

## SDP for the Maximum Stable Set Problem (SDP の最大安定集合問題への適用)

東京理科大学 池辺 淑子 (Yoshiko IKEBE)

### 1 はじめに

近年、線形計画法 (linear programming-LP) の拡張である半正定値計画法 (semidefinite programming-SDP) は各方面で盛んに研究されている。組合せ最適化の分野でも、SDP は有望視されており、さまざまな  $\mathcal{NP}$ -困難に対する良い近似解法や、従来手法では得られなかった厳密解法が SDP を用いて、提案されている。本稿で取り上げる最大安定集合問題は、SDP が組合せ最適化問題に適用された最初のものである。最大安定集合問題は無向グラフ上で定義される古典的な組合せ最適化問題で、 $\mathcal{NP}$ -困難問題としても有名である。特に、パーフェクトグラフ (perfect graphs) と呼ばれるグラフに関しては、多面体的な特徴づけは知られていたにもかかわらず、多項式時間の解法については長い間不明であった。これに対して Lovász は 1979 年 [11], (一般の) 無向グラフについて (今では) Lovász 数と呼ばれる数を定義し、この数を求める問題が SDP として定式化でき、パーフェクトグラフの場合には最大安定集合の大きさに一致することを示した。そして、1981 年に Grötschel, Lovász, Schrijver [7] によって、楕円体法を用いてその SDP が多項式時間で解けることが示されて、パーフェクトグラフ上の最大安定集合問題の多項式性が確立された。以下では Lovász 数を求める問題の SDP への定式化や用いられた楕円体法について紹介する。

### 2 安定集合問題とパーフェクトグラフ

$G = (V, E)$  を頂点集合が  $V$ , 枝集合が  $E$  である単純な無向グラフとする。簡単のために  $V = \{1, \dots, n\}$  とし、頂点  $i$  と  $j$  を結ぶ枝を  $(i, j)$  のように記す。また、 $\mathbf{R}, \mathbf{Q}$  をそれぞれ実数、有理数の全体として、 $\mathbf{R}^n$  を  $n$ -次元ユークリッド空間、 $\mathbf{R}^V$  を各座標軸が  $V$  の要素に対応する  $|V|$ -次元のユークリッド空間とする。

頂点集合  $S \subseteq V$  が安定集合 (stable set) であるとは、任意の  $i, j \in S$  について  $(i, j) \notin E$  が成り立つことである。

本稿では、以下の問題を考える。

#### 重みつき安定集合問題

与えられた無向グラフ  $G = (V, E)$ , およびベクトル  $w \in \mathbf{R}^V$ ,  $w \geq \mathbf{0}$  に対して、 $\sum_{i \in S} w_i$  を最大化する安定集合  $S$  を求める。

特に,  $w = (1, \dots, 1)^t$  のとき, この問題は要素数が最大の安定集合を求める問題, 最大安定集合問題になる. 最大安定集合の要素数を  $\alpha(G)$  と書き,  $G$  の安定数 (stability number) という. この問題は一般には  $\mathcal{NP}$ -困難である. 多項式時間で解けるグラフのクラスとしては 2 部グラフ (bipartite graphs) [9, 3], 三角化グラフ (triangulated graphs) [6, 4], クロー・フリーグラフ (claw-free graphs) [12] 等がある. これらは, クロー・フリーグラフ以外は, すべてパーフェクトグラフ (perfect graphs) である. 次にグラフのパーフェクト性について定義する.

まず, クリークや彩色, クリーク被覆について説明する. 頂点の部分集合  $K \subseteq V$  がクリーク (clique) であるとは, 任意の  $i, j \in K$  について  $(i, j) \in E$  が成り立つことである.  $G$  のクリークの要素数の最大値を  $\omega(G)$  と書き,  $G$  のクリーク数 (clique number) と呼ぶ. また,  $G$  の  $k$ -彩色とは, 頂点集合  $V$  の  $k$  個の安定集合への分割であり,  $G$  が  $k$ -彩色をもつような最小の整数  $k$  を  $G$  の彩色数 (chromatic number) と呼び,  $\gamma(G)$  で表す. 同様に,  $G$  の  $k$ -クリーク被覆とは, 頂点集合  $V$  の  $k$  個のクリークへの分割であり,  $G$  が  $k$ -クリーク被覆をもつような最小の整数  $k$  を  $G$  のクリーク被覆数 (clique covering number) と呼び,  $\rho(G)$  で表す.

明らかに  $\omega(G) \leq \gamma(G)$ ,  $\alpha(G) \leq \rho(G)$  は成り立つが, 等号は一般には成立しない. グラフ  $G$  がパーフェクト (perfect) であるとは

$$\omega(H) = \gamma(H)$$

が  $G$  の任意の誘導部分グラフ  $H$  について成立することである [1, 2].

ここで, 与えられたグラフ  $G = (V, E)$  に対して,  $\bar{E} = \{(i, j) \mid (i, j) \notin E\}$ ,  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  で定められるグラフを  $G$  の補グラフというが,  $G$  と  $\bar{G}$  の間には

$$\alpha(G) = \omega(\bar{G}), \rho(G) = \gamma(\bar{G})$$

が成り立つ. また,  $G$  とその補グラフのパーフェクト性は同値であることが知られている.

**定理 2.1 (Lovász [10]):**  $G$  がパーフェクト  $\iff \bar{G}$  がパーフェクト.

パーフェクトグラフについては, さまざまな興味深い結果が得られている. 中でも, Fulker-son による多面体に関する定理は非常にエレガントで強力である. これについては次節で述べることにする.

### 3 安定集合多面体

$V$  の部分集合  $F$  に対してその特性ベクトル (characteristic vector)  $\chi^F \in \{0, 1\}^V$  を

$$\chi_i^F = \begin{cases} 1 & i \in F \text{ のとき,} \\ 0 & i \notin F \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義し,  $G$  のすべての安定集合の特性ベクトルの凸包:

$$\text{STAB}(G) = \text{conv}\{\chi^S \mid S \text{ は } G \text{ の安定集合}\}$$

で定義される多面体を  $G$  の安定集合多面体 (stable set polytope) と呼ぶ. 空集合や頂点一つだけからなる集合 ( $\{i\}$ ) はすべて安定集合なので,  $\text{STAB}(G)$  は 0-ベクトルおよびすべての単位ベクトルを含み, 全次元 (full-dimensional) である.

この安定集合多面体を用いると, 重みつき最大安定集合問題は,

$$\max\{w^t x \mid x \in \text{STAB}(G)\}$$

と同値になる. 多面体  $\text{STAB}(G)$  の線形不等式系による表現があれば, この問題は線形計画問題であるから, (理論的には) 単体法や内点法などの方法を用いて解けるが, 残念ながら, 一般にはこのような完全な不等式系はわかっていない.

