$$\|\lambda(f)\| \leq 2(N+1)^2 \|f\|_2$$

が得られる。

この証明は以下の 3 つの補題の結果として得られます。

補題 1 $k, l, m \in \mathbb{N}$ とし、 f, g を $\text{supp}(f) \subset E_k, \text{supp}(g) \subset E_l$ とする。 $|k-l| \leq m \leq k+l$ かつ $k+l-m$ が偶数のとき

$$\|(f * g)\chi_m\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

となり、それ以外の場合は

$$\|(f * g)\chi_m\|_2 = 0$$

となる。

補題 2 $\text{supp}(f) \subset E_n$ のとき、 $\|\lambda(f)\| \leq (n+1)\|f\|_2$ 。

補題 3 f が有限サポートを持つとき、

$$\|\lambda(f)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \|f \cdot \chi_n\|_2.$$

語の積演算のときにおこる縮約に注意した議論が必要になるのは補題 1 であり、続く補題から命題 7 までの証明は標準的な作業です。というわけで、補題 1 の証明を最後に回し、順に概略を述べます。

補題 1 \Rightarrow 補題 2 $g \in l^2(G)$ に対して $\|\lambda(f)g\|_2 = \|f * g\|_2$ だから

$$\|f * g\|_2 \leq (n+1)\|f\|_2\|g\|_2$$

を示せばよい。 $g_k = g \cdot \chi_k$ とおくと $g = \sum_{k=0}^{\infty} g_k$, $\|g\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_2^2$ であり、 f, g_k に対して補題 1 を適用していく。

$$\begin{aligned} \|(f * g) \cdot \chi_m\|_2 &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (f * g_k) \cdot \chi_m \right\|_2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|(f * g_k) \cdot \chi_m\|_2 \\ &\leq \|f\|_2 \left(\sum_{m+n-k:\text{even}; k=|m-n|}^{m+n} \|g_k\|_2 \right) \\ &= \|f\|_2 \left(\sum_{l=0}^{\min(m,n)} \|g_{m+n-2l}\|_2 \right) \\ &\leq \|f\|_2 \left(\sum_{l=0}^{\min(m,n)} \|g_{m+n-2l}\|_2^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{l=0}^{\min(m,n)} 1 \right)^{1/2} \\ &\leq (n+1)^{1/2} \|f\|_2 \left(\sum_{l=0}^{\min(m,n)} \|g_{m+n-2l}\|_2^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \|(f * g)\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \|(f * g) \cdot \chi_k\|_2^2 \\ &\leq (n+1) \|f\|_2^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\min(m,n)} \|g_{m+n-2l}\|_2^2 \right) \\ &= (n+1) \|f\|_2^2 \sum_{l=0}^n \left(\sum_{m=l}^{\infty} \|g_{m+n-2l}\|_2^2 \right) \\ &\leq (n+1) \|f\|_2^2 \left(\sum_{l=0}^n \|g\|_2^2 \right) = (n+1)^2 \|f\|_2^2 \|g\|_2^2 \end{aligned}$$

となる。 □

補題 2 \Rightarrow 補題 3 $f = \sum_{n=0}^{\infty} f \cdot \chi_n$ と分解すれば補題 2 より明らか。 □

補題 3 \Rightarrow 命題 7 Cauchy-Schwartz の不等式を用いて

$$\begin{aligned} \|\lambda(f)\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \|f \cdot \chi_n\|_2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} ((n+1)^2 \|f \cdot \chi_n\|_2) \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^4 \|f \cdot \chi_n\|_2^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi^2}{6}} \left(\sum_{s \in G} |f(s)|^2 (1+|s|)^4 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

となり、 $\sqrt{\pi^2/6} < 2$ に注意すればよい。 \square

補題 1 の証明 $\text{supp}(f) \subset E_k, \text{supp}(g) \subset E_l$ と畳み込み積の定義より

$$(f * g)(s) = \sum_{t, u \in G, tu=s} f(t)g(u) = \sum_{|t|=k, |u|=l, tu=s} f(t)g(u)$$

