数理解析研究所講究録
1003 巻 1997 年 94-103

ヒルベルト双加群から作られる C*-環

梶原 毅

岡山大学環境理工学部

1. INTRODUCTION

Pimsner および Katayama は、Cuntz によってヒルベルト空間から自然に作られる C*-環、すなわち Cuntz algebra の bimodule を使った自然な拡張を定義した ([Pi], [Kat])。

Abadie-Eilers-Exel [AEE] の発想を受け、[KPW] は、この環を、Hilbert C*-bimodule の covariant representation から universal に生成される C*-環として定義した。その意味で、この C*-環を bimodule algebra とよぶことにする。Bimodule algebra は Doplicher-Roberts algebra と密接な関係があることが多いが、それらの関係は微妙なところがある。

本稿の目的は、bimodule algebra の基本的な事項について解説することである。最初に、あとで bimodule algebra の K 群の計算に十分なだけの KK 理論の準備を、[Bl] に従って行う。本来、難解なのは、Kasparov product であるが、ここでは簡単にわかる場合しか必要としない。次に、bimodule algebra および Toeplitz algebra の定義と universality、および、K 群の計算法について、[Pi] に従って解説する。

最後に、bimodule algebra として表現されるいろいろな C*-環の例をあげる。Bimodule algebra として表される C*-環は groupoid C*-環、partial isomerty で生成される C*-環など、いろいろな興味深い表示を持つ場合が多い。各表示は便利な面を持っているが、KK-群の Fredholm picture は bimodule そのものに operator を付加したものであるため、bimodule algebra としての表示と非常に親和性が高く、K-群の計算、少なくとも 6-term exact sequence を導く計算が非常に見通しよくなる。

2. KK 理論からの用意

C*-環の K 群の計算において KK 理論を使うと非常に見通しがよくなることがある。KK 理論は難解であると恐れられることが多いが、ここでは、bimodule algebra の K 群の計算に必要な部分だけに制限して準備を行なう。

A, B は σ-unitl な C*-環とする。

$$E(A,B)=\{(E,\phi,F)\}$$

ただし、E は countablly generated right graded Hilbert C*-module over B, ϕ は、A から $\mathbf{L}_B(E_B)$ への degree 0 *-homomorphism, F は $\mathbf{L}_B(E_B)$ の degree 1 の有界作用素であり、$[F,\phi(a)]$, $(F^2-I)\phi(a)$, $(F^*-F)\phi(a)$ が任意の $a\in A$ に対してすべて $\mathbf{K}_B(E_B)$ に入るものとする。

これらを、Kasparov module という。degree 1 の作用素としてもっともよく使われるのは、

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

であり、このときは上の各元は、$\phi_0(a)-\phi_1(a)\in\mathbf{K}_B(E_B)$ である。もう一つの例として $F=0$ のときは、$\phi_i(a)\in\mathbf{K}_B(E_B)$ $(i=0,1)$ となる。

$D(A,B)$ は、$E(A,B)$ の中で、$[F,\phi(a)]$, $(F^2-F)\phi(a)$, $(F^*-F)\phi(a)$ がすべて 0 になるものからなる集合とする。これを、degenerate module という。上の F で前後に同じ bimodule を並べたものが degenerate module の典型的な例である。

$E(A,B)$ に適当なホモトピーによる同値関係を入れ、直和演算で和を入れたものを $KK(A,B)$ とかく。これは自動的に可換群になり、Kasparov の KK 群という。なお、degenerate module は、0 に homotopic である。なお、ホモトピーは F のみを動かす operator homotopy を特別な例として含む。特に、$\phi(a)$ 自身が常にコンパクトならば、F は、ホモトピックに 0 に変形され、その場合 bimodule 部分のみを考えればよいことになる。$E(A,B)$ に operator homotopy と degenerate module による quotient で同値関係を入れたものを $KK_{oh}(A,B)$ とかく。$KK_{oh}(\mathbf{C},B)$ は $K_0(B)$ と同型である。

f が A から B への *-準同型とする。$E=B\oplus 0$, ϕ は $A\to B$ による自然な表現、$F=0$ として、Kasparov module E_f が定義される。その意味で、KK 群は、*-準同型の一般化にあたると考えられる。この考え方をもっと徹底したものが Cuntz picture であるが、ここでは触れない。