そこで,  $\text{STAB}(G)$  のファセットに対する妥当不等式を求めるさまざまな研究がなされている. 一般に多面体  $P$  に対して不等式  $cx \leq c_0$  が妥当 (valid) であるとは, 任意の  $x \in P$  がそれを満たすことである. 安定集合とは任意の二頂点間に枝のない頂点の部分集合なので,  $K$  を  $G$  のクリークとすると, どの安定集合も  $K$  の頂点を高々一つしか含むことができない. したがって, 安定集合  $S$  の特性ベクトル  $\chi^S$  は

$$\sum_{i \in K} \chi_i^S \leq 1$$

を満たすので,

$$\sum_{i \in K} x_i \leq 1$$

は  $\text{STAB}(G)$  に対する妥当不等式である. このような制約を ( $K$  に対する) クリーク制約と呼ぶ. クリーク制約, および非負制約で定義される多面体:

$$\text{QSTAB}(G) = \{x \in \mathbf{R}^V \mid x \geq 0, x \text{ は } G \text{ のすべてのクリーク制約を満たす}\}$$

は  $\text{STAB}(G)$  の一種の線形緩和である. つまり,  $\text{STAB}(G) \subseteq \text{QSTAB}(G)$  が成り立つ.  $G$  がパーフェクトならば, 両者は一致する.

定理 3.1 (Fulkerson [5]):  $G$  がパーフェクト  $\iff$   $\text{STAB}(G) = \text{QSTAB}(G)$ .

この定理から,  $G$  がパーフェクトならば, その安定集合多面体を完全に記述する不等式系が得られることがわかる. これより, (重み付き) 安定集合問題は線形計画問題として解けそうであるが, 残念ながら

定理 3.2 (Grötschel, Lovász, Schrijver [7]):  $\text{QSTAB}(G)$  上で線形関数を最大化する問題は  $\mathcal{NP}$ -困難である.

したがって, 多面体  $\text{QSTAB}(G)$  を直接扱うアプローチにはほとんど望みはない. しかし, Lovász [11] は  $\text{STAB}(G) \subseteq \text{TH}(G) \subseteq \text{QSTAB}(G)$  を満たす一般には多面体でない凸集合  $\text{TH}(G)$  を定義し,  $\text{TH}(G)$  上の線形な目的関数の最適化は SDP として定式化できることを示した. 次に  $\text{TH}(G)$  について説明する.

#### 4 正規直交表現と $\text{TH}(G)$

$n$  本の  $N$  次元ベクトル ( $N$  は適当な正整数) の集合  $(\mathbf{u}_i \mid i = 1, \dots, n)$  が  $G$  に対する正規直交表現 (orthonormal representation) であるとは,

$$\|\mathbf{u}_i\| = 1, (i = 1, \dots, n), \quad \mathbf{u}_i^t \mathbf{u}_j = 0 \text{ for } (i, j) \notin E$$

が成り立つことである.

例 1.  $\mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は  $G$  の自明な正規直交表現である. ただし,  $\mathbf{e}_i$  は  $i$ -要素のみが 1 でその他は 0 であるベクトルとする.

例 2.  $K$  を  $G$  のクリーク (簡単のために  $K = \{1, \dots, k\}$ ) とすると,

$$\mathbf{u}_i = (1, 0, \dots, 0) (i \in K), \quad \mathbf{u}_i = (0, \mathbf{e}_{i-k}) (i \notin K)$$

は  $G$  の正規直交表現である ( $N = n - k + 1$ ).

補題 4.1 ([11]):  $(\mathbf{u}_i \mid i = 1, \dots, n)$ ,  $(\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^N)$  を  $G$  の正規直交表現,  $\mathbf{c}$  を  $\|\mathbf{c}\| = 1$  である  $N$ -ベクトル,  $S$  を  $G$  の安定集合とすると,

$$\sum_{i \in S} (\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2 \leq 1.$$

証明.  $S$  は安定集合なので,  $S$  に含まれる  $i$  については  $\mathbf{u}_i$  は互いに直交し, また  $\|\mathbf{u}_i\| = 1$  を満たす. したがって,  $(\mathbf{u}_i \mid i \in S)$  に適当に  $N$  次元ベクトルを加えることで  $N \times N$  の直交行列  $Q$  を構成することができる.  $Q$  の第  $j$ -列ベクトルを  $\mathbf{q}_j$  とすると

$$\sum_{i \in S} (\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2 \leq \sum_{i=1}^N (\mathbf{c}^t \mathbf{q}_i)^2 = \mathbf{c}^t Q Q^t \mathbf{c} = \mathbf{c}^t \mathbf{c} = 1.$$

■

$S$  の特性ベクトル  $\chi^S$  について,

$$\sum_{i \in V} (\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2 \chi_i^S = \sum_{i \in S} (\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2$$

であるので,

$$\sum_{i \in V} (\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2 x_i \leq 1$$

は  $\text{STAB}(G)$  に対する妥当不等式であることがわかる。この形で記述される制約を  $G$  に対する正規直交表現制約 (orthonormal representation constraints) という。

例 3.  $G$  のクリーク  $K = \{1, \dots, k\}$  に対して

$$\mathbf{u}_i = (1, 0, \dots, 0) \ (i \in K), \quad \mathbf{u}_i = (0, \mathbf{e}_{i-k}) \ (i \notin K), \quad \mathbf{c} = (1, 0, \dots, 0)$$

ととったものから得られる正規直交表現制約は

$$\sum_{i \in K} x_i \leq 1$$

となるのでクリーク制約は正規直交表現制約の特殊ケースである。

さて,

$$\text{TH}(G) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^V \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \text{ は } G \text{ のすべての正規直交表現制約を満たす}\}$$

と定義すると前述の議論から  $\text{TH}(G)$  は

$$\text{STAB}(G) \subseteq \text{TH}(G) \subseteq \text{QSTAB}(G)$$

を満たす凸で有界な閉集合となる。しかし、 $\text{TH}(G)$  を定義する不等式数は無限なので一般に多面体にはならない。しかし、次に述べるように  $\text{TH}(G)$  上の線形関数の最適化は SDP として定式化でき、多項式時間で解くことができる。

## 5 Lovász 数 $\vartheta(G)$

$\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$  に対して、 $\mathbf{w}^t \mathbf{x}$  を  $\text{TH}(G)$  上で最大化した値:

$$\vartheta(G, \mathbf{w}) = \max\{\mathbf{w}^t \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \text{TH}(G)\}$$

を  $\mathbf{w}$  に対する重みつき Lovász 数と呼ぶ。特に,

$$\vartheta(G, \mathbf{1}) = \vartheta(G)$$

と書き, 単に Lovász 数という. 一見, 得体の知れないものを感じられるが, 次に示すように Lovász 数は多くの表現を持つ.