となり、語 tu の長さは

$$|k-l|, |k-l|+2, \dots, k+l-2, k+l$$

の何れかである。 m がこの数値と異なる場合は明らかに

$$\|(f * g)\chi_m\|_2 = 0$$

となる。

($m = k+l$ のとき) $s = tu$ で $|s| = m$ のとき s を表示する t, u は一意的に定まる。従って

$$\begin{aligned} \|(f * g)\chi_m\|_2^2 &= \sum_{|t|=k, |u|=l, |tu|=k+l} |f(t)|^2 |g(u)|^2 \\ &\leq \sum_{|t|=k, |u|=l} |f(t)|^2 |g(u)|^2 = \|f\|_2^2 \|g\|_2^2 \end{aligned}$$

となる。

($m = k+l-2$ のとき) $s = tu$ で $|s| = m$ のとき s を表示する t, u は

$$t = t'v, \quad u = v^{-1}u', \quad |v| = 1$$

と表され t', u' は一意的に定まる。このとき f, g を用いて次のような関数 f', g' を構成する。

$$\begin{aligned} f'(t') &= \left(\sum_{|v|=1} |f(t'v)|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{supp}(f') \subset E_{k-1} \\ g'(u') &= \left(\sum_{|v|=1} |g(v^{-1}u')|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{supp}(g') \subset E_{l-1}. \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}
 |(f * g)(s)| &= \left| \sum_{tu=s, |t|=k, |u|=l} f(t)g(u) \right| \\
 &= \left| \sum_{|v|=1, |t'v|=k, |v^{-1}u'|=l, s=t'u'} f(t'v)g(v^{-1}u') \right| \\
 &= \left| \sum_{|v|=1} f(t'v)g(v^{-1}u') \right| \\
 &\leq \left(\sum_{|v|=1} |f(t'v)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|v|=1} |g(v^{-1}u')|^2 \right)^{1/2} \\
 &= f'(t')g'(u') = (f' * g')(s)
 \end{aligned}$$

となり f', g' についての議論が $f, g, m = k + l$ のときの議論に帰着させられる。つまり $|f * g|_{\chi_m} \leq (f' * g')_{\chi_m}$ より

$$\begin{aligned}
 \|(f * g)_{\chi_m}\|_2 &\leq \|(f' * g')_{\chi_m}\|_2 \\
 &\leq \|f'\|_2 \|g'\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2
 \end{aligned}$$

となる。

($m = k + l - 2p$ のとき) $m = k + l - 2$ のときと同様の方法で

$$f'(t') = \left(\sum_{|v|=p} |f(t'v)|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{supp}(f') \subset E_{k-p}$$

を考察すれば良い。 □

5. 自由群の群環のときの証明

この章では次の定理の証明を与える。この証明に必要な結果は、命題 2 および命題 7 なのでこの 2 つの命題を確認していただくと理解できます。

定理 $\text{sr}(C_r^*(F_2)) = 1$.

証明 $F_2 = \langle a, b \rangle$, $A = C_r^*(F_2)$, A の可逆元全体を $G(A)$ と表す。
 $\text{sr}(A) > 1$ と仮定して矛盾を導く方法で証明をする。

$\text{sr}(A) > 1$ とすると命題 2 より $x \in A$ で

$$\|x\| = d(x, G(A)) = 1$$

となるものが存在する。このとき $\|x\|_2 = \sqrt{\tau(x^*x)} < 1$ となる。実際、
 $\|x\| = 1$ より $1 - x^*x, 1 - xx^* \geq 0$ となり $\|x\|_2 \leq 1$ 。 $\|x\|_2 = 1$ とすると $\tau(1 - x^*x) = \tau(1 - xx^*) = 0$ となり τ の忠実性より $x^*x = xx^* = 1$ が導け $d(x, G(A)) = 1$ に反する。