また、E は right Hilbert B-module で *-homomorphism $\phi|A\to\mathbf{K}_B(E_B)$ をもつものとする。(E,ϕ) を appendix in [KPW] にならって、Hilbert right A-B bimodule とよぶ。そのとき、$E=E_B$, ϕ は A の表現、$F=0$ として Kasparov module である。したがって、KK-群は、単なるヒルベルト双加群にさらに付加構造を付け加えたものとも考えられる。

KK 理論の適用において、A は separable, B は σ-unital という条件が非常に重要である。

Theorem 1 (Th 18.5.3 [Bl]). *]* そのとき $KK(A,B)$ と $KK_{oh}(A,B)$ が同型となり、$KK(\mathbf{C},B)\simeq K_0(B)$ となる。

K 群の計算において KK 理論が有効であるのは、次の Kasparov product の存在によるところが大きい。

Theorem 2 (Kasparov). *bilinear map* : $KK(A, D) \times KK(D, B) \to KK(A, B)$ が存在し、しかも結合的である。

(E_1, ϕ_1, F_1) と (E_2, ϕ_2, F_2) に対して、$E = E_1 \otimes_{\phi_2} E_2$, $\phi = \phi_1 \otimes \phi_2$ とおく。ここで、$E_1 \otimes_{\phi_2} E_2$ は、E_1 と E_2 の inner tensor product である。F のみ複雑に定義される。$F = F_1 \#_D F_2$ とかく。ここが Kasparov product を難しくしている原因である。ただし、片方の F_i が 0 であれば、$F = F_1 \otimes I$ または、$F = I \otimes F_2$ ととることができる。また、$x \in KK(A, D)$ が *-準同型 $f : A \to D$ で与えられるときには特に簡単で、$E = E_2$, $\phi = \phi_2 \circ f$, $F = F_2$ としてよい。$\alpha \in KK(A, D)$, $\beta \in KK(D, A)$ であるとき、bimodule の部分は inner tensor product であるから、α と β の Kasparov product を $\alpha \otimes_D \beta$ とかくことが多い。

$KK(A, B)$ の元は $K_*(A)$ から $K_*(B)$ への $\mathbf{Z}$ 線形写像として表現される。これによって C*-環の指数理論と K-理論に重要な関係が存在する ([KW])。

ここで紹介した KK 群の定義は Fredholm picture とよばれ、実体が Hilbert bimodule であるから、bimodule algebra とは非常に親和性が強い。Bimodule algebra としての表現をもつような C*-環については、少なくとも K 群の計算においては、bimodule algebra の構造を使うのがもっとも有効であると思われる。

3. 双加群から作られる C*-環の定義と普遍性

A は σ-unital C*-環とする。E は countablly generated Hilbert right A-module とし、ϕ は A から $\mathbf{L}_A(X_A)$ への等距離 *-準同型とする。このような (E, ϕ) は right Hilbert A-A bimodule と呼んでいる。$\{\langle x, y\rangle_A | x, y \in X\}$ の線形結合全体のノルム閉包が A になるとき、E は full という。通常は full なものしか扱わない。E に対して functorial に C*-環を構成することを考える。(F, ψ) を right Hilbert A-A bimodule とする。$\forall \xi \in E$ に対して、$T_\xi \in L_A(F, E \otimes_\psi F)$ を

$$T_\xi(\eta) = \xi \otimes \eta \qquad \eta \in F$$

と定義する。これは、いわゆる creation operator である。そのとき、right A-module としての adjoint $T_\xi^* \in \mathbf{L}_A(E \otimes_\psi F, F)$ は

$$T_\xi^*(\zeta \otimes \eta) = \psi(\langle \xi, \zeta\rangle_A)\eta$$

となり、こちらは annilation operator である。また、$\xi \otimes \zeta^* \in \mathcal{K}(E) \subset \mathbf{L}_A(E)$ は

$$(\xi \otimes \zeta^*)(\gamma) = \xi\langle \zeta, \gamma\rangle_A$$

で与えられる one rank operator とする。このとき、$\|T_\xi\|^2 = \|\psi(\langle \xi, \xi\rangle_A)\|$ であり、ψ が忠実であれば、T は isometric である。

