

# 積分不可能系の離散化 :非平衡統計力学的側面と計算論的側面

梅野 健

理化学研究所国際フロンティア研究システム

情報表現研究チーム

〒 351-01 埼玉県和光市広沢 2-1

E-mail: chaosken@giraffe.riken.go.jp

<http://www.bip.riken.go.jp/irl/chaosken/chaosken.html>

## 1 はじめに

いわゆる”良い離散化”の指標として、元の方程式の可積分性を保つかどうかというものがあるが、この”良い離散化’の Ansatz により、近年数々の可積分方程式の非自明な可積分性を保存する離散化スキームが研究されてきた。なかでもこの研究会の1つの探求テーマである”そのような可積分性を保存する離散化はなんらかの良い計算アルゴリズムになっているのではないか”というテーゼ [5] は、本質的に新しい視点であり、今まで発見法的にアルゴリズムを研究してきた計算機科学サイドのアルゴリズム屋にとっては、重要な挑戦と受けとって良い。本稿では、この可積分性に着目するだけでなく、ある非可積分 (カオス) でかつ不変測度を保存する離散時間力学系である解けるカオスを構成することにより、有効な計算アルゴリズムを構築できることを示す。この結果と *Integrable Sciences* [5] の上記テーゼを合わせると、“力学系と有機的関係を持つ良いアルゴリズムとは、力学系の何らかの対称性 (保存量、保測性、可逆性等) を保存する離散化と関係する”というより広い意味のテーゼが示唆される。

## 2 不変測度を保存する離散化と可積分性

“不変測度”という概念は、力学系のほとんどすべての問題と関わってくる。ハミルトン系では、不変測度はリュービル測度であり、その不変測度を計算し、種々の物理量を計算することは、統計力学の中心テーマといってよい。近年そのリュービル測度のもつ不変性である Symplectic 性を保存するような数値スキーム (離散化法) が多くの研究者によって開発されてきた [21]。さてこの Symplectic Difference Schemes は可積分、非可積分を問わず有効であるが、その可積分性との関係で次ことが Ge と Marsden によりわかっている [2, 16] “エネルギーを保存すべき非可積分ハミルトン系では、Symplectic な時間の離散化をおこなった場合、必ずエネルギー保存則が敗れる。”このエネルギー保存則と Symplectic 性は、物理系の満たさねばならぬ特徴でありその意味するところは、非可積分系の数値シミュレーションは、実質上不可能であるということである。この Symplectic 性と非可積分系のシミュレーションとの関係は、ユニタリー性と量子非可積分系のシミュレーションとの関係に自然に拡張でき [18], ユニタリー性を保存するような離散時間機械系とは、Feynman, Deutsch の量子コンピュータに他ならないので、この結果は一種の量子コンピュータの計算 (不) 可能性と (非) 可積分性との関わりを示すものである [17]。このように古典系、量子系を問わず、アルゴリズムの世界の概念である計算可能性と力学系の複雑さの指標である可積分性との間に一般的な関係が成立することが分かる [19]。また計算可能性か否かの決定問題は、積分可能か否かの決定問題と同様

### 3 エルゴード性とアルゴリズム

に一般に非自明となる [9, 11]。そしてその関係は、中村氏の言う *Integrable Sciences* [5] が力学系との関係を持つアルゴリズムの中で、ある重要なクラスを形成していることの根拠を与えられる。では、もう一つの極である非可積分性に起因する良いアルゴリズムは、ないのだろうか。それによって、*Non-integrable Sciences* と称されるようなアルゴリズムのクラスはないだろうか。ここでは保存量を持つという性質を保つ離散化 (可積分系離散化) を考える代わりに、保存量がまったくない非可積分な力学系のみ持つエルゴード性に着目し、そのエルゴード的な不変測度を保存する離散力学系を考え、カオス (非可積分系) と良いアルゴリズムとの接点を探る。

## 3 エルゴード性とアルゴリズム

ある決定論的方程式

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (1)$$

に従う物理量  $x_n \in M$  に対し、不変測度  $\mu(dx)$  が存在し、次式

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q(x_i) = \int_M Q(x) \mu(dx) \quad (2)$$

が成立する時、その決定論方程式はエルゴード性を持つという。これは、相空間  $M$  上の不変測度  $\mu(dx)$  に関する関数  $Q(x)$  の積分が、 $Q(x_i)$  の時間積分に等しいことを意味する。このエルゴード性をうまく使った計算アルゴリズムの重要な例としては、物理量の期待値等を計算するのに欠かせないアルゴリズムであるモンテカルロ法 [4] があるが、それは主に式 (2) の右辺にでてくる空間積分の評価を、考えている問題の不変測度を生成する確率ダイナミクスを構成し、計算が比較的易しい時間積分に置き換えることによって成功した計算アルゴリズムである。そのようなアルゴリズムでは、不変測度が陽に式で表現されていないと、式 (2) の右辺の空間積分が何を計算していることになるのかが不明で意味なさない。

そこで、ここでは力学系と不変測度の関係を陽に求めることができる力学系のクラスを構成し、又そのクラスがどこまで拡張可能であるかを探る。ここではそのようなクラスを解けるカオスと呼ぶ。以下では、最近著者によって与えられた最大限一般化した解けるカオス [16] のクラスをまず紹介し、次にその陽なエルゴード性 (2) を使った単位区間上の任意の関数を積分する新しい計算アルゴリズムを紹介する。