ベクトル  $\bar{w}$  を  $\bar{w} = (\sqrt{w_i} \mid i = 1, \dots, n)$  とし,  $W$  を  $W = \bar{w}\bar{w}^t$  で定義される  $n \times n$  行列 ( $W$  は対称) として,  $\vartheta_1(G, w), \dots, \vartheta_4(G, w)$  を以下のように定義する.

$$\vartheta_1(G, w) = \min \left\{ \max_{i \in V} \frac{w_i}{(\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2} \mid (\mathbf{u}_i \mid i \in V) : G \text{ の正規直交表現, } \|\mathbf{c}\| = 1 \right\}$$

$$\vartheta_2(G, w) = \min \{ \Lambda(\mathbf{A} + \mathbf{W}) \mid a_{ii} = 0 \forall i \in V, a_{ij} = 0 \forall (i, j) \notin E, \mathbf{A} : \text{実対称} \}$$

$$\vartheta_3(G, w) = \max \{ \mathbf{W} \bullet \mathbf{B} \mid \text{tr}(\mathbf{B}) = 1, b_{ij} = 0 \forall (i, j) \in E, \mathbf{B} : \text{実対称, 半正定値} \}$$

$$\vartheta_4(G, w) = \max \left\{ \sum_{i \in V} (\mathbf{d}^t \mathbf{v}_i)^2 w_i \mid (\mathbf{v}_i \mid i \in V) : \bar{G} \text{ の正規直交表現, } \|\mathbf{d}\| = 1 \right\}$$

ただし,  $\vartheta_1(G, w)$  の定義においては  $w_i = 0$  ならば  $\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i = 0$  のときでも  $w_i / (\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2 = 0$ ,  $w_i > 0$  かつ  $\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i = 0$  ならば  $w_i / (\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2 = \infty$ , とする. また,  $\Lambda(\mathbf{X})$  は  $\mathbf{X}$  の最大固有値を表し,  $\mathbf{X} \bullet \mathbf{Y} = \text{tr}(\mathbf{X}^t \mathbf{Y}) = \sum_{i,j} x_{ij} y_{ij}$  である.

定理 5.1 ([8]): 任意のグラフ  $G$ , および  $w \in \mathbf{R}^V$ ,  $w \geq \mathbf{0}$  に対して

$$\vartheta(G, w) = \vartheta_1(G, w) = \vartheta_2(G, w) = \vartheta_3(G, w) = \vartheta_4(G, w).$$

証明.  $w = \mathbf{0}$  のときは明らかに成り立つので  $w \neq \mathbf{0}$  について

$$\vartheta(G, w) \leq \vartheta_1(G, w) \leq \vartheta_2(G, w) \leq \vartheta_3(G, w) \leq \vartheta_4(G, w) \leq \vartheta(G, w)$$

を順番に示す.

$$(\vartheta(G, w) \leq \vartheta_1(G, w))$$

$x$  を線形関数  $w^t x$  を最大化する  $\text{TH}(G)$  のベクトルとし,  $(\mathbf{u}_i \mid i \in V)$  を  $G$  の任意の正規直交表現,  $\mathbf{c}$  を  $\|\mathbf{c}\| = 1$  を満たす任意のベクトルとすると

$$\vartheta(G, w) = \sum_{i \in V} w_i x_i \leq \left( \max_{i \in V} \frac{w_i}{(\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2} \right) \sum_{i \in V} (\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2 x_i \leq \max_{i \in V} \frac{w_i}{(\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2}$$

よって  $\vartheta(G, w) \leq \vartheta_1(G, w)$ .

$$(\vartheta_1(G, w) \leq \vartheta_2(G, w))$$

$\mathbf{A}$  を  $a_{ii} = 0 \forall i \in V, a_{ij} = 0 \forall (i, j) \notin E$  を満たす任意の対称行列として,  $\lambda$  を  $\mathbf{A} + \mathbf{W}$  の最大固有値とすると,  $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{W}) > 0$  より  $\lambda > 0$  である ( $\mathbf{A} + \mathbf{W}$  は実対称行列なので固有値はすべて実数). 次に行列  $\mathbf{B}$  を  $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{W})$  とすれば,  $\mathbf{B}$  の各固有値は  $\lambda - (\mathbf{A} + \mathbf{W})$  の固有値なので,  $\mathbf{B}$  の固有値はすべて非負, すなわち  $\mathbf{B}$  は半正定値行列にな

る。したがって、 $B = X^t X$  となる  $X \in R^{V \times V}$  が存在する。各  $i \in V$  に対応する  $X$  の列ベクトルを  $x_i$  とすれば、

$$x_i^t x_i = \lambda - w_i \quad \forall i \in V, \quad x_i^t x_j = -\sqrt{w_i w_j} \quad \forall (i, j) \notin E$$

でなければならない。一方、 $X$  は 0 を固有値として持つので非正則である。よって、すべての  $x_i$  に直交し、 $\|c\| = 1$  を満たす  $c \in R^V$  がとれる。各  $i \in V$  に対して

$$u_i = \sqrt{\frac{w_i}{\lambda}} c + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x_i$$

とすれば任意の  $i \in V$  については

$$u_i^t u_i = \frac{w_i}{\lambda} c^t c + \frac{1}{\lambda} x_i^t x_i = \frac{w_i}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} (\lambda - w_i) = 1,$$

$(i, j) \notin E$  である  $i, j$  については

$$u_i^t u_j = \frac{\sqrt{w_i w_j}}{\lambda} c^t c + \frac{1}{\lambda} x_i^t x_j = \frac{\sqrt{w_i w_j}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} (-\sqrt{w_i w_j}) = 0.$$

が成り立つ。よってこの  $(u_i \mid i \in V)$  は  $G$  の正規直交表現であり、 $\vartheta_1(G, w)$  の定義から

$$\vartheta_1(G, w) \leq \max_{i \in V} \frac{w_i}{(c^t u_i)^2} = \max_{i \in V} \frac{w_i}{w_i/\lambda} = \lambda = \Lambda(A + W).$$

$A$  は任意であったので、 $\vartheta_1(G, w) \leq \vartheta_2(G, w)$ .

$(\vartheta_2(G, w) \leq \vartheta_3(G, w))$

まず、

$$S = \{A \in R^{V \times V} \mid A: \text{対称}\}$$

$$\mathcal{L} = \{A \in S \mid a_{ii} = 0 \quad \forall i \in V, \quad a_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \notin E\}$$

$$M = \{B \in S \mid b_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in E\}$$

$$\mathcal{D} = \{A \in S \mid A: \text{半正定値}\}$$

とすれば、

$$\vartheta_2(G, w) = \min\{\Lambda(A + W) \mid A \in \mathcal{L}\}$$

$$\vartheta_3(G, w) = \max\{W \bullet B \mid \text{tr}(B) = 1, B \in M \cap \mathcal{D}\}$$

と書け、 $\mathcal{L}$  は線形空間  $S$  における線形部分空間をなし、 $M$  はその直交補空間である。また、 $\mathcal{D}$  は錐である。錐  $\mathcal{K} \subseteq S$  に対して、その極  $\mathcal{K}^*$  を

$$\mathcal{K}^* = \{B \in S \mid B \bullet A \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{K}\}$$

と定義すると, 明らかに

$$\mathcal{M}^* = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^* = \mathcal{M}$$

である. さらに, 任意の  $A, B \in \mathcal{D}$  について,  $A = XX^t$ ,  $B = YY^t$  と書けるような  $X, Y \in \mathbb{R}^{V \times V}$  が存在するので

$$A \bullet B = \text{tr}(A^t B) = \text{tr}(XX^t YY^t) = \text{tr}(Y^t XX^t Y) = (X^t Y) \bullet (X^t Y) \geq 0.$$

(これより  $A, B \in \mathcal{D}$  については  $A \bullet B = 0 \Leftrightarrow AB = 0$ .) また  $A \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$  に対しては,  $x^t A x < 0$  となる  $x \in \mathbb{R}^V$  が存在するので  $X = x x^t$  と定義すれば

$$X \in \mathcal{D} \text{ かつ } A \bullet X = x^t A x < 0.$$

よって

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$$

が成り立つ.