$E^{\otimes 0} = A$, $E \otimes_\phi E = E^{\otimes 2}$, $E \otimes_\phi E \otimes_\phi E = E^{\otimes 3}$ として、順次 $E^{\otimes n}$ を定義する。これらはすべて Hilbert right A-A bimodule であり、countablly generated である。$\bigoplus_{n=0}^{finite} E^{\otimes n}$ の A 右内積による完備化を $\mathcal{E}_+$ とおく。これを Fock Hilbert space にならって Fock Hilbert module とよぶことにしよう。$\xi \in E$ に対して、T_ξ は各 monomial に対して定義して線形に $\mathcal{E}_+$ に拡張する。

$$J(\mathcal{E}_+) = L\left(\bigoplus_{n=0}^{finite} E^{\otimes n}\right)$$

とおき、$M(\mathcal{E}_+)$ で $\mathbf{L}_A(\mathcal{E}_+)$ における $J(\mathcal{E}_+)$ の multiplier とする。$T_\xi \in M(\mathcal{E}_+)$ であることに注意。

Definition 3. $\mathcal{T}_\mathcal{E}$ は $\mathbf{L}_A(\mathcal{E}_+)$ において $\{T_\xi : \xi \in E\}$ で生成される C*-環とし E に付随した Toeplitz algebra と呼ぶ。また、$M(\mathcal{E}_+)/J(\mathcal{E}_+)$ における $\mathcal{T}_E$ の quotient image を $\mathcal{O}_E$ とかき、E に付随した bimodule algebra という。T_ξ の $\mathcal{O}_E$ における像を S_ξ とかく。

Bimodule algebra という名前は現在一般的ではないが、このように呼ぶのは、E の universal covariant representation で生成される C*-環とみなせるからである。この時点では、$\mathcal{T}_E \to \mathcal{O}_E$ の kernel $| \mathcal{T}_E \cap J(\mathcal{E}_+)$ の実体はよくわからない。

A, $\mathbf{L}_A(E)$ などの元は、

$$a(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = (\phi(a)\xi_1) \otimes \cdots \otimes \xi_n$$
$$T(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = (T\xi_1) \otimes \cdots \otimes \xi_n$$

のように、$\mathbf{L}_A(\mathcal{E}_+)$ へも $\mathbf{L}_A(\mathcal{E}_+)/J(\mathcal{E}_+)$ へも埋め込むことができる。さらに一般に、$\mathbf{L}_A(E^{\otimes k})$ も $\mathbf{L}_A(\mathcal{E}_+)$, $\mathbf{L}_A(\mathcal{E}_+)/J(\mathcal{E}_+)$ に埋め込むことができる。

Proposition 4. $\mathcal{O}_E$ の各元は次を満たしている。

1. $S_\xi^* S_\zeta = \langle \xi, \zeta \rangle_A$
2. $S_\zeta S_\xi^* = \zeta \otimes \xi \in K(E)$ $\quad S_{\zeta_1} \cdots S_{\zeta_n} S_{\xi_1}^* \cdots S_{\xi_n}^* = (\zeta_1 \otimes \cdots \otimes \zeta_n) \otimes (\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n)^* \in K(E^{\otimes n})$
3. $S_\xi a = S_{\xi a}, \quad aS_\xi = S_{\phi(a)\xi}$
4. $TS_\xi = S_{T(\xi)} \quad \forall \xi \in E, T \in \mathbf{L}_A(E)$

Toeplitz algebra $\mathcal{T}_E$ および bimodule algebra $\mathcal{O}_E$ は以下に説明する重要な universality を持っている。

Theorem 5 (Pimsner). *(E, ϕ) は full Hilbert right A-A bimodule とし、$\mathcal{T}_E$ を E から作られた Toeplitz algebra とする。B は C^*-algebra で $\sigma|A \to B$ は *-homomorphism であり、集合 $\{t_\xi\}_{\xi \in E} \subset B$ が存在し、*

1. $\alpha t_\xi + \beta t_\zeta = t_{\alpha\xi} + \beta t_\zeta$
2. $t_\xi \sigma(a) = t_{\xi a} \quad \sigma(a) t_\xi = t_{\phi(a)} \xi$
3. $t_\xi^* t_\zeta = \sigma(\langle \xi, \zeta \rangle_A) \quad \forall \xi, \zeta \in E$