## 4 陽な不変測度を持つエルゴード写像

この論文では簡単のため、相空間を単位区間  $M = [0, 1] \equiv I$  とする。 $I$  上の解けるカオスとして有名なのは、自明な例である一様分布を与えるテント写像を除いて、Ulam=Neumann 写像 [6]

$$x_{n+1} = F(x_n) = 4x_n(1 - x_n) \quad (3)$$

がある。

上記の写像は、

$$x_n = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\theta_n\right), x_{n+1} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\theta_{n+1}\right) \quad (4)$$

#### 4 陽な不変測度を持つエルゴード写像

のように変数変換すると  $\sin$  関数の加法定理より、次式

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\theta_{n+1}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}2\theta_n\right) \quad (5)$$

が成立し、これは  $\theta_n$  にテントマップ

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= 2\theta_n, & 0 \leq \theta_n \leq \frac{1}{2} \\ \theta_{n+1} &= 2 - 2\theta_n, & \frac{1}{2} \leq \theta_n \leq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

を施したものが  $\theta_{n+1}$  に等しいことを意味する。このテントマップの不変測度は  $I \equiv [0, 1]$  上のルベーグ測度そのものである。つまり、確立密度関数  $\rho_{Tent}(\theta) = 1, \theta \in I$  となる。  $x$  と  $\theta$  には

$$\theta = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{x} \quad (7)$$

という  $\theta$  が  $x$  に対して 1 対 1 に対応し、又微分可能であるという関係があるので、ルベーグ測度に絶対連続な不変測度  $\rho(x)$  が良く知られた次式

$$\rho(x) = \rho_{Tent}(\theta) \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \quad (8)$$

で陽に与えられることがわかる。この Ulam=Neumann 写像以外にも、桂と福田によって与えられたエルゴード写像の 1 パラメータ族

$$F(x) = \frac{4x(1-x)(1-k^2x)}{(1-k^2x^2)^2} \quad (9)$$

がある [3]。その不変測度は最近になって

$$\rho(x) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2K(k)\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}, \quad (10)$$

の様で得られた [10] のでこの力学系のクラスも解けるカオスである。但し、  $0 \leq k < 1$  で  $K(k)$  は次式

$$K(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad (11)$$

で与えられる。明らかに  $k = 0$  は、Ulam=Neumann 写像に相当する。

著者は上述の Ulam=Neumann(1947)、桂=福田(1985)の写像を特殊な例として含む、更に一般化したエルゴード写像とその陽な不変測度を持つ力学系のクラス (2 パラメータ族) を発見した [12, 13, 14, 16]。その時間発展を決める式は次式

$$F(x) = \frac{4x(1-x)(1-lx)(1-mx)}{1 - 2(l+m+lm)x^2 + 8lmx^3 + (l^2 + m^2 - 2lm - 2l^2m - 2lm^2 + l^2m^2)x^4} \quad (12)$$

で与えられる [16]。但し、  $-\infty < l, m < 1$ 。明らかに  $m = 0$  の場合、

$$F(x) = \frac{4x(1-x)(1-lx)}{(1-lx^2)^2} \quad (13)$$

#### 4 陽な不変測度を持つエルゴード写像

となるので桂=福田写像となり  $k^2 = l$ 、更に  $l = m = 0$  の場合 Ulam=Neumann 写像となるので、この力学系は Ulam=Neumann(1947), 桂=福田(1985) の写像を一般化したものとなっている。更にこの一般化された Ulam=Neumann 写像の不変測度は

$$\rho(x) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2K(l, m)\sqrt{x(1-x)(1-lx)(1-mx)}} \quad (14)$$

の様に陽に2個の数  $l, m$  でパラメトライズされた形で求めることができる [10] ので、この一般化は解けるカオスのクラス的一般化ともなっている。但し、 $K(l, m)$  は、

$$K(l, m) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-lu^2)(1-mu^2)}} \quad (15)$$

で与えられる実数である。これらの解けるカオスはリアプノフ指数が  $\log 2$  で、記号力学によって定まる力学系のゼータ関数そのものは Neumann=Ulam 写像のもの [7] と同じであることから非一様な不変測度の滑らかさは同一のものと考えてよい。重要なことは、このリアプノフ指数が  $\log 2$  で、かつ  $F(x)$  が変数  $x$  の有理式で与えられる解けるカオスのクラスは、それが有理写像のクラスの場合これ以上一般化不可能であることが示された [16] ことである。以下に簡単に説明しよう。

Ulam=Neumann 写像が解けるカオスであった鍵は  $\sin$  関数の加法公式と  $\sin$  関数の周期性にあった。 $\sin$  関数の逆関数が次式

$$\sin^{-1}(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad (16)$$

で与えられることに着目し、そのヤコビの楕円関数、genus(=  $g \geq 2$ ) の超楕円関数への一般化を、次の逆関数

$$sn^{-1}(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad (17)$$

$$s^{-1}(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-lu^2)(1-mu^2)}}, \quad (18)$$

により考えることができる。桂=福田写像は、 $sn(x)$  の2倍角の公式 [20]

$$sn(2\theta) = \frac{2sn(\theta)\sqrt{(1-sn^2(\theta))(1-k^2sn^2(\theta))}}{1-k^2sn^4(\theta)} \quad (19)$$