さて, 簡単のために,  $\vartheta_3 = \vartheta_3(G, \mathbf{w})$  と書くことにすると,  $\vartheta_3$  の定義から

$$W \bullet B \leq \vartheta_3 \cdot \text{tr}(B) = \vartheta_3 I \bullet B,$$

すなわち

$$(\vartheta_3 I - W) \bullet B \geq 0$$

が任意の  $B \in \mathcal{D} \cap \mathcal{M}$  について成立し,  $\vartheta_3 I - W \in (\mathcal{D} \cap \mathcal{M})^*$  を得る. ここで錐の極の性質から

$$(\mathcal{D} \cap \mathcal{M})^* = \mathcal{D}^* + \mathcal{M}^*.$$

よって,

$$\vartheta_3 I - W = D + A$$

を満たす  $D \in \mathcal{D}$  と  $A \in \mathcal{L}$  が存在しなければならない. よって,

$$D = \vartheta_3 I - (W + A)$$

は半正定値となり, その固有値はすべて非負, すなわち

$$\vartheta_3 \geq \Lambda(W + A) \geq \vartheta_2(G, \mathbf{w})$$

が成り立つ.

$$(\vartheta_3(G, \mathbf{w}) \leq \vartheta_4(G, \mathbf{w}))$$



$\vartheta_3 = \vartheta_3(G, \mathbf{w})$  として,  $B$  を  $\mathbf{W} \bullet B = \vartheta_3$  を達成するような  $\text{tr}(B) = 1$  を満たす  $\mathcal{D} \cap \mathcal{M}$  の行列とする. そうすると  $B$  は対称, 半正定値なので, 適当な  $Y \in \mathbf{R}^{V \times V}$  を用いて  $B = Y^t Y$  と表現できる. 各  $i \in V$  に対する  $Y$  の列ベクトルを  $\mathbf{y}_i$  ( $\mathbf{y}_i = Y \mathbf{e}_i$ ) と定義し,  $P = \{i \in V \mid \mathbf{y}_i \neq \mathbf{0}\}$  とおいて,  $i \in P$  に対しては,  $\mathbf{v}_i = \frac{1}{\|\mathbf{y}_i\|} \mathbf{y}_i$  ととり,  $i \in V \setminus P$  に対しては,  $\mathbf{v}_i$  を  $\|\mathbf{v}_i\| = 1, \mathbf{v}_i^t \mathbf{v}_j = 0 \ \forall j \neq i$  を満たすようにとる (このような  $\mathbf{v}_i$  は  $\{\mathbf{v}_i \mid i \in P\}$  の張る線形部分空間の直交補空間の正規直交基底を構成すれば得られる). そうすると,  $(i, j) \in E$  である任意の  $i, j$  について  $\mathbf{y}_i^t \mathbf{y}_j = b_{ij} = 0$  なので, このように得られた  $(\mathbf{v}_i \mid i \in V)$  は  $G$  の補グラフ  $\bar{G}$  の正規直交表現になっている. さらに,

$$(\mathbf{Y} \bar{\mathbf{w}})^t (\mathbf{Y} \bar{\mathbf{w}}) = \bar{\mathbf{w}}^t \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} \bar{\mathbf{w}} = B \bullet \mathbf{W} = \vartheta_3$$

なので  $\mathbf{d} = 1/\sqrt{\vartheta_3} \mathbf{Y} \bar{\mathbf{w}}$  とすれば  $\|\mathbf{d}\| = 1$ . さらに,  $i \in P$  に対しては

$$\mathbf{d}^t \mathbf{v}_i = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_3} \|\mathbf{y}_i\|} \bar{\mathbf{w}}^t \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} \mathbf{e}_i = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_3} \|\mathbf{y}_i\|} \bar{\mathbf{w}}^t B \mathbf{e}_i$$

が成り立つので

$$\sum_{i \in V} \|\mathbf{y}_i\| \sqrt{w_i} \mathbf{d}^t \mathbf{v}_i = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_3}} \sum_{i \in V} \bar{\mathbf{w}}^t B \mathbf{e}_i \sqrt{w_i} = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_3}} \bar{\mathbf{w}}^t B \bar{\mathbf{w}} = \sqrt{\vartheta_3}.$$

これに Cauchy-Schwarz の不等式を適用すると

$$\begin{aligned} \vartheta_3 &= \left( \sum_{i \in V} \|\mathbf{y}_i\| \sqrt{w_i} \mathbf{d}^t \mathbf{v}_i \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{i \in V} \|\mathbf{y}_i\|^2 \right) \left( \sum_{i \in V} w_i (\mathbf{d}^t \mathbf{v}_i)^2 \right) \\ &= \text{tr}(B) \left( \sum_{i \in V} w_i (\mathbf{d}^t \mathbf{v}_i)^2 \right) = \sum_{i \in V} w_i (\mathbf{d}^t \mathbf{v}_i)^2 \\ &\leq \vartheta_4(G, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

ゆえに

$$\vartheta_3(G, \mathbf{w}) \leq \vartheta_4(G, \mathbf{w}).$$

$$(\vartheta_4(G, \mathbf{w}) \leq \vartheta(G, \mathbf{w}))$$

$\vartheta_4(G, \mathbf{w})$  を実現する補グラフ  $\bar{G}$  の正規直交表現  $(\mathbf{v}_i \mid i \in V)$ ,  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^N$ , および  $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^N$ ,  $\|\mathbf{d}\| = 1$  を選び, 第  $i$ -成分が  $(\mathbf{d}^t \mathbf{v}_i)^2$  である  $n$ -ベクトルを  $\mathbf{x}$  とする. 以下では  $\mathbf{x} \in \text{TH}(G)$  を示す.