をみたしているとする。そのとき、$\mathcal{T}_E$ から B への **-homomorphims* で σ の拡張になっているものが一意的に存在する。

写像 $(\xi_1\otimes\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_n)\otimes(\zeta_1\otimes\zeta_1\otimes\cdots\otimes\zeta_n)^* \to t_{\xi_1}t_{\xi_2}\cdots t_{\xi_n}t^*_{\xi_n}\cdots t^*_{\xi_2}t^*_{\xi_1}$ は $\mathcal{K}(E^{\otimes n})$ から B への *-homomorphism であるから、$\sigma^{(n)}$ とかく。

Theorem 6 (Pimsner). (E,ϕ) は *full Hilbert right A-A bimodule* とする。$\mathcal{O}_E$ を (E,ϕ) から作られる *Pimsner algebra* とする。B を C^*-環で $\sigma : A \to B$ と $\{t_\xi\}_{\xi\in E}$ が次をみたすとする。

1. $\alpha t_\xi + \beta t_\zeta = t_{\alpha\xi+\beta\zeta}$
2. $t_\xi\sigma(a) = t_{\xi a}, \qquad \sigma(a)t_\xi = t_{\phi(a)\xi}$
3. $t^*_\xi t_\zeta = \sigma(\langle\xi,\zeta\rangle_A)$
4. $\sigma^{(1)}\phi(a) = \sigma(a), \qquad \forall a \in I$

そのとき、$\mathcal{O}_E$ から B への **-homomorphism* で σ の拡張になっているものがただ一つある。

(4) は、A の bimodule への左右の表現が同じ空間上に表現されているときは一致することを要請する条件である。

次に、$\mathcal{T}_E \to \mathcal{O}_E$ の kernel をみる。$\mathcal{K}_A(E) = \mathbf{L}_A(E)$ すなわち finite type の場合は ϕ の像は自動的に $\mathcal{K}(E)$ に含まれるが、一般にはそうではない。$\phi(A) \subset \mathcal{K}(E)$ であることも多いが、そうでない場合もあるので、一般的に考える。$I = \phi^{-1}(\mathcal{K}(E))$ とおく。I は A の closed two sided ideal であり、特に $\{0\}$ になる場合もある。$\mathcal{E}_{+,I} = \{\zeta \in \mathcal{E}_+ | \langle\zeta,\zeta\rangle_A \in I\}$ とし、$\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I}) = \{\sum \xi\otimes\zeta^* | \xi,\zeta \in \mathcal{E}_{+,I}\}^-$ とする。

Theorem 7 (Pimsner). (E,ϕ) は *full Hilbert right A-A bimodule* であるとする。そのとき、次の *exact sequence* が成り立つ。

$$\{0\} \to \mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I}) \to \mathcal{T}_E \to \mathcal{O}_E \to \{0\}$$

これは、$\mathcal{T}_E$ と $\mathcal{O}_E$ の universality の食い違いに対応するものである。

$$Q_0 = I - \sum_{i=1}^{\infty} T_{\xi_i}T^*_{\xi_i}$$

とおく。これは、$\mathcal{E}_+$ から A への直交射影であり、古典的な Fock Hilbert space の vacume vector への 1 次元射影にあたるものである。

Kasparov により、$\mathcal{K}(E)$ の approximate unit $\{k_n\}$ で

$$k_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \otimes \xi_i^*$$

の形のものが存在する。これによって、(4) は 次の

$$\sigma(a) = \sum_{n=1}^{\infty} t_{\phi(a)\xi_n}t^*_{\xi_n}$$

となる。さらに、A が 1 をもち E が finitely generated であるときは、

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_i \otimes \xi_i^* = 1$$

であるとき、

$$\sum_{i=1}^{k} t_{\xi_i} t_{\xi_i}^* = \sigma(1)$$

と同値となる。これらから、$\mathcal{O}_E$ の Universality の (4) の条件は、Q_0 を 0 に写し、さらには Q_0 で生成されるイデアルを 0 に写すことになり、Fock Hilbert module で finite rank operator の閉包からなるイデアルを 0 に落とすことと同等であることがわかる。