において、

$$x_n = sn^2(K(k)\theta), x_{n+1} = sn^2(2K(k)\theta) \quad (20)$$

の様に変数変換することによって再現する。ところが、関数  $f$  が、ある有理整関数  $G$  に対して、常に

$$G(f(\theta_1 + \theta_2), f(\theta_1), f(\theta_2)) = 0 \quad (21)$$

なる関係式を満足する時、 $f$  は代数的加法性を持つというが、この代数的加法性を持つ必要十分条件は、 $f(x)$  自身が変数  $x$  の有理式、 $\sin$  関数などの  $e^{ix}$  の有理式、又は楕円関数のうちどれかに限るという Weierstrass の定理がある。これが、この加法公式を用い

## 5 任意の積分を評価するカオス計算

て解けるカオスを求める方法の限界を与える。この限界がどのクラスかを探るため、まず任意の楕円関数が次で与えられる Weierstrass の楕円関数  $\wp(x)$

$$\left(\frac{d\wp(x)}{dx}\right)^2 = 4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3 \quad (22)$$

の有理式でかけることに着目する。つまり、Weierstrass の楕円関数  $\wp(x)$  は楕円関数の標準系を与えていると考えてよい。楕円関数は 2 つの基本周期を持つが、今は実の基本周期を持つクラスを考えているので、(22) の右辺が

$$4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3 = 4(\wp(x) - e_1)(\wp(x) - e_2)(\wp(x) - e_3) \quad (23)$$

の様に、実数である  $e_1, e_2, e_3$  に対して分解できることが必要である [20]。但し、ここでは  $e_3 < e_2 < e_1$  とする。又、常に、

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (24)$$

が成立するので、この Weierstrass の楕円関数  $\wp(x)$  は、実質上実数である 2 パラメータ  $g_2, g_3$  で特徴づけられる。この時、

$$\Delta \equiv g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 > 0 \quad (25)$$

という条件がつく。さて、一見超楕円関数に見える (18) が、変数変換  $u^2 \equiv v$  によって、

$$s^{-1}(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-lu^2)(1-mu^2)}} = \int_0^{x^2} \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)(1-lv)(1-mv)}}, \quad (26)$$

のように変数  $v$  にとっては、楕円関数になる。これは 19 世紀によく調べられた超楕円関数の楕円関数への縮退という現象であるが、そのことによって、上の  $s(x)$  が代数的加法性を持つことがわかる。更に、Weierstrass の楕円関数  $\wp(x)$  のパラメータの  $e_1, e_2, e_3 (= -e_1 - e_2)$  と  $s(x)$  のパラメータである  $l, m$  は適当な変数変換 [16] を考えることによって、次の様な 1 対 1 の関係

$$e_1 = \frac{2-l-m}{3}, e_2 = \frac{2l-m-1}{3}, e_3 = \frac{2m-l-1}{3} \quad (27)$$

で結ばれている。但し、 $1 > l > m$  の時に、 $e_1 > e_2 > e_3$  となる。よってこの  $s(x)$  の加法公式を考えることは、全ての実基本周期を持つ楕円関数の加法公式を考えることと等価である。よっていままでの議論から、この  $s(x)$  の加法公式を求めて作られた、解けるカオスのクラス (12) は、これ以上一般化できない最大のものであることがわかった [16]。この議論により、より一般の量子化されたリアブノフ指数  $\lambda = \log p$  ( $p: 2$  以上の自然数) を持つ Chebyshev 多項式に対応する写像 [1] (例えば  $\lambda = \log 3$  の場合は、Cubic 写像  $Y = X(3 - 4X)^2$ ) に対して、それを 2 パラメータ  $l, m$  で変形させたより一般の写像 (Cubic 写像に対してはその deformation である一般化された Cubic 写像  $Y = F_{l,m}^3(X)$ ) が、上の  $s(x)$  の  $p$  倍角の公式により得られる。 $Y = F_{l,m}^3(X)$  に対応する詳細の式は、付録 1. に載せる。

## 5 任意の積分を評価するカオス計算

さて、Weierstrass の楕円関数  $\wp(x)$  は、実の基本周期

$$\omega_1(g_2, g_3) = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} \quad (28)$$

## 参考文献

を持つが、実は不変測度 (15) の係数に現われる  $K(l, m)$  に一致する。エルゴード性の帰結である

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_n) = \rho(x) \quad (29)$$

を用いると、経験測度 (式 (29) の左辺) から、測度 0 の例外集合以外のほとんどすべての初期値から、不変測度  $\rho(x)dx$  の係数  $K(l, m)$  がこの解けるカオス (12) を用いて

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(x_i) = \int_0^1 G(x)\rho(x)dx = \frac{1}{2K(l, m)} \quad (30)$$

のように計算できることになる [13, 15]。但し、 $G(x)$  は次式

$$G(x) = \sqrt{x(1-x)(1-lx)(1-mx)} = \frac{1}{2\rho(x)K(l, m)} \quad (31)$$

を満たす代数式とする。この  $K(l, m)$  は、Weierstrass の楕円関数  $\rho(x)$  の実の基本周期に等しいので、パラメータ  $l, m$  を動かすことによって、実の基本周期を持つ全ての楕円関数の実の基本周期  $\omega_1$  を計算することが可能となる。

さてこの一般の式  $A(x)$  の単位区間上の積分を  $I(A)$  とすると、この積分は

$$I(A) = 2K(l, m) \cdot \int_0^1 A(x)G(x)\rho(x)dx = \frac{\langle AG \rangle_\rho}{\langle G \rangle_\rho} \quad (32)$$

