数理解析研究所講究録
1006 巻 1997 年 81-84

はめ込み up to cobordism について

弘前大学理学部　菊地茂樹　(SHIGEKI KIKUCHI)

1. 序

1970 年代初めに Brown[8,9], Liulevicius[15] 等によって, *immersion up to cobordism* の概念が導入された. それに関連した話題についてまとめてみようと思う.

Whitney のはめ込み定理 [24] と Smale-Hirsch 理論によって, 多様体のユークリッド空間へのはめ込みに関する多くの結果が, 特性類, (コ) ホモロジー論, K-理論等を主な道具として, 1960-70 年代に得られた. (例えば, Gitler[11] を参照.) その後, 表題の概念が導入されたが, 今日尚, 色々な面に応用があるように思われる. (例えば, Kikuchi and Saeki[14] を参照.) 古い話の短い復習とともに, その流れを追ってみる. 簡単のため, すべて C^∞ カテゴリーで考え, 多様体はコンパクトであるとする.

2. SMALE-HIRSCH 理論

Graustein and Whitney[22] による次の定理が, Smale-Hirsch 理論の始まりである.

定理 2.1. 円周から平面へのはめ込み $f, g: S^1 \to R^2$ が正則ホモトープである必要十分条件は, それらの回転数が一致することである.

Smale[18] はこの定理を次の様に一般化した.

k球面から n 次元ユークリッド空間へのはめ込み $f, g: S^k \to R^n (k < n)$ が, 基点を保つはめ込みであるとは, S^kの基点 p において, f, g およびその微分 df, dg が等しいときをいう. すると, f, g は p の近傍 U で一致しているとして良く, $S^k - U$ は k 球 D^k だから, これの k 枠場を固定しておくと, この場によって, f と g は D^k から Stiefel 多様体 $V_{n,k}$ への写像で, D^k の境界で一致しているものを誘導する. それらを境界で貼り付けて, S^k から Stiefel 多様体 $V_{n,k}$ への写像が得られ, そのホモトピー類として $\Omega(f, g) \in \pi_k(V_{n,k})$ が定義される.

定理 2.2. 基点を保つはめ込み $f, g: S^k \to R^n (k < n)$ が基点を保って正則ホモトープである必要十分条件は, $\Omega(f, g) = 0$ となることである.

Hirsch[12] はこれを次の様に一般化した.

定理 2.3. m 次元多様体から n 次元多様体へのはめ込み $f, g: M^m \to N^n (m < n)$ が正則ホモトープである必要十分条件は, それらの微分 $df, dg: T(M^m) \to T(N^n)$ がホモトープであることである. ここで, $T(M^m), T(N^n)$ は M^m, N^n の接ベクトル束, df, dg は微分によって誘導される単射束写像である.

この定理から次の定理が出て来る.

定理 **2.4.** 多様体 M^m がユークリッド空間 $R^{n+r}(m<n)$ に法 r 場をもってはめ込まれるならば, M^m は R^n にはめ込まれる.

この定理によって, 1960 年代以降に色々な多様体（射影空間,Dold 多様体等々）のユークリッド空間へのはめ込みに関する多くの結果が障害理論, K-理論等を使って得られた. それらの結果に関するリストのひとつは Gitler[11] である. 尚, 足立 [1] には 1980 年頃までの埋め込みとはめ込みの理論の発展の様子が詳しく書かれている.

3. はめ込み UP TO COBORDISM

最適はめ込み問題, すなわち,「与えられた m 次元多様体 M に対して, M^m が R^{m+k} にはめ込まれるような最小の自然数 k を決定すること」が Hirsch 以後, 盛んに研究された. 1970 年代になって Brown[8,9] や Liulevicius[15] がはめ込みを同境理論と結びつけて考えた.

m 次元多様体 M^m に同境な m 次元多様体 N^m が存在して, N^m は R^n にはめ込まれるとき, M^m は R^n に **up to cobordizm** ではめ込まれるという.

ここで, 閉（コンパクトで境界を持たない) m 次元多様体 M^m が閉多様体 N^m に**同境である**とはコンパクト $(m+1)$ 次元多様体 W^{m+1} が存在して, その境界が M^m と N^m の非交和になっているときをいう (Thom[20]).