$\mathcal{E}_+$ の finite rank operator は、$T_{\xi_1} T_{\xi_2} \cdots T_{\xi_l} Q_0 T_{\xi_k}^* \cdots T_{\xi_1}^*$ とあらわされる。ただし、この元は一般に $\mathcal{T}_E$ に入る保証はない。そこで、$j \in I$ をとって jQ_0 とすると $\mathcal{T}_E$ の元になる。従って $(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_l) j_1 \otimes j_2^* (\zeta_1 \otimes \cdots \otimes \zeta_k)^* \in \mathcal{T}_E$ となる。これは、$(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_l)$ および $(\zeta_1 \otimes \cdots \otimes \zeta_k)$ たちの右から $j_1, j_2 \in I$ をかけて one rank operator を作ったものだから、$\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I})$ の元である。I の approximate unit を使った議論で、$\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I})$ 全体が $\mathcal{T}_E$ に入ることがわかる。さらに、kernel に入ることは明らかである。

逆に $t_\xi \in \mathcal{T}_E / \mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I})$ を T_ξ の quotient image とする。そのとき、これらは $\mathcal{O}_E$ の universality の条件 (1),(2),(3),(4) を満たしていることがわかり、それから

$$\mathcal{T}_E / \mathcal{K}(\mathcal{E}_{\mathcal{E}_{+,I}}) \simeq \mathcal{O}_E$$

が成り立つ。kernel を調べるために $\mathcal{O}_E$ の universality が先に証明されて使われるのである。

Corollary 8. もし、$\phi(A) \cap \mathcal{K}(E) = \{0\}$ ならば $\mathcal{O}_E \simeq \mathcal{T}_E$ である。

これにより、O_∞ は Toeplitz algebra と同型である。

4. K 群の計算

C*-環の K-群の計算は、かなりの場合、exact seqence から派生する 6-term exact sequence によって行なわれる。従って、手法はどうであれ、でてくる公式はほとんど同じものであることが多い。

$\mathcal{O}_E$ の場合も例外ではない。まず手始めは、$\mathcal{T}_E$ が A と KK-equivalent となることを示すことである。ただし、正確な seqence をつくるためには、その equivalence をなるべく簡単に、かつ具体的に構成することが必要となる。

Proposition 9 (Pimsner). $\mathcal{T}_E$ と A は *KK-equivalent* である。

そのために、$\alpha \in KK(A, \mathcal{T}_E)$, $\beta \in KK(\mathcal{T}_E, A)$ を作って、$\alpha \otimes_{\mathcal{T}_E} \beta = id_A$, $\beta \otimes_A \alpha = id_{\mathcal{T}_E}$ となることを言えばよい。

Definition 10. $\alpha \in KK(A, \mathcal{T}_E)$ は、inclusion $i : A \subset \mathcal{T}_E$ によって決まる元とする。

これは準同型であるからわかりやすいが、逆向きは大きい環から小さい環への対応なので、準同型ではなく、準同型の差の形で作ることになる。

$E = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_+$ とおく。これは Hilbert right A-A bimodule である。

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とし、π_0, $\pi_1 : \mathcal{T}_E \to \mathbf{L}_A(\mathcal{E}_+)$ を次のように定める。π_0 は $\mathcal{T}_E$ の $\mathcal{E}_+$ 上の自然な表現、π_1 は $\mathcal{T}_E$ の $\mathcal{E}_+$ 上の自然な表現を $\mathcal{E}_+ \ominus A$ に制限したものとする。$\mathcal{T}_E$ の universality により、generator の表現だけを作れば十分である。$\pi = \pi_0 \oplus \pi_1$ と置く。$(\mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_+, \pi, T)$ は Kasparov module の公理をみたす。β としては、上の module の $KK(\mathcal{T}_E, A)$ における同値類とする。

$\alpha \otimes_{\mathcal{T}_E} \beta = [(\mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_+, \pi \circ i, T)]$ であり、これは、i による pull back に過ぎない。ここで、$\pi_0 \circ i$ は A の $\mathcal{E}_+$ への自然な表現であり、$\pi_1 \circ i = (1 - Q_0)\pi_0 \circ i$ である。この bimodule は $A \oplus A$ と $(\oplus_1^\infty E^{\otimes n}) \oplus (\oplus_1^\infty E^{\otimes n})$ の直和に分解する。前者は、$(1_A, 0) \simeq 1_A$ であり、後者は T の形より degenerate module である。従って、$\alpha \otimes_{\mathcal{T}_E} \beta = 1_A$ である。

