数理解析研究所講究録
1007 巻 1997 年 161-172

2重非心F分布のパーセント点の近似について

鳥越　規央　(東海大・理)

1.はじめに

本論において2重非心F分布のパーセント点の近似式を，最近，提案された非心 t 分布等のパーセント点の近似式の考え方([A95], [AST95], [To96])を基に，カイ統計量の線形結合による統計量の分布の Cornish-Fisher 展開によって導出し，従来の近似式との比較検討を行う.

まず，独立な2つの確率変数 X_1 ，X_2 の分布をそれぞれ自由度 ν_1, 非心度 λ_1 の非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu_1, \lambda_1)$ ，自由度 ν_2, 非心度 λ_2 の非心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu_2, \lambda_2)$ とすると

$$F_{\nu_1,\nu_2,\lambda_1,\lambda_2} := \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}$$

の分布は自由度（ν_1, ν_2），非心度（λ_1, λ_2）の2重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ となる．この分布は分散分析の交互作用や誤差因子におけるF検定の検出力を求めるときや([Ma48], [S59])，ＳＮ比を検定する問題を考察するときなどに現れる（[Mi79], [Ts82]).それから情報理論に基づく工学的な問題に際しても現れる（[P62a],[P62b],[P62c]).例えば受信機が通信路を混乱させる多並列雑音（multiple parallel-link noise）の状態を知るための特定の2元信号方式（binary signalling system）のエラーの確率を求めるときにこの2重非心F分布は現れる（[P64]).

実際，2重非心F分布$F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の密度関数は

$$p_F(x;\nu_1,\nu_2,\lambda_1,\lambda_2) := \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^{r+t}\frac{(\lambda_1/2)^r}{r!}\frac{(\lambda_2/2)^t}{t!} \cdot\left[\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{t}(-1)^{i+j}\binom{r}{i}\binom{t}{j}p_F(x;\frac{\nu_1}{2}+i,\frac{\nu_2}{2}+j)\right]$$

$$(0 < x < \infty; \nu_1, \nu_2 = 1, 2, \ldots; \lambda_1, \lambda_2 > 0)$$

になる．ここで，$p_F(x;\nu_1/2+i, \nu_2/2+j)$ は自由度 (ν_1+2i, ν_2+2j) の中心 F 分布の密度関数，すなわち

$$p_F(x;\frac{\nu_1}{2}+i,\frac{\nu_2}{2}+j) = \frac{(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2+i}}{B(\nu_1/2+i,\nu_2/2+j)}\frac{x^{\nu_1/2+i-1}}{(1+(\nu_1/\nu_2)x)^{(\nu_1+\nu_2)/2+i+j}}$$

とする．上記から分かるように，2重非心 F 分布の密度関数は複雑でパーセント点等を具体的に求めるためには，大規模な数値計算を必要とする．

以下の節では最近提案された非心t分布等のパーセント点の近似式の考え方（[A95]）を踏まえて，カイ統計量の線形結合などの分布の Cornish-Fisher 展開から新しい近似式を求め，従来の近似式と比較検討する．

2. 2重非心 F 分布のパーセント点の近似式

まず従来の近似式を紹介する．$(F_{\nu_1,\nu_2,\lambda_1,\lambda_2}+\zeta)/\tau$ の分布を3次以下のモーメントを等置することによって自由度 (ν',ν_2) の中心F分布 $F(\nu',\nu_2)$ で近似する．そこで，$F=F_{\nu_1,\nu_2,\lambda_1,\lambda_2}$，$\mu'_r=E(F^r)$，$\mu_r=E[(F-\mu'_1)^r]$ $(r=1,2,\ldots)$，$\beta_1=\mu_3^2/\mu_2^3$ とすると3次までのモーメントを等置した結果，ν',ζ,τ は

$$\nu'=\frac{1}{2}(\nu_2-1)\left[-1+\sqrt{\frac{(\nu_2-6)^2\beta_1}{(\nu_2-6)^2\beta_1-32(\nu_2-4)}}\right],$$

$$\tau=\frac{1}{4}\left(\frac{\mu_3}{\mu_2}\right)\frac{\nu'(\nu_2-2)(\nu_2-6)}{\nu_2(2\nu'+\nu_2-2)},\qquad \zeta=\left(\frac{\nu_2}{\nu_2-2}\right)\tau-\mu'_1$$