このためには, 任意の  $G$  の正規直交表現  $(\mathbf{u}_i \mid i \in V)$ ,  $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^N$  および,  $\|\mathbf{c}\| = 1$  である  $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^N$  に対して,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in V} (\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2 x_i &= \sum_{i \in V} (\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i)^2 (\mathbf{d}^t \mathbf{v}_i)^2 = \sum_{i \in V} (\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^t \mathbf{d})^2 = \sum_{i \in V} (\text{tr}(\mathbf{c}^t \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^t \mathbf{d}))^2 \\ &= \sum_{i \in V} (\text{tr}(\mathbf{d} \mathbf{c}^t \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^t))^2 = \sum_{i \in V} ((\mathbf{c} \mathbf{d}^t) \bullet (\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^t))^2 \leq 1 \end{aligned}$$

を示せばよい。各  $i \in V$  について  $N \times N$ -行列  $u_i v_i^t$  を考えると、

$$(u_i v_i^t) \bullet (u_j v_j^t) = \text{tr}((u_i v_i^t)^t (u_j v_j^t)) = \text{tr}(v_i u_i^t u_j v_j^t) = \text{tr}((u_i^t u_j)(v_j^t v_i))$$

となり、

$$(u_i v_i^t) \bullet (u_j v_j^t) = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

であることがわかる。これより、 $\{u_i v_i^t \mid i \in V\}$  に適当な  $N \times N$ -行列  $Z_{n+1}, \dots, Z_{N \times N}$  を加えて  $\mathbf{R}^{N \times N}$  の正規直交基底を構成することができる。そうすると、

$$cd^t = \sum_{i \in V} ((cd^t) \bullet (u_i v_i^t)) (u_i v_i^t) + \sum_{i=n+1}^{N \times N} ((cd^t) \bullet Z_i) Z_i$$

と表されるので、

$$(cd^t) \bullet (cd^t) \geq \sum_{i \in V} ((cd^t) \bullet (u_i v_i^t))^2$$

であるが、

$$(cd^t) \bullet (cd^t) = (c^t c)(d^t d) = 1.$$

よって、

$$\sum_{i \in V} (c^t u_i)^2 (d^t v_i)^2 = \sum_{i \in V} ((cd^t) \bullet (u_i v_i^t))^2 \leq ((cd^t) \bullet (cd^t))^2 = 1.$$

以上より

$$\vartheta_4(G, w) \leq \vartheta(G, w).$$

■

この定理から得られる重要な結果は

$$\vartheta(G, w) = \max\{W \bullet B \mid \text{tr}(B) = 1, b_{ij} = 0 \forall (i, j) \in E, B: \text{対称, 半正定値}\}$$

なので、Lovász 数  $\vartheta(G, w)$  を求める問題は SDP として定式化できることである。現在の技術レベルでは、これだけで十分で、 $\vartheta(G, w)$  を求めるのに楕円体法を用いる必要はないと思われるかもしれないが、この問題に対して、楕円体法は歴史的意義が大きいだけでなく、近似精度に関する議論も興味深いので、次節で簡単に説明することにする。

## 6 分離, 最適化と楕円体法

本説では, 一旦  $\vartheta(G, w)$  を離れ, 一般の凸な有界閉集合上で線形な関数を最大化する問題を考える.

$K \subseteq \mathbf{R}^n$  を空でない凸な有界閉集合とする.  $K$  に対して以下の2つの問題を考える.

(強い) 最適化

与えられた  $c \in \mathbf{R}^n$  に対して

$c^t y \geq c^t x \quad \forall x \in K$  を満たす  $y \in K$  を求める.

(強い) 分離

与えられた  $y \in \mathbf{R}^n$  に対して

$y \in K$  であるかどうかを判定し, そうでなければ  $c^t y > c^t x \quad \forall x \in K$  を満たす  $c \in \mathbf{R}^n$  を返す.

これらの問題に対して, 数学的な解は必ず存在するが, 扱っている  $K$  が一般の凸集合なので, その解が必ずしも有理であるとは限らない. 特に, 入力である  $c$  や  $y$  の有理性も仮定されていない. しかし, 現在の計算機は設計上, 有理数しか扱うことはできないので, このような問題は計算機上で解くことを考えると, 厳密ではない. そこで, この2つの問題をやや, 弱めた問題を扱うことにする:

弱い最適化

与えられた  $c \in \mathbf{Q}^n$ , および  $\epsilon > 0$  に対して

$$d(y, K) \leq \epsilon, \quad c^t y \geq c^t x - \epsilon \quad \forall x \in K$$

を満たす  $y \in \mathbf{Q}^n$  を求める.

弱い分離

与えられた  $y \in \mathbf{Q}^n$  に対して

(i)  $d(y, K) \leq \epsilon$  を返す, または

(ii)  $\|c\| \geq 1, c^t x \leq c^t y + \epsilon \quad \forall x \in K$  を満たす  $c \in \mathbf{Q}^n$  を返す.

ここで,  $\mathbf{Q}^n$  は要素がすべて有理数である  $n$  次元ベクトルの全体とし,  $d(y, K)$  はベクトル  $y$  と集合  $K$  間の距離, すなわち  $d(y, K) = \inf\{\|y - x\| \mid x \in K\}$  とする.

さらに, 計算機上でこれらの問題を扱うとき, 入力を正確に定義する必要があるが, アルゴリズムの都合上,  $K$  に関して,

- $K$  は有界で,  $K$  を含む球が既知
- $K$  は全次元的で,  $K$  に含まれる球が既知,

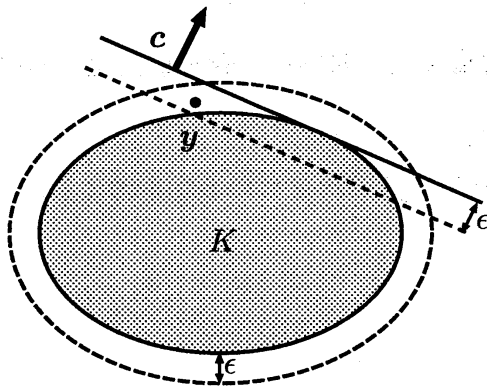


図 1: 弱い最適化

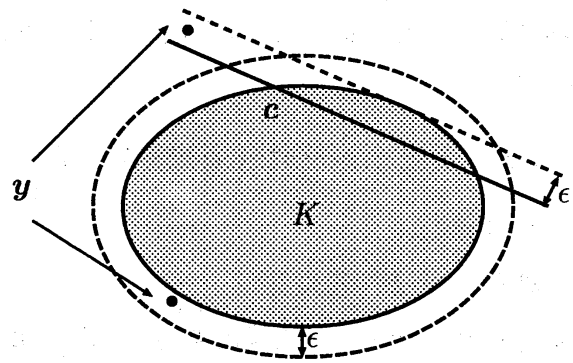


図 2: 弱い分離

すなわち,  $S(a, r)$  を点  $a$  を中心とする半径  $r$  の閉球:  $S(a, r) = \{x \mid \|x - a\| \leq r\}$  とすれば

$$S(a_0, r) \subseteq K \subseteq S(a_0, R)$$

であるような内点  $a_0 \in K$  および  $0 \leq r < R$  が与えられていると仮定し, 最適化問題の入力は  $(K, n, a_0, r, R)$ ,  $c \in \mathbb{Q}^n$ ,  $\epsilon > 0$  と定義する (分離問題の入力は  $(K, n, a_0, r, R)$ ,  $y \in \mathbb{Q}^n$ ,  $\epsilon > 0$  となる). また, その入力の長さはビット数,

$n + \log r + \log R + \log \epsilon + a_0$  のビット数 +  $c$  のビット数 +  $K$  を表現するために必要なビット数 で定義する.