$\beta \otimes_A \alpha$ を考える。これは、$((\mathcal{E}_+ \otimes_i \mathcal{T}_E) \oplus (\mathcal{E}_+ \otimes_i \mathcal{T}_E), (\pi_0 \otimes 1) \oplus (\pi_1 \otimes 1), T \otimes 1)$ である。$\pi_1 \otimes 1$ は $\mathcal{T}_E \simeq A \otimes_i \mathcal{T}_E \subset \mathcal{E}_+ \otimes_i \mathcal{T}_E$ を零化空間として持つ。

$$\beta \otimes_A \alpha - 1_{\mathcal{T}_E} = [(\mathcal{E}_+ \otimes_i \mathcal{T}_E) \oplus (\mathcal{E}_+ \oplus_i \mathcal{T}_E), (\pi_0 \otimes 1) \oplus \pi_1', T \oplus 0)]$$

である。ただし、$\pi_1' : \mathcal{T}_E \to \mathbf{L}_A(\mathcal{E}_+ \otimes_i \mathcal{T}_E)$ は$\pi_1'(t) = \tau_1(t) + (\pi_1 \otimes_i 1)(t)$ である。

$\mathcal{E}_+ \otimes_i \mathcal{T}_E \simeq \mathcal{T}_E \oplus ((\bigotimes_{n=1}^\infty E^{\otimes n})) \otimes_i \mathcal{T}_E$ とみて、$\tau_1(t)$ は前者には $\mathcal{T}_E$ の multiplication として、後者には 0 として作用させる。

$(\pi_0 \otimes 1)(T_\xi) = \tau_0(T_\xi) + (\pi_1 \otimes_i 1)(T_\xi)$ である。ただし、$\tau_0(T_\xi)$ は $t \in \mathcal{T}_E \simeq A \otimes_i \mathcal{T}_E \subset \mathcal{E}_+ \otimes_i \mathcal{T}_E$ を $\xi \otimes t \in E \otimes \mathcal{T}_E \subset \mathcal{E}_+ \otimes_i \mathcal{T}_E$ に送り込み、degree が 1 以上のところでは 0 にする作用素である。$\tau_0(T_\xi)$, $\tau_1(T_\zeta)$, $(\pi_1 \otimes 1)(T_\mu)$ の range はすべて直交しているので、$(\cos(\pi/2)t)\tau_0(T_\xi) + (\sin(\pi/2)t)\tau_1(T_\xi) + (\pi_1 \otimes 1)(T_\xi)$ が universality により $\mathcal{T}_E$ の表現を与え、さらには、(π_0, π_1) と (π_0, π_0) の homotopy を与える。

$\phi_A(A) \cap \mathcal{K}(E) = \{0\}$ ならば、$A \subset \mathcal{O}_E$ は KK-equivalence である。

一般の場合は、$(E, \phi, 0)$ の $KK(I, A)$ における class を $[E]$ とかくことにする。

Proposition 11 (Pimsner). *$[\mathcal{E}_{+,I}] \in KK(\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I}), I)$ を Morita equivalence module とし、$[j] \in KK(\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I}), \mathcal{T}_E)$ を $\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I}) \subset \mathcal{T}_E$ の inclusion から与えられる元、$[i_I] \in KK(I, A)$ を $I \subset A$ の inclusion によっ*

て与えられる元とする。そのとき、

$$[\mathcal{E}_{+,I}]\otimes_I(i_I-[E])=[j]\otimes_{\mathcal{T}_E}\beta$$

が $KK(\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I}),A)$ の中で成り立つ。

この Proposition は、K 群の計算において、$1-[E]$ の類の量がよく現われることの説明である。j は *-homomorphism であるから、$[j]\otimes_{\mathcal{T}_E}\beta$ は、β の pull back $(\mathcal{E}_+\oplus\mathcal{E}_+,\pi\circ j,T)$ である。$\pi\circ j(\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I}))$ はコンパクト作用素に値をとるので、operator homotopy によって $T\to 0$ とすることができる。$T=0$ であるから、bimodule part の分解が、KK の元の分解を与える。

$$(\mathcal{E}_+\oplus(1-Q_0)(\mathcal{E}_+),\pi_0\circ j\oplus\pi_1\circ j,0)=(\mathcal{E}_+,\pi_0\circ j,0)-((1-Q_0)(\mathcal{E}_+),\pi_1\circ j,0)$$