になる．実際にFの1次から3次までのモーメントは次のようになる（[Ti65], [Ti72]）．

$$\begin{aligned}\mu'_1\fallingdotseq\ &\frac{\nu_2}{\nu_2-2}\left(1+\frac{\lambda_1}{\nu_1}\right)\left\{1-\frac{\lambda_2}{\nu_2}+\frac{\lambda_2^2}{\nu_2(\nu_2+2)}-\frac{\lambda_2^3}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)}\right.\\&+\frac{\lambda_2^4}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)(\nu_2+6)}-\frac{\lambda_2^5}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)(\nu_2+6)(\nu_2+8)}\\&\left.+\frac{\lambda_2^6}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)(\nu_2+6)(\nu_2+8)(\nu_2+10)}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu'_2\fallingdotseq\ &\frac{\nu_2^2(\nu_1+2)}{\nu_1(\nu_2-2)(\nu_2-4)}\left(1+\frac{2\lambda_1}{\nu_1}+\frac{\lambda_1^2}{\nu_1(\nu_1+2)}\right)\left\{1-\frac{2\lambda_2}{\nu_2}+\frac{3\lambda_2^2}{\nu_2(\nu_2+2)}\right.\\&-\frac{4\lambda_2^3}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)}+\frac{5\lambda_2^4}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)(\nu_2+6)}\\&-\frac{6\lambda_2^5}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)(\nu_2+6)(\nu_2+8)}\\&\left.+\frac{7\lambda_2^6}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)(\nu_2+6)(\nu_2+8)(\nu_2+10)}\right\},\end{aligned}$$

$$\mu_3' \doteqdot \frac{\nu_2^3(\nu_1+2)(\nu_1+4)}{\nu_1^2(\nu_2-2)(\nu_2-4)(\nu_2-6)}\left(1+\frac{3\lambda_1}{\nu_1}+\frac{3\lambda_1^2}{\nu_1(\nu_1+2)}+\frac{\lambda_1^3}{\nu_1(\nu_1+2)(\nu_1+4)}\right)$$
$$\left\{1-\frac{3\lambda_2}{\nu_2}+\frac{6\lambda_2^2}{\nu_2(\nu_2+2)}-\frac{10\lambda_2^3}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)}\right.$$
$$+\frac{15\lambda_2^4}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)(\nu_2+6)}-\frac{21\lambda_2^5}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)(\nu_2+6)(\nu_2+8)}$$
$$\left.+\frac{28\lambda_2^6}{\nu_2(\nu_2+2)(\nu_2+4)(\nu_2+6)(\nu_2+8)(\nu_2+10)}\right\}.$$

これより次の 2 重非心 F 分布の分布関数の近似式を得る.

$$(2.1)\quad P\{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda_1,\lambda_2}<f\}\approx I_{\nu_0'}\left(\frac{1}{2}\nu_2,\frac{1}{2}\nu'\right)$$
$$=\frac{1}{B(\frac{1}{2}\nu_2,\frac{1}{2}\nu')}\int_0^{\nu_0'} t^{\frac{1}{2}\nu_2-1}(1-t)^{\frac{1}{2}\nu'-1}dt.$$

但し

$$\nu_0' = 1\Big/\left(1+\frac{\nu'}{\nu_2}\frac{f+\zeta}{\tau}\right)$$

とする (Tiku [Ti65]).