とこの不変測度  $\rho(x)dx$  によって求めることができる。但し、任意の関数  $B(x)$  に対して、

$$\langle B \rangle_\rho = \int_0^1 B(x)\rho(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N B(x_i) \quad (33)$$

であり、実際に計算する時には、 $N$  を有限にとめることになる。図 1.-図 4. は、解けるカオスであり、その不変測度は図 5 の様になる。そのような解けるカオスを使った上記計算アルゴリズムとモンテカルロ法とを比較したのが図 6.-図 7. である。どちらもモンテカルロ法より、収束が早く、もちろん計算スピードも 1 ステップごとに乱数を発生しなければならないモンテカルロ法より、有理式で書き表されるカオスを使った方が早いので、スピード、誤差の両方から良いアルゴリズムと考えることができる [13, 15]。以上の結果により、非線形非可積分系 (解けるカオス) においても、陽なエルゴード不変測度を保存する離散力学系を考えると、それに対応する良いアルゴリズムが考えられることが分かった。

### 謝辞

この研究を進めていく上で理化学研究所基礎科学特別研究員制度により補助を受けました。また理化学研究所国際フロンティア研究システム情報処理グループ甘利俊一ディレクターには、常日頃のアドバイスに感謝します。

## 参考文献

- [1] ADLER, R.L. and T.J. RIVLIN, "Ergodic and mixing properties of Chebyshev polynomials", *Proc. Am. Math. Soc.* **15** (1964):794-796.

## 参考文献

- [2] GE, Z. and J.E. MARSDEN, "Lie-Poisson Hamilton-Jacobi theory and Lie-Poisson integrators," *Phys. Lett. A* **133** (1988):134-139.
- [3] KATSURA, S. and W. FUKUDA, "Exactly solvable models showing chaotic behavior", *Physica* **130 A**(1985): 597-605.
- [4] METROPOLIS, N., A.W. ROSENBLUTH, M.N. ROSENBLUTH, A.H. TELLER, and E. TELLER, "Equations of state calculations by fast computing machines", *J. Chem. Phys.* **21**(1953):1087-1092.
- [5] NAKAMURA, Y. "アルゴリズム, 情報幾何, 非線形可積分系", 数理解析研究所講究録 **889**(1994):1-18; "非線形可積分系", 数理科学 No. **384**(1995):24-29.
- [6] ULAM, S.M. and J. VON NEUMANN, "On combination of stochastic and deterministic processes", *Bull. Am. Math. Soc.* **53**(1947) 1120.
- [7] UMENO, K. and M. SUZUKI, "A singular zeta function at the onset of chaos", *Phys. Lett.* **A177**(1993)311-315.
- [8] UMENO, K. and M. SUZUKI, "Symplectic and intermittent behaviour of Hamiltonian flow", *Phys. Lett.* **A181**(1993),387-392.
- [9] UMENO, K. "積分不可能性判定条件", 数理科学 No.**384**(1996):30-36.
- [10] UMENO, K. "力学系における不変測度の推定", 信学技報 NC**96-13**(1996):23-28.
- [11] UMENO, K. "Non-perturbative non-integrability of non-homogeneous nonlinear lattices induced by non-resonance hypothesis", *Physica D* **94**(1996): 116-134; **solv-int/9603012**.
- [12] UMENO, K. "Generalized Ulam-Neumann difference equations and statistics", at the *International Workshop of Symmetries and Integrability of Difference Equations II* held in Canterbury, England(July 5, 1996).
- [13] UMENO, K. "ウラム=ノイマン写像の一般化とその超並列計算への応用:如何にエルゴード性を利用するか", 電気学会情報処理研究会資料 **IP-96-18**(1996):61-70.
- [14] UMENO, "K. Generalized Ulam-Neumann maps and their explicit invariant measures", in Proc. of 1996 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA'96), p.p.449-p.p.552, Technical Report No. **RIKEN-BIP-96-0009**.
- [15] UMENO, K. "Parallel computation using generalized models of exactly solvable chaos", (1996), Technical Report No. **RIKEN-BIP-96-0007**, **chao-dyn/9610008**, to appear in *RIKEN Review* No.14(1996, December).
- [16] UMENO, K. "The maximal family of exactly solvable chaos", (1996), Technical Report No. **RIKEN-BIP-96-0008**, **chao-dyn/9610009**.
- [17] UMENO, K. "Simulating quantum non-integrable systems with quantum computers", Extended Abstract accepted for the *Physics and Computation 96*, Technical Report No. **RIKEN-BIP-96-0011**, to appear in *InterJournal*.

## 参考文献

- [18] UMENO, K. "Integrability and Computability in Simulating Quantum Systems", submitted to the Plenum Press (New York) for *Proc. of Quantum Measurement and Communication 96* quant-ph/9610007.
- [19] UMENO, K. "力学系におけるフレーム問題 計算可能性と積分可能性", 物性研究 Vol.65, No.5(1996):856-864.
- [20] WHITTAKER, E.T. and G.N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*(Cambridge University Press, 1935).
- [21] YOSHIDA, H. "シンプレクティック数値積分法", 数理科学 No.384(1995):37-46.