$\pi_0\circ j$ は $\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I})$ に値をとる。ここで、$(1-Q_0)\mathcal{E}_+\simeq\mathcal{E}_+\otimes_A E$ である。左作用はイデアル $\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I})$ に制限してされており、${}_{\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I})}\mathcal{E}_+$ は degenerate である。essential subspace は $\mathcal{E}_{+,I}$ であるから、homotopy を構成して essential subspace に狭めることができる。従って、$KK(\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I}),A)$ の元として、$([\mathcal{E}_+\otimes_A E]=[\mathcal{E}_{+,I}\otimes_I E]$ となる。これにより、

$$\begin{aligned}[(\mathcal{E}_+,\pi_0\circ j,0)]&=[(\mathcal{E}_{+,I}\otimes_{i_I}A),id\otimes 1,0]\\&=[\mathcal{E}_{+,I}]\otimes_I[i_I]\end{aligned}$$

もう一方も同様にして、

$$\begin{aligned}[(1-Q_0)(\mathcal{E}_+,\pi_1\circ j,0))=&[\mathcal{E}_{+,I}\otimes_i E,id\otimes 1,0]\\=&[\mathcal{E}_{+,I}]\otimes_I[E]\end{aligned}$$

これらより、

$$\begin{aligned}[j]\otimes_{\mathcal{T}_E}\beta&=[\mathcal{E}_{+,I}]\otimes[i_I]-[\mathcal{E}_{+,I}]\otimes_I[E]\\&=[\mathcal{E}_{+,I}]\otimes([i_I]-[E])\end{aligned}$$

前節で示されている exact seqence

$$0\to\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I})\to\mathcal{T}_E\to\mathcal{O}_E\to 0$$

に対しては標準的に次の 6-term exact seqence が生じる。

$$\begin{array}{ccccc}K_0(\mathcal{K}(\mathcal{E}_{+,I}))&\longrightarrow&\mathcal{T}_E&\longrightarrow&K_0(\mathcal{O}_E)\\ {\scriptstyle\delta}\big\uparrow&&&&\big\downarrow{\scriptstyle\delta}\\ K_1(\mathcal{O}_E)&\longleftarrow&K_1(\mathcal{T}_E)&\longleftarrow&K_1(\mathcal{E}_{+,I})\end{array}$$

これを、上で証明した KK-equivalence で置き換えると、

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \xrightarrow{[i_I]-[E]} & K_0(A) & \xrightarrow{i_*} & K_0(\mathcal{O}_E) \\ {\scriptstyle\delta}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ K_1(\mathcal{O}_E) & \xleftarrow{i_*} & K_1(A) & \xleftarrow{[i_I]-[E]} & K_1(I) \end{array}$$

となり、これが目的とする式である。この sequence は、Pimsner-Voiculescu の $\mathbf{Z}$ 接合積、Cuntz による Cuntz algebra, Cuntz-Krieger algebra、Exel による partial action crossed product、およびさらに類似の C^*-環の K-群の計算式すべてを含むものである。

5. 例

Example 5.1 (Cuntz algebra). もっとも簡単でわかりやすい例は、Cuntz algebra O_n である。$E = {}_{\mathbf{C}}\mathbf{C}^n{}_{\mathbf{C}}$ を用いて $\mathcal{T}_E$ を作ると古典的な Toeplitz algebra であり、$\mathcal{O}_E$ は、Cuntz algebra である。このとき、$\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{C}^n{}_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^n\mathbf{C}$ であるから、$[E]$ を左からかける Kasparov 積の操作は、$K_0(\mathbf{C}) \simeq \mathbf{Z}$ の n 倍の演算にあたる。よって、

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z} & \xrightarrow{(1-n)\cdot} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & K_0(\mathcal{O}_n) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(\mathcal{O}_n) & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

これより、$K_1(\mathcal{O}_n) = \{0\}$, $K_0(\mathcal{O}_n) = \mathbf{Z}/\mathbf{Z}_{n-1}$ である。