$x \mapsto \|x\|_2$, $x \mapsto d(x, G(A))$ のノルム連続性に注意すると上の x に近い $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(g_i)$ で

$$\|y\|_2 < d(y, G(A))$$

となるものが選べる。 $g_i, g_j \neq e$ ($i \neq j$) に対して十分大きな $k \in \mathbb{N}$ を選ぶと

$$b^k g_i b^{-k}, b^k g_i^{-1} g_j b^{-k}$$

の縮約形は b のべきで始まり b のべきで終わる形になる。

$$u = \lambda(ab^k), \quad v = \lambda(b^{-k}a)$$

とおくと k の選び方より

$$\|(uyv)^m\|_2 = \|uyv\|_2^m \quad (m \in \mathbb{N})$$

となる。 $m = 2$ の場合を以下に検証しておく。まず $uyv, (uyv)^2$ の形は

$$uyv = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(ab^k g_i b^{-k} a), \quad (uyv)^2 = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda(ab^k g_i b^{-k} a^2 b^k g_j b^{-k} a)$$

であり $\|\cdot\|_2$ の計算を行うと

$$\begin{aligned} \|uyv\|_2^2 &= \tau((uyv)^*(uyv)) \\ &= \tau\left(\sum_{i,j} \alpha_i \bar{\alpha}_j \lambda(a^{-1} b^k g_j^{-1} g_i b^{-k} a)\right) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(uyv)^2\|_2^2 &= \tau(((uyv)^2)^*(uyv)^2) \\ &= \sum_{i,j,s,t} \alpha_i \alpha_j \bar{\alpha}_s \bar{\alpha}_t \tau(\lambda(a^{-1} b^k g_t^{-1} b^{-k} a^{-2} b^k g_s^{-1} g_i b^{-k} a^2 b^k g_j b^{-k} a)) \\ &= \sum_{i,j} |\alpha_i|^2 |\alpha_j|^2 = \|uyv\|_2^4 \end{aligned}$$

となる。

語 $ab^k g_1 b^{-k} a, \dots, ab^k g_n b^{-k} a$ の縮約したときの最大長さを N とおくと命題 7 より

$$\|(uyv)^m\| \leq 2(mN + 1)^2 \|uyv\|_2^m \quad (m \in \mathbb{N})$$

という関係式が得られる。これらを用いて uyv のスペクトル半径 $r(uyv)$ を評価すると

$$\begin{aligned} r(uyv) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|(uyv)^m\|^{1/m} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} (2(mN + 1)^2 \|uyv\|_2^m)^{1/m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (2(mN + 1)^2)^{1/m} \|uyv\|_2 \\ &= \|uyv\|_2 = \|y\|_2 \end{aligned}$$

となる。 u, v がユニタリであることに注意すれば

$$\begin{aligned}
 d(y, G(A)) &= d(uyv, G(A)) \\
 &= \inf\{\|uyv - z\| \mid z \in G(A)\} \\
 &\leq \inf\{\|uyv - (uyv - \lambda 1)\| \mid \lambda \in (Sp(uyv))^C\} \\
 &= \inf\{|\lambda| \mid \lambda \in (Sp(uyv))^C\} \\
 &\leq \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in Sp(uyv)\} \\
 &= r(uyv) \leq \|y\|_2
 \end{aligned}$$

が導け、 $\|y\|_2 < d(y, G(A))$ という選び方に矛盾する。

従って $sr(C_r^*(F_2)) = 1$ が導かれる。 □

参考文献

- [Av] D. Avitzour, *Free products of C^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **271**(1982), 423–435.
- [Ch] M.-D. Choi, *A simple C^* -algebra generated by two finite-order unitaries*, Canad. J. Math. **31**(1979), 867–880.
- [DHR] K. Dykema, U. Haagerup and M. Rørdam, *The stable rank of some free product C^* -algebras*, to appear in Duke Math. J. (<http://www.imada.ou.dk/dykema/>).
- [H] U. Haagerup, *An example of a non nuclear C^* -algebra, which has the metric approximation property*, Invent. Math. **50**(1979), 279–293.
- [P] R. T. Powers, *Simplicity of the C^* -algebra associated with the free group on two generators*, Duke Math. J. **42**(1975), 151–176.
- [Rf] M. A. Rieffel, *Dimension and stable rank in the K -theory of C^* -algebras*, Proc. London Math. Soc. **46**(1987), 301–333.
- [Rr] M. Rørdam, *Advances in the theory of unitary rank and regular approximation*, Ann. of Math. **128**(1988), 153–172.
- [V] J. Villadsen, *On the stable rank of simple C^* -algebras*, preliminary version.