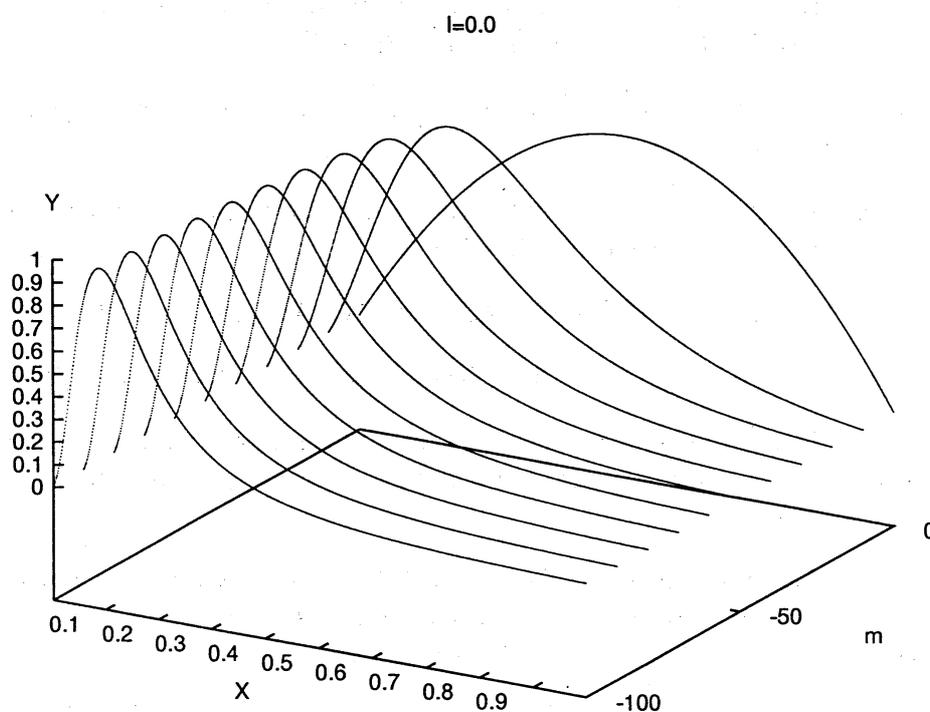


図 1:一般化 Ulam-Neumann 写像 (12)、但し  $(l, m) = (0, 0), (0, -10), \dots, (0, -100)$ .

## 参考文献

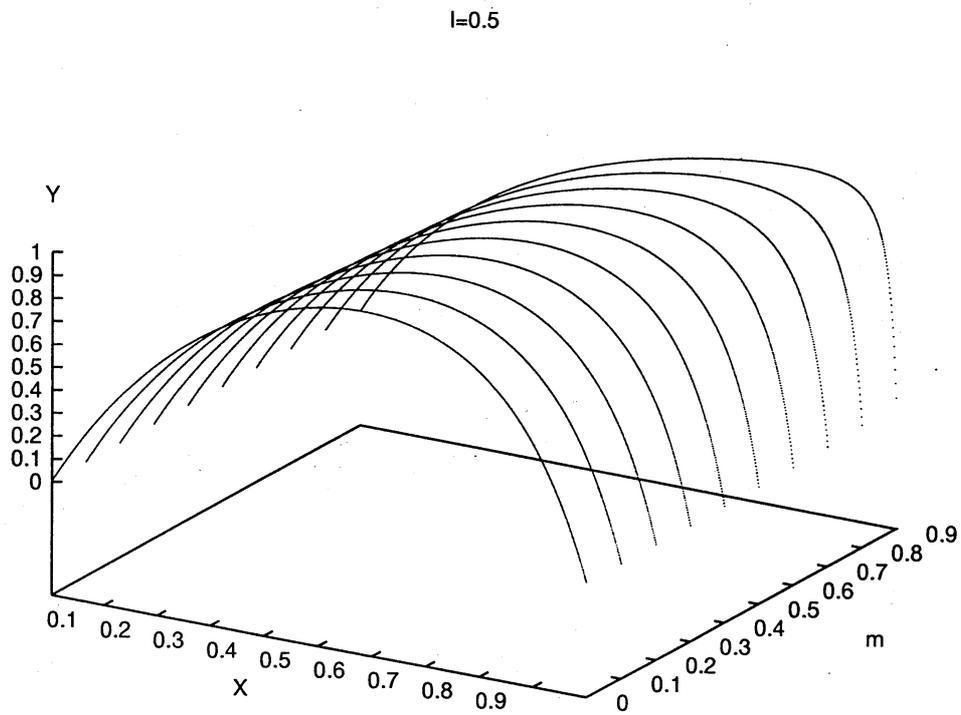


图 2: 一般化 Ulam-Neumann 写像 (12)、但し  $(l, m) = (0.5, 0), (0.5, 0.1), \dots, (0.5, 0.9)$ .