$E = {}_{\mathbf{C}}l^2{}_{\mathbf{C}}$ とすると、$\mathcal{O}_E$ は $\mathcal{O}_\infty$ である。この場合、$(\mathbf{C}\cdot I)\cap\mathcal{K}(l^2) = \{0\}$ である。従って、$\mathcal{T}_E = \mathcal{O}_E$ であり、$\mathcal{T}_E$ と $\mathbf{C}$ が KK-equivalent であるから、$K_0(O_\infty) \simeq \mathbf{Z}$, $K_1(O_\infty) = \{0\}$ である。

Example 5.2 (finitely generated Cunz-Krieger algebra). $E = E_B$ ここで、E は有限次元、B は有限次元可換 C^*-環とする。さらには、B は $\mathcal{K}_B(E_B)$ に単射的に表現されているとする。B の左からの表現は、$B \subset \mathcal{K}_B(E_B)$ とみなすことができる。B と $\mathcal{K}_B(E_B)$ は center の次元が同じであり、0 以上の整数を成分に持つ正方行列 A と 1 対 1 に対応する。特に A の成分が 0 または 1 であるとき、$\mathcal{O}_E$ は Cuntz-Krieger algebra O_A である。K-群の計算において ${}^tA$ が現われていた理由などは、この対応より明確に理解できる。

Example 5.3 (接合積). A は C^*-環とし、α は A の自己同型とする。$E = A$ 自身に $\langle x, y\rangle_a = x^*y$ として、Hilbert right A module にする。左作用を $\phi(a)x = \alpha(a)x$ で決めると $\mathcal{O}_E$ が通常の接合積である。この場合、Pimsner-Voiculescu の exact sequence に現われる $i - \alpha_*$ の意味もよくわかる。partial action による接合積の場合 [Ex] も bimodule による接合積 [AEE] の場合も同様である。

Example 5.4 (被覆空間). トーラス Ω_1 の n 被覆であるトーラス Ω_2 を考える [Ku]。$A = C(\Omega_1)$ とおく。right Hilbert A-module E としては、Ω_1 から Ω_2 への path 全体上の連続関数の集合からとる。E は自然に left A-module となる。これから、$\mathcal{O}_E$ を作ることができ、K-群の計算も行なえる。古典的な言葉で言えば、Bunce-Deddense algebra ([BD]) の endomorphsm crossed product ([Pa]) ということになる。

6. 結び

Bimodule algebra については、単純性、イデアル構造なども研究されている ([KPW], [MS])。また、finite type でない bimodule の理論も整備され、finite type の結果のかなりのものが、countablly generated の場合に拡張されている ([KPW])。Bimodule algebra の問題点としては、free または essentially principal にあたる条件の自然な定式化がある。その他、この理論の発展については、また稿を改めて述べたい。

References

[AEE] B.Abadie, S.Eilers and R.Exel *Morita equivalence for crossed products by Hilbert C^*-bimodules,* to appear Trans. AMS

[BD] J.W.Bunce and J.A.Deddens *C^*-algebras generated by weighted shifts,* Indiana Univ. J. Math. 23(1973), 257-271

[Bl] *K-theory for operator algebras,* MSRI Publications, (1986) Springer

[Kat] Y.Katayama *Generalized Cuntz algebras $\mathcal{O}_N^M$,* RIMS Kokyuroku 858(1994), 131-151

[Ku] A.Kumujian *Preliminary algebras arizing from local homemomorphisms,* Math. Scand. 52(1983),269-278

[KW] T.Kajiwara and Y.Watatani *C^*-theoretic Jones index theory by Hilbert C^*-bimodules and K-theory,* preprint

[MS] P.S.Muhly and B.Solel *On the simplicity of some Cuntz-Pimsner algebras,* preprint

[Pa] W.L.Paschke *The crossed product of C^*-algebra by an endomorphism,* Proc. Amer. Math. Soc. 80(1980),113-118

[Pi] M.Pimsner *A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and rossed products in "Free Probability Theory,* Fields Instutut Communications 12(1997), 189-212

[PV] M.Pimsner and D.Voiculescu *Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-products of C^*-algebras* J. Operator Theory 4(1980), 93-118

[KPW] T.Kajiwara, C.Pinzari and Y.Watatani *Ideal structure and simplicity of the C^*-algebras generated by Hilbert bimodules,* preprint

[W] Y.Watatani *Index for C^*-subalgebras,* Memoirs AMS 424(1990)