次の定理は Brown[8,9] による.

定理 **3.1.** 任意の m 次元多様体 M^m は $R^{2m-\alpha(m)}$ に *up to cobordism* ではめ込まれる. ここで, $\alpha(m)$ は m の *2* 進展開における *1* の個数を表す.

この結果は「任意の m 次元多様体 M^m は $R^{2m-\alpha(m)}$ にはめ込まれる」という, はめ込み予想の解決への指針 (E.H.Brown and Peterson[4,5,6] 等とともに) になっている. 実際に, この予想は Cohen[10] によって 1985 年に肯定的に解決された. このことから, 問題を *up to cobordizm* で弱めて考えることは有効な方法のひとつである, ということが分かる.

次に Liulevicius[15] について復習する.

MO を直交群の Thom スペクトラム [20] とすると, コンパクト m 次元多様体の同境類は

$$\pi_m(MO)=\varinjlim_n \pi_{n+m}(MO(n))$$

の元に対応している. $\lambda_k:\pi^{st}_{m+k}(MO(k))\to\pi_m(MO)$ を帰納的極限への自然な写像とする. ただし, st は安定ホモトピーを表す. $x\in\pi_m(MO)$ が m 次元多様体 M^m の同境類を表しているとき, M^m が R^{m+k} にはめ込まれる多様体 N^m に同境であるための必要十分条件は, x が λ_k の像になっていることである.

[15] の結果のひとつは,

定理 **3.2.** $m=2^r-2, 4\leq r$ のとき, $[RP^m]\in Image\lambda_k$ ならば, $2\leq k$ である.

であり, これは Adams[2] の結果を使って証明されてる.

定理 3.2 を使って, Brown[7] は次を証明した.

定理 **3.3.** M^m が R^{m+1} にはめ込まれるならば, M^m は境界多様体であるか, RP^0, RP^2 または RP^6 に同境である.

Stong[19] は次の結果を得ている.

定理 **3.4.** 向き付け可能な多様体 $M^m(m>0)$ が R^{m+2} にはめ込まれるならば, M^m は向き付け可能でない多様体の境界である.

定理 **3.5.** M^m が R^{m+2} にはめ込まれていて, 境界多様体でないならば, ある整数 $0 \leq p \leq q$ に対して, M^mは $RP^{2^{p+1}-2} \times RP^{2^{q+1}-2}$ に同境である.

余次元 3 のはめ込み up to cobordizm に関するいくつかの結果が Kikuchi[13] と Stong[19] にある.

4. Z_2-はめ込みと折り目のトポロジーについて

この節では, Bix[3] の Z_2-同変はめ込みに関する結果と §3 の結果と折り目のトポロジーへの関連について述べる.

σを m 次元実射影空間 RP^mへの対合で

$$\sigma([x_0, x_1, \cdots, x_m]) = [-x_0, x_1, \cdots, x_m, \quad [x_0, x_1, \cdots, x_m] \in RP^m.$$

によって定義されるものとし, (R^n, τ) を自明な対合 τ をもった n 次元ユークリッド空間とする.

Bix[3] は

定理 **4.1.** 各自然数 m に対して, 自然数 n をどのようにとっても, (RP^m, σ) は (R^n, τ) に Z_2-同変はめ込み不可能である.

を証明し, さらに

定理 **4.2.** どんな自然数 n に対しても, Z_2-多様体 (RP^2, σ) は, *up to* Z_2-同変 *cobordism* でさえ, (R^n, τ) に Z_2-同変はめ込み不可能である.

を証明した. この結果を「任意の m 次元コンパクト多様体 $(m>1)$ は $2m-1$ 次元ユークリッド空間にはめ込み可能である」という Whitney のはめ込み定理と比較すると, 同変はめ込みでは様子が全く異なっていることが分かる.

最後に折り目のトポロジーに関する Kikuchi and Saeki[14] の結果について述べる.