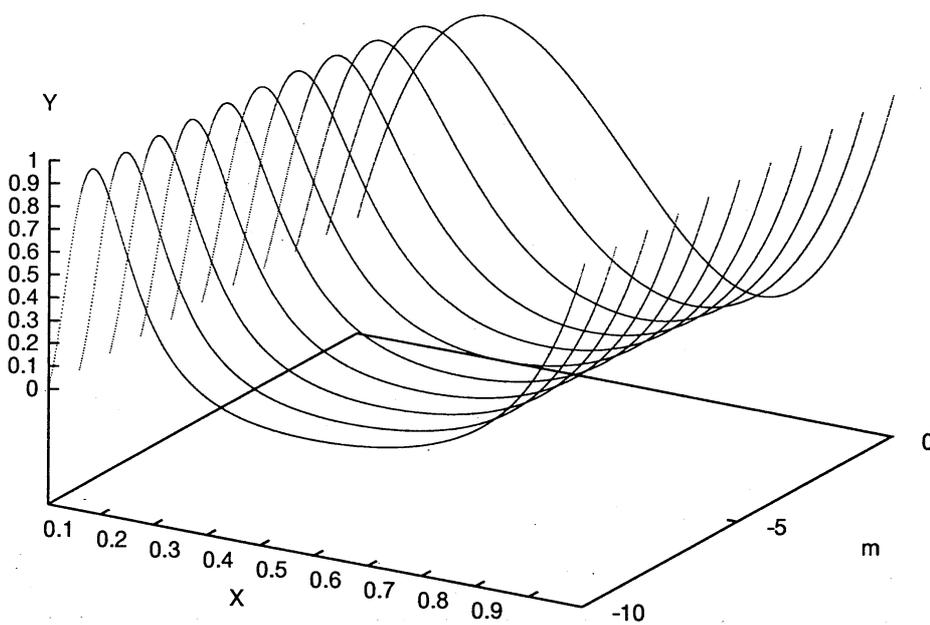


图 3: 一般化 Cubic 写像 (付録 1.)、但し  $(l, m) = (0, 0), (0, -1), \dots, (0, -10)$ .

## 参考文献

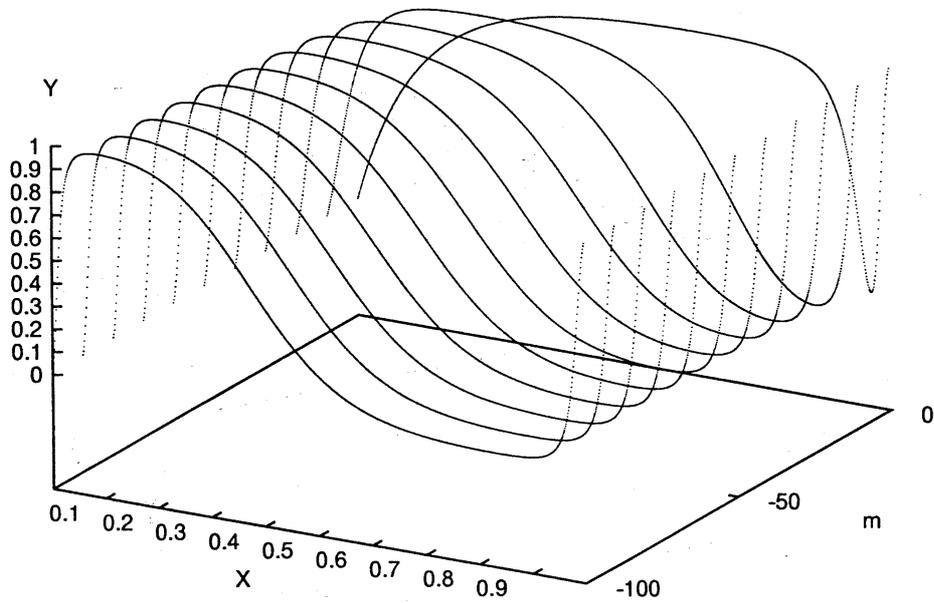


図 4: 一般化 Cubic 写像 (付録 1.), 但し  $(l, m) = (0.98, 0), (0.98, -10), \dots, (0.98, -100)$ .