例 4.  $K$  がグラフ  $G = (V, E)$  に対する  $\text{TH}(G)$  とすれば,  $\text{TH}(G)$  は  $(\mathbb{R}^n)$  の単位シンプレックスを含み, 単位立方体に含まれるので,

$$a_0 = \left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)^t, r = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, R = \frac{n}{n+1}\sqrt{n}$$

とでき,  $\text{TH}(G)$  はグラフ  $G$  が表現できれば十分である (平方根は一般には有理ではないので実際には  $r, R$  にはラウンディングした数を用いる).

次に弱い最適化問題を解くための楕円体法について, 簡単に説明する (詳細部分については [7, 8] 参照.) この中では,  $K$  に対して弱い分離問題を解く手続きがあると仮定し, それを用いるが, 最も重要な結果は

$K$  に対する弱い分離が ( $K$  の入力ビット数に関する) 多項式時間で解ける

$\Rightarrow K$  に対する弱い最適化が ( $K$  の入力ビット数に関する) 多項式時間で解ける

ことである。

$E \subseteq \mathbf{R}^n$  が楕円体であるとは、以下の条件を満たす  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ , および対称な正定値  $n \times n$ -行列  $A$  が存在することである:

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{a})^t A^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 1\}.$$

$\mathbf{a}$  は  $E$  の中心と呼ばれる。また、 $\mathbf{R}^n$  における単位球の体積を  $V_n$  とすれば、 $E$  の  $\mathbf{R}^n$  における体積は  $\sqrt{\det(A)} V_n$  である。

楕円体はすべて、原点を中心とする単位球  $S(\mathbf{0}, 1)$  の全単射的なアフィン変換による像である。実際、 $A^{1/2}$  を  $A^{1/2} A^{1/2} = A$  を満たす (一意的な) 行列とすれば、

$$E = A^{-1/2} S(\mathbf{0}, 1) + \mathbf{a}.$$

したがって、楕円体上で線形関数を最適化するベクトルは解析的に求めることができる。また、 $E$  をその中心  $\mathbf{a}$  を通る超平面で2分したとき、任意の半分を含むような (体積最小の) 楕円体も解析的に求めることができる。

楕円体法の幾何的な概略は以下の通りである。

#### 楕円体法の概略

入力:  $(K, n, \mathbf{a}_0, r, R), \mathbf{c} \in \mathbf{Q}^n, \epsilon > 0$

出力:  $d(\mathbf{y}, K) \leq \epsilon, \mathbf{c}^t \mathbf{y} \geq \mathbf{c}^t \mathbf{x} - \epsilon \forall \mathbf{x} \in K$  を満たす  $\mathbf{y} \in \mathbf{Q}^n$

ステップ 0:  $E_0 = S(\mathbf{a}_0, R), \mathbf{x}_0 = \mathbf{a}_0, \alpha_0 = \mathbf{c}^t \mathbf{a}_0, k = 0$

ステップ  $k$ : 以下のものが得られているとする:

$\alpha_k$ : 暫定値

$K_k = \{\mathbf{x} \in K \mid \mathbf{c}^t \mathbf{x} \geq \alpha_k\}$  ( $K_k$  は実際に計算する必要はない)

$E_k$ :  $K_k$  を含む楕円体

$\mathbf{x}_k$ :  $E_k$  の中心

$(K, n, \mathbf{a}_0, r, R), \mathbf{x}_k, \delta > 0$  に対して弱い分離問題を解く;

ケース 1:  $\max\{\mathbf{d}^t \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in K\} \leq \mathbf{d}^t \mathbf{x}_k + \delta$  を満たす  $\mathbf{d} \in \mathbf{Q}^n, \|\mathbf{d}\| \geq 1$  が出力されたとき

( $\mathbf{x}_k$  と  $K$  が “ほとんど分離された” とき)

$E_k$  を超平面:  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{d}^t \mathbf{x} = \mathbf{d}^t \mathbf{x}_k\}$  で2分する;

$K$  が含まれる方の半分を含む新しい楕円体  $E_{k+1}$  を求め、 $k = k + 1$ ;

ケース 2:  $d(\mathbf{x}_k, K) \leq \delta$  と出力されたとき

( $\mathbf{x}_k$  が  $K$  に “ほとんど含まれる” とき)

$E_k$  を超平面:  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{c}^t \mathbf{x} = \mathbf{c}^t \mathbf{x}_k\}$  で2分する;

$K_k$  が含まれる方の半分を含む新しい楕円体  $E_{k+1}$  を求め、

$$\alpha_{k+1} = \max\{c^t x_k, \alpha_k\} \text{ として } k = k + 1;$$

$k > N$  ならば

$$j = \operatorname{argmax}\{c^t x_k \mid 0 \leq k \leq N, d(x_k, K) \leq \delta \text{ と出力された}\} \text{ として } x_j \text{ を返す};$$

ただし,  $N, \delta$  は

$$N = 4n^2 \left\lceil \log \frac{2R^2 \|c\|}{r\epsilon} \right\rceil, \quad \delta = R^2 4^{-N},$$

とし, また

$$p = 5N$$

とおく.

上の概略の中で,  $E_k$  を定める正定値行列を  $A_k$  とすると, 明らかに  $A_0 = R^2 I$  である.

さらに, ベクトル  $a$  を, 入力を  $(K, n, a_0, r, R), x_k, \delta > 0$  と与えた分離問題の出力結果が  $d(x_k, K) \leq \delta$  のとき  $a = c, \max\{d^t x \mid x \in K\} \leq d^t x_k + \delta$  を満たす  $d \in Q^n, \|d\| \geq 1$  であるときは  $a = -d$  と定め,  $A_k^*, x_k^*$  を

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\sqrt{a^t A_k a}} A_k a \quad (x_k + b_k \text{ は } E_k \text{ 上で } a \text{ を最大化するベクトル}) \\ x_k^* &= x_k + \frac{1}{n+1} b_k \\ A_k^* &= \frac{2n^2 + 3}{2n^2} \left( A_k - \frac{2}{n+1} b_k b_k^t \right) \end{aligned}$$

とすれば,  $A_k^*, x_k^*$  で定められる楕円体は  $K_k$  が含まれる  $E_k$  の半分を含む体積最小の楕円体をわずかに“ふくらませた”ものである ( $A_k^*$  の係数を  $\frac{2n^2+3}{2n^2}$  でなく,  $\frac{n^2}{n^2-1}$  とすれば最小のものになる).  $A_{k+1}, x_{k+1}$  をそれぞれ  $A_k^*, x_k^*$  の二進表現の少数点以下第  $p$  位をラウンディングしたものとすると (そのとき,  $A_{k+1}$  は対称になるように注意する), 以下の補題が成り立つ.