$f : M^m \to R^p$ $(m \geq p)$ を閉 m 次元多様体 M^m から p 次元ユークリッド空間への滑らかな写像とする. f の特異点 $q \in M$ が **指数 λ の折り目の特異点**であるとは, 点 q と $f(q)$ のまわりの局所座標系によって, f が次の標準形:

$$\begin{aligned} y_i \circ f &= x_i \qquad (1 \leq i \leq p-1) \\ y_p \circ f &= -x_p^2 - \cdots - x_{p+\lambda-1}^2 + x_{p+\lambda}^2 + \cdots + x_m^2, \end{aligned}$$

に表されるときをいう. ここで, $0 \leq \lambda \leq m-p+1$ は整数である. $\lambda = 0$ または $m-p+1$ のときは, qを**定値折り目特異点**という.

定理 **4.3.** 閉 m 次元多様体 M^m 上に, 定値折り目特異点のみをもつ滑らかな写像 $f : M^m \to R^p$ $(m \geq p)$ が存在するならば, M^mは境界多様体である. さらに, M^m が向き付け可能ならば, 向き付け可能多様体の境界である.

定理 **4.4.** M^m をオイラー数が奇数の閉 m 次元多様体とする. M^m 上に折り目特異点のみをもつ滑らかな写像 $f : M^m \to R^p$ $(m \geq p)$ が存在するならば, $p = 1, 3$ または 7 である.

これらの定理は f の特異点集合 $S(f) = \{q \in M; \mathrm{rank}\ df_q < p\}$ が M の $(p-1)$ 次元閉多様体であること, および $f|S(f) : S(f) \to R^p$ が余次元 1 のはめ込みであることから得られる. 尚, 特異点に関するさらに進んだ解説が, 親切な参考文献のリスト付きで, 佐伯 [16] にある.

REFERENCES

1. 足立 正久, 埋め込みとはめ込み, 岩波書店, 1984.
2. Adams J. F., *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. **72** (1960), 20–104.
3. Bix M., *Ph.D.Thesis*, University of Chicago (1974).
4. Brown E. H. Jr. and Peterson F. P., *Relations among characteristic classes I*, Topology 3 (1964), 39–52.
5. ———, *On immersions of n-manifolds,*, Adv. in Math. **24** (1977), 74–77.
6. ———, *A universal space for normal bundles of n-manifolds*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 405–430.
7. Brown R. L. W., *A note on immersions up to cobordism*, Illinois J. Math. **21** (1977), 240–241.
8. ———, *Immersions and embeddings up to cobordism*, Canadian J. Math. **23** (1971), 1102–1115.
9. ———, *Imbeddings,immersions,and cobordism of differentiable manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 763–766..
10. Cohen R. L., *The immersion conjecture for differentiable manifolds*, Ann. of Math. **122** (1985), 237–328.
11. Gitler S., *Immersion and embedding of manifolds*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **22** (1971), 87–96.
12. Hirsch M. W., *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 242–276.
13. Kikuchi S., *Codimension three immersions up to cobordism*, Sci. Rep. Hirosaki Univ. **27** (1980), 1–5.
14. Kikuchi S. and Saeki O., *Remarks on the topology of fold*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 905–908.
15. Liulevicius A., *Immersions up to cobordism*, Illinois J. Math. **19** (1975), 149–164.
16. 佐伯 修., 微分可能写像の大域的特異点理論の現状と展望, 数学 **48** (1996), 385–399.
17. Smale S., *Regular curves on Riemannian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 492–512.
18. ———, *Classifications of immersions of spheres in Euclidean space*, Ann. of Math. **69** (1959), 327–344.
19. Stong R., *Manifolds which immerse in small codimension*, Illinois J. Math. **27** (1983), 182–223.
20. Thom R., *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17–86.
21. Whitney H., *The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space*, Ann.of Math. **45** (1944), 220–246.
22. ———, *On regular closed curves in the plane*, Compositio Math. **4** (1937), 276–284.
23. ———, *On the topology of differentiable manifolds, Lectures in Topology*, University of Michigan Press (1941), 101–141.
24. ———, *Singularities of a smooth n-manifold in (2n-1)-space*, Ann.of Math. **45** (1944), 247–293.
25. ———, *Differentiable manifolds*, Ann.of Math **37** (1936), 645–680.