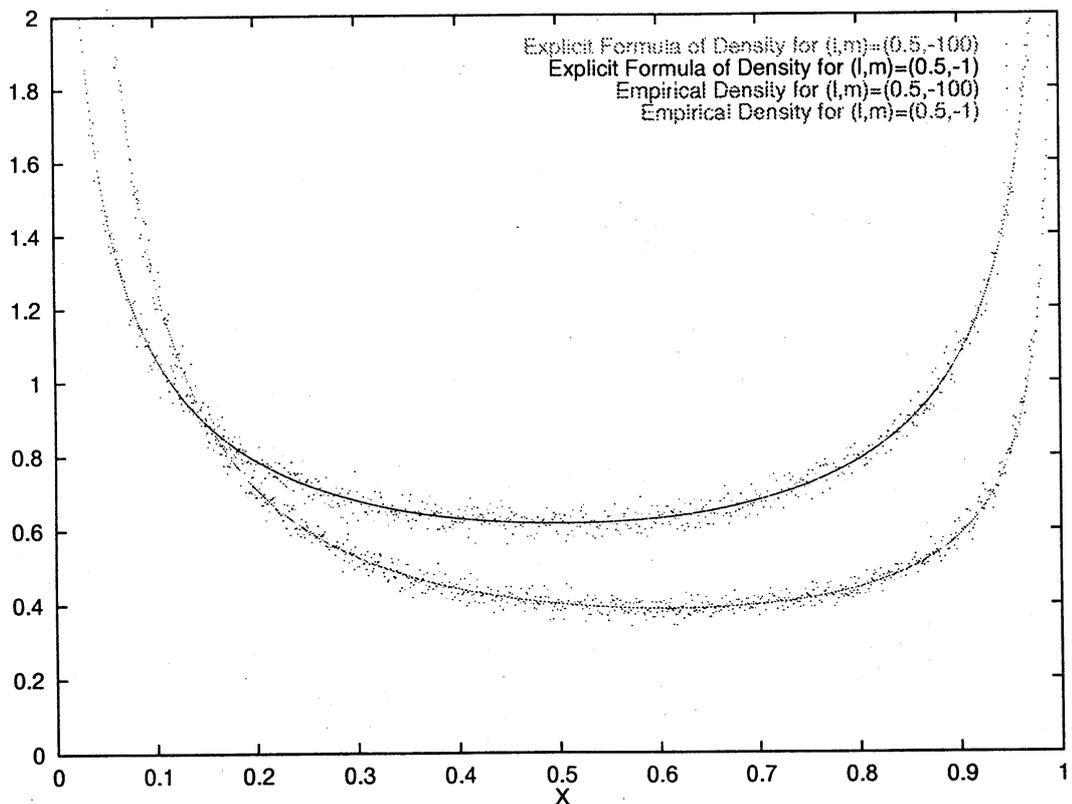


図 5: シミュレーションによる経験測度と不変測度の解析解 (14) との比較。

## 参考文献

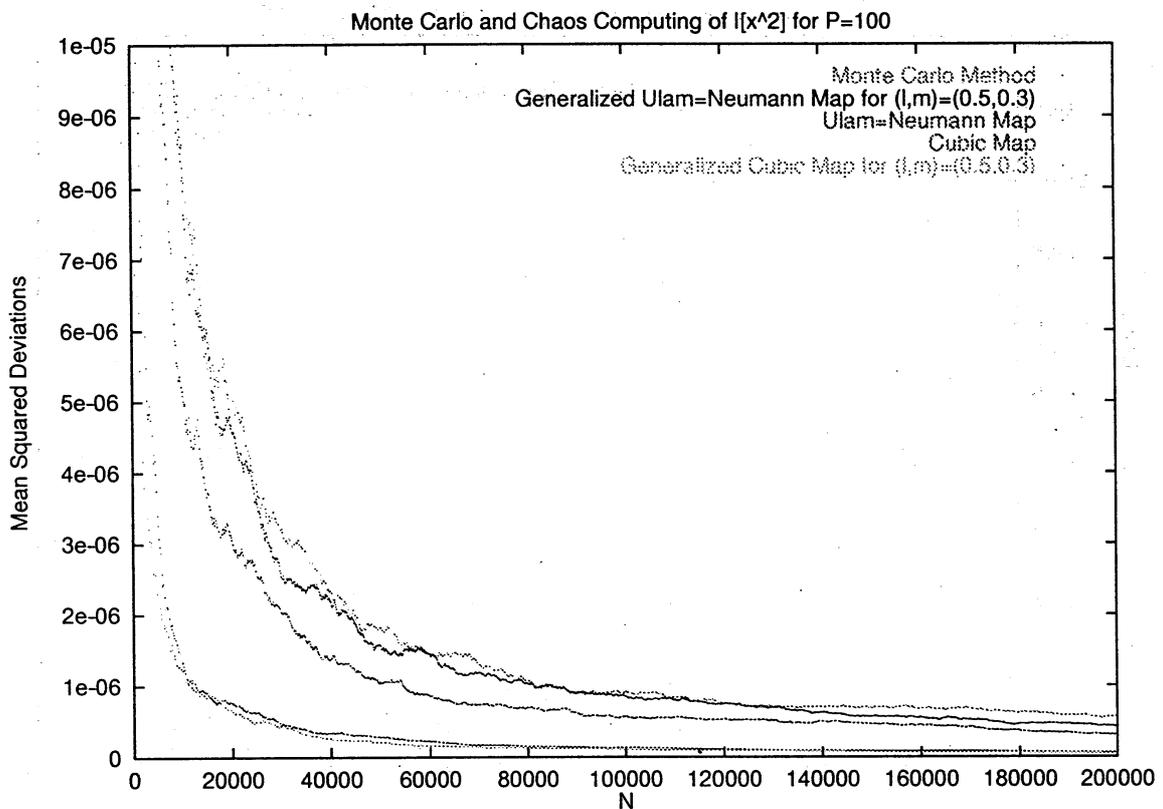


図6: モンテカルロ法とカオス計算(32)による積分  $I(x^2) = \frac{1}{3}$  の評価誤差 (Mean Squared Deviations) と時間  $N$ . 良い順番で、Generalized Cubic Map for  $(l, m) = (0.5, 0.3)$ , Cubic Map, Ulam=Neumann Map, Generalized Ulam=Neumann Map for  $(l, m) = (0.5, 0.3)$ , 一様乱数を使った Monte Carlo Method となる。誤差評価は  $P = 100$  個の独立な試行に対し、平均した。