補題 6.1 ([7]): 行列  $A_0, \dots, A_N$  はすべて正定値である. また,

$$\|x_k\| \leq \|a_0\| + R2^k, \|A_k\| \leq R^2 2^k, \|A_k^{-1}\| \leq R^{-2} 4^k.$$

ここで, 行列  $A$  に対して,  $\|A\| = \max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}$ .

この補題より,  $E_k$  を定義する  $A_k, x_k$  の桁数が入力に関する多項式であることが分かる.

補題 6.2 ([7]):  $\frac{E_{k+1} \text{ の } R^n \text{ における体積}}{E_k \text{ の } R^n \text{ における体積}} < e^{\frac{1}{5n}}$ .

補題 6.3 ([7]): 各  $k = 0, \dots, N$  に対して  $E_k \supseteq K_k$ .

定理 6.4 ([7]):  $j = \operatorname{argmax}\{c^t x_k \mid 0 \leq k \leq N, d(x_k, K) \leq \delta \text{ と出力された}\}$   
 とすると  $c^t x_j \geq \max\{c^t x \mid x \in K\} - \epsilon$ .

これらすべてを合わせると,

- $x_k$  を多項式回計算すれば, 弱い最適化問題の解が得られる.
- ベクトル  $a$  が多項式時間で計算可能ならば  $x_k, A_k$  は多項式時間で計算可能である.

これより, 弱い分離問題が多項式時間で解ければ, 楕円体法を用いて, 弱い最適化問題が多項式時間で解けることがわかる. さらに, 極 (双対) やアンチブロッカーの議論を用いると, 以下の定理

定理 6.5 ([7]):  $K$  に対する弱い分離が ( $K$  の入力ビット数に関する) 多項式時間で解ける  
 $\iff K$  に対する弱い最適化が ( $K$  の入力ビット数に関する) 多項式時間で解ける

が示せるが, ここでは主張を述べるだけにとどめて, 再び  $\vartheta(G, w)$  に話しを戻す.

## 7 $\vartheta(G, w)$ に対する分離

前節より凸な有界閉集合  $K$  に対して

$$S(a_0, r) \subseteq K \subseteq S(a_0, R)$$

を満たす内点  $a_0 \in K$  および  $0 \leq r < R$  が既知ならば,  $K$  上の弱い分離問題が多項式時間で解ければ,  $K$  上の弱い最適化問題を多項式時間で解くことができる.  $\vartheta(G, w)$  について,

$$\vartheta(G, w) = \max\{W \bullet B \mid \operatorname{tr}(B) = 1, b_{ij} = 0 \forall (i, j) \in E, B: \text{対称, 半正定値}\}$$

であるが,  $w$  は非負なので,

$$\vartheta(G, w) = \max\{W \bullet B \mid \operatorname{tr}(B) \leq 1, b_{ij} = 0 \forall (i, j) \in E, B: \text{対称, 半正定値}\}.$$

ここで,  $\{B \in \mathbf{R}^{V \times V} \mid \operatorname{tr}(B) \leq 1, b_{ij} = 0 \forall (i, j) \in E, B: \text{対称, 半正定値}\}$  は対角線の下, および  $(i, j) \in E$  である  $(i, j)$ -成分を無視すれば,  $(n^2 + n(n+1)/2 - |E|)$ -次元の全次元で凸な有界閉集合となる. さらに,  $S(B_0, r)$  がこれに含まれ,  $S(B_0, R)$  がこれを含むような内点  $B_0$  および  $r, R$  で桁数が  $|V|$  の多項式であるようなものも求めることができる. したがって,  $(n^2 + n(n+1)/2 - |E|)$ -次元のこの集合に対して弱い分離問題が解ければ  $\vartheta(G, w)$  を多項式時間で求めることができる.

$\mathbf{b}$  を  $(n^2 + n(n+1)/2 - |E|)$ -次元の任意の (有理) ベクトルとし, これを  $n \times n$ -対称行列に“復元”したものを  $\mathbf{B} = (b_{ij})$  とする. ( $E$  の要素に相当する  $i, j$  については  $b_{ij} = 0$ ).  $\text{tr}(\mathbf{B}) > 1$  ならば分離問題は自明に解けるので ( $\mathbf{I} \bullet \mathbf{A} \leq 1$  が分離超平面になる),  $\mathbf{B}$  が半正定値であるかどうかを判定し, そうでなければ (弱い意味で) 分離する超平面が多項式時間で見つければ良い.

今,  $\text{rank}(\mathbf{B}) = k$  であるとし,  $\mathbf{B}'$  を  $\text{rank}(\mathbf{B}') = k$  である  $\mathbf{B}$  の  $k \times k$ -主部分行列とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \text{ が半正定値} &\Leftrightarrow \mathbf{B}' \text{ が正定値} \\ &\Leftrightarrow \det \mathbf{B}_t = \det(b_{ij})_{\substack{i=1, \dots, t \\ j=1, \dots, t}} > 0 \quad t = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

したがって, 与えられた  $\mathbf{B}$  が半正定値であるかどうかの判定は多項式時間で可能である. さらに,  $\mathbf{B}'$  が正定値でないとき,

$$\begin{aligned} t &= \min\{j \mid \det \mathbf{B}_j \leq 0\} \\ p_i &= \begin{cases} (-1)^i \cdot \mathbf{B}_t \text{ の第 } (i, t) \text{ 小行列式} & i \leq t \text{ のとき} \\ 0 & i > t \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

と定義して,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^t$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{p}\mathbf{p}^t$  とすれば任意の半正定値行列  $\mathbf{Y}$  に対しては

$$\mathbf{P} \bullet \mathbf{Y} = \mathbf{p}^t \mathbf{Y} \mathbf{p} \geq 0,$$

が成り立ち,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \bullet \mathbf{B} &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^t p_i p_j b_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^t p_j \sum_{i=1}^t (-1)^i b_{ij} \cdot \mathbf{B}_t \text{ の第 } (i, t) \text{ 小行列式} \\ &= \sum_{j=1}^t p_j (-1)^j \cdot \det(\mathbf{B}_t \text{ の第 } j \text{ 列を第 } t \text{ 列に置きかえた行列}) \\ &= (-1)^t \cdot (-1)^t \mathbf{B}_t \text{ の第 } (t, t) \text{ 小行列式} \cdot \det(\mathbf{B}_t) \\ &= \det(\mathbf{B}_{t-1}) \cdot \det(\mathbf{B}_t) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, 任意の  $\epsilon > 0$  に対する弱い分離問題が多項式時間で解ける.