## 参考文献

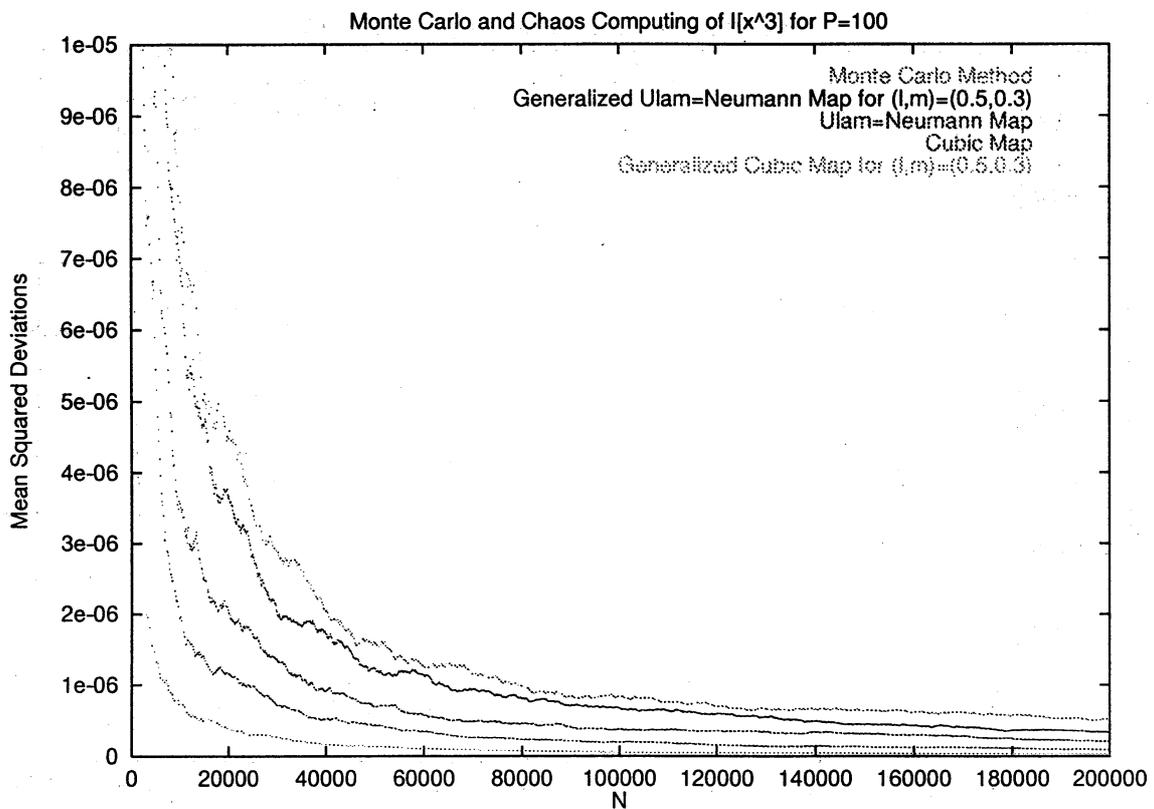


図7: モンテカルロ法とカオス計算 (32) による積分  $I(x^3) = \frac{1}{4}$  の評価誤差 (Mean Squared Deviations) と時間  $N$ . 良い順番で、Generalized Cubic Map for  $(l, m) = (0.5, 0.3)$ , Cubic Map, Ulam=Neumann Map, Generalized Ulam=Neumann Map for  $(l, m) = (0.5, 0.3)$ , 一様乱数を使った Monte Carlo Method となる。誤差評価は  $P = 100$  個の独立な試行に対し、平均した。

```

Out[22]= (u Power[-3 + 4 u + 4 l u + 4 m u - 6 l u2 - 6 m u2 - 6 l m u2 +
12 l m u3 + l2 u4 - 2 l m u4 - 2 l2 m u4 + m2 u4 - 2 l m u4 +
l2 m u4, 2]) /
(1 - 12 l u2 - 12 m u2 - 12 l m u2 + 8 l u3 + 8 l2 u3 + 8 m u3 +
120 l m u3 + 8 l2 m u3 + 8 m2 u3 + 8 l m u3 + 30 l u4 - 156 l m u4 -
156 l2 m u4 + 30 m2 u4 - 156 l m u4 + 30 l2 m u4 - 48 l u5 -
48 l3 u5 + 96 l m u5 + 168 l2 m u5 + 96 l3 m u5 - 48 m2 u5 +
168 l2 m u5 + 168 l2 m u5 - 48 l3 m u5 - 48 m3 u5 + 96 l m u5 -
48 l2 m u5 + 16 l2 u6 + 68 l3 u6 + 16 l4 u6 - 32 l m u6 -
68 l2 m u6 - 68 l3 m u6 - 32 l4 m u6 + 16 m2 u6 - 68 l m u6 -
216 l2 m u6 - 68 l3 m u6 + 16 l4 m u6 + 68 m3 u6 - 68 l m u6 -
68 l2 m u6 + 68 l3 m u6 + 16 m4 u6 - 32 l m u6 + 16 l2 m u6 -
24 l u7 - 24 l4 u7 + 24 l2 m u7 - 24 l3 m u7 + 24 l4 m u7 +
24 l m u7 + 96 l2 m u7 + 96 l3 m u7 + 24 l4 m u7 - 24 m u7 -
24 l m u7 + 96 l2 m u7 - 24 l3 m u7 - 24 l4 m u7 - 24 m u7 +
24 l m u7 + 24 l2 m u7 - 24 l3 m u7 + 9 l u8 + 12 l m u8 +
12 l4 m u8 - 42 l2 m u8 - 12 l3 m u8 - 42 l4 m u8 + 12 l m u8 -
12 l2 m u8 - 12 l3 m u8 + 12 l4 m u8 + 9 m u8 + 12 l m u8 -
42 l2 m u8 + 12 l3 m u8 + 9 l m u8 - 8 l m u9 + 8 l m u9 +
8 l4 m u9 + 8 l2 m u9 - 16 l m u9 + 8 l m u9 - 8 l m u9 +
8 l2 m u9 + 8 l3 m u9 - 8 l m u9)

```

付録 1. Mathematica で求めた Generalized Cubic Map  $F_{l,m}^3(u)$