最後に  $\vartheta(G, \mathbf{w})$  を  $\epsilon$  で近似する方法について述べる.

$$\vartheta(G, \mathbf{w}) = \max\{\mathbf{W} \bullet \mathbf{B} \mid \text{tr}(\mathbf{B}) = 1, b_{ij} = 0 \forall (i, j) \in E, \mathbf{B} : \text{対称, 半正定値}\}$$



であるが、行列  $W = (w_{ij})$  は  $w_{ij} = \sqrt{w_i w_j}$  なので、まず、これを近似しなければならない。  $W' = (w'_{ij}) \in Q^{n \times n}$  を

$$|w'_{ij} - \sqrt{w_i w_j}| < \frac{\epsilon}{n^2}, \quad W' : \text{対称}$$

となるようにとれば

$$|\vartheta(G, w) - \max\{W' \bullet B \mid \text{tr}(B) = 1, b_{ij} = 0 \forall (i, j) \in E, B : \text{対称, 半正定値}\}| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ。

これは、  $B^*, \bar{B}$  をそれぞれ  $\{B \mid \text{tr}(B) = 1, b_{ij} = 0 \forall (i, j) \in E, B : \text{対称, 半正定値}\}$  の中で  $W \bullet B, W' \bullet B$  を最大化するものとしてとれば

$$W' \bullet \bar{B} - W \bullet B^* \leq (W' - W) \bullet \bar{B}, \quad W \bullet B^* - W' \bullet \bar{B} \leq (W - W') \bullet B^*,$$

となるので

$$|(W - W') \bullet B| < \epsilon/2, \quad \forall B : \text{tr}(B) = 1, b_{ij} = 0 \forall (i, j) \in E, B : \text{実対称, 半正定値}$$

を示せばよいが、  $B$  を対称な半正定値行列とすれば、

$$2b_{ij} + b_{ii} + b_{jj} \geq 0, \quad -2b_{ij} + b_{ii} + b_{jj} \geq 0 \quad (\forall i, j : i \neq j), \quad b_{ii} \geq 0 \quad (\forall i)$$

が成り立ち、これに  $\text{tr}(B) = 1$  を合わせると

$$|b_{ij}| \leq \frac{1}{2} \quad \forall i, j : i \neq j$$

を得るので

$$|(W - W') \bullet B| \leq \sum_{i,j} |\sqrt{w_i w_j} - w'_{ij}| |b_{ij}| < \frac{\epsilon}{n^2} \sum_{i,j} |b_{ij}| = \frac{\epsilon}{n^2} \left( \sum_{i,j:i \neq j} |b_{ij}| + \sum_i b_{ii} \right) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

したがって、

$$\max\{W' \bullet B \mid \text{tr}(B) = 1, b_{ij} = 0 \forall (i, j) \in E, B : \text{対称, 半正定値}\}$$

が精度  $\epsilon/2$  で近似できれば  $\vartheta(G, w)$  を精度  $\epsilon > 0$  で近似することができる。

ここで、  $G$  がパーフェクトで  $w \in Z^n$  であるならば、

$$\vartheta(G, w) = \max\{w^t x \mid x \in \text{STAB}(G)\}$$

なので、  $\vartheta(G, w)$  は整数値となり、  $\epsilon = 1/2$  ととって、得られた (弱い) 最適値を最も近い整数にラウンディングすれば、  $\vartheta(G, w)$  を厳密に求めることができる。

さらに、各頂点  $i \in V$  に対して  $G_{-i}$  を  $G$  から  $i$ , および  $i$  に接続する枝すべてを除いたグラフ、 $w_{-i}$  を  $w$  の  $V - i$  への制限とすると

$$\vartheta(G_{-i}, w_{-i}) < \vartheta(G, w) \Leftrightarrow \text{最適解は必ず } i \text{ を含む}$$

なので、 $S = \emptyset$  から出発し、

$$\vartheta(G_{-i}, w_{-i}) = \vartheta(G, w) \Rightarrow G := G_{-i}$$

$$\vartheta(G_{-i}, w_{-i}) < \vartheta(G, w) \Rightarrow S := S \cup \{i\}, G := G \text{ から } i, \text{ および } i \text{ に隣接する頂点を除いたグラフ}$$

を  $G$  の頂点がなくなるまで繰り返せば最大重みの安定集合も多項式時間で構成することができる。

## 8 おわりに

ここで紹介した結果が発表されたのは、実に15年前のことであるが、パーフェクトグラフ上の最大安定集合問題については、多くの研究者が力を注いでいるにもかかわらず、未だにSDPを用いた手法以外は知られていない。つまり、組合せ最適化問題でありながら、純粹に代数的な方法に頼らなくてはならないのである。これは、組合せ最適化の研究に携わる者として、気になることではあるが、しかし、これは逆にLovászの結果やSDPの強力さを象徴していることとも解釈できる。現在、急速な発展を遂げているSDPの分野において、このような応用がさらに発見されれば、と思う。

## 参考文献

- [1] Berge, C. (1961), "Färbung von Graphen deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind (Zusammenfassung)," in *Wissenschaftliche Zeitschrift*, 114–115, Martin Luther Universität Halle–Wittenberg.
- [2] Berge, C. (1962), "Sur une conjecture relative au problème des codes optimaux," in *Communication, 13ème assemblée générale de l'URSI*.
- [3] Ford, L. R. and Fulkerson, D. R. (1956), "Maximal flow through a network," *Canadian Journal of Mathematics*, 8, 399–404.
- [4] Frank, A. (1976), "Some polynomial algorithms for certain graphs and hypergraphs," in *Proceedings of the 5th British Combinatorial Conference*, (Nash-Williams, J. A. and Sheehan, J., eds.).

- [5] Fulkerson, D. R. (1970), "The perfect graph conjecture and pluperfect graph theorem," in *Proceedings of the Second Chapel Hill Conference on Combinatorial Mathematics and Its Applications*, (Bose, R. C. et al., ed.), 171–175, University of North Carolina.
- [6] Gavril, F. (1972), "Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques and maximum independent set of a chordal graph," *SIAM J. Comput.*, **1**, 180–187.
- [7] Grötschel, M., Lovász, L. and Schrijver, A. (1981), "The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization," *Combinatorica*, **1**, 169–197.
- [8] Grötschel, M., Lovász, L. and Schrijver, A. (1988), *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag.
- [9] Kuhn, H. W. (1955), "The Hungarian method for the assignment problem," *Naval Research Logistics Quarterly*, **2**, 83–97.
- [10] Lovász, L. (1972), "Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture," *Discrete Mathematics*, **2**, 253–267.
- [11] Lovász, L. (1979), "On the Shannon capacity of a graph," *IEEE Transactions on Information Theory*, **25**, 1–7.
- [12] Minty, G. J. (1980), "On maximal independent sets of vertices on claw-free graphs," *J. Combin. Theory, Ser. B*, **28**, 284–304.