次に (2.1) より 2 つのカイ統計量の線形結合による統計量の分布を Cornish-Fisher 展開して, $F(\nu_1,\nu_2,\lambda_1,\lambda_2)$ の上側 100α パーセント点 f_α の新しい近似式を求めてみる.

F_{ν',ν_2} を自由度 (ν',ν_2) の中心 F 分布 $F(\nu',\nu_2)$ に従う確率変数, S を自由度 ν' の中心 χ^2 分布 $\chi^2(\nu')$ に従う確率変数とし, $f_\alpha'=(f_\alpha+\zeta)/\tau$ とすると, 近似式 (2.1) より

$$(2.2)\quad 1-\alpha = P\{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda_1,\lambda_2}<f\} = P\left\{\frac{F_{\nu_1,\nu_2,\lambda_1,\lambda_2}+\zeta}{\tau}<\frac{f+\zeta}{\tau}\right\}$$
$$\doteqdot P\{F_{\nu_1,\nu_2}<f_\alpha'\} = P\left\{\frac{S/\nu'}{X_2/\nu_2}<f_\alpha'\right\}$$
$$= P\left\{\sqrt{\frac{S}{\nu'}}-\sqrt{f_\alpha'}\sqrt{\frac{X_2}{\nu_2}}<0\right\}$$

になる. ここで $S_{\nu'}=\sqrt{S/\nu'}$, $S_{\nu_2}=\sqrt{X_2/\nu_2}$ とおくと

$$b_{\nu'} := E(S_{\nu'}) = \sqrt{\frac{2}{\nu}}\frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2)},\qquad b_{\nu_2} := E(S_{\nu'}) = \sqrt{\frac{2}{\nu}}\frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2)}$$

$$V(S_{\nu'}) = 1 - b_{\nu'}, \quad V(S_{\nu_2}) = 1 - b_{\nu_2}$$

となるので，(2.2) は

$$1 - \alpha \fallingdotseq P\left\{ \frac{S_{\nu'} - b_{\nu'} - \sqrt{f'_\alpha}(S_{\nu_2} - b_{\nu_2})}{\sqrt{1 - b^2_{\nu'} + f'_\alpha(1 - b^2_{\nu_2})}} < \frac{-b_{\nu'} + \sqrt{f'_\alpha} b_{\nu_2}}{\sqrt{1 - b^2_{\nu'} + f'_\alpha(1 - b^2_{\nu_2})}} \right\}$$

になる．従って W を

$$W = \frac{S_{\nu'} - b_{\nu'} - \sqrt{f'_\alpha}(S_{\nu_2} - b_{\nu_2})}{\sqrt{1 - b^2_{\nu'} + f'_\alpha(1 - b^2_{\nu_2})}} \tag{2.3}$$

によって定義された統計量とすれば $E(W) = 0, V(W) = 1$ となる．そこで W のキュムラントを求め W の分布の Cornish-Fisher展開から新しいを導出する．

補題 2.1 ([A95]). $S_{\nu'} - b_{\nu'}$の 3 次，4 次キュムラントは

$$\kappa_3(S_{\nu'} - b_{\nu'}) = -b_{\nu'}\left\{2(1 - b^2_{\nu'}) - \frac{1}{\nu'}\right\},$$

$$\kappa_4(S_{\nu'} - b_{\nu'}) = (1 - b^2_{\nu'})\{4 - 6(1 - b^2_{\nu'})\} + \frac{4}{\nu'}(1 - b^2_{\nu'}) - \frac{2}{\nu'}$$

である．

証明の概略　$E(S_{\nu'}) = b_{\nu'}, E(S^2_{\nu'}) = 1, E(S^3_{\nu'}) = (1 + 1/\nu')b_{\nu'}$であるから

$$\begin{aligned}
\kappa_3(S_{\nu'} - b_{\nu'}) &= E[(S_{\nu'} - b_{\nu'})^3] \\
&= E(S^3_{\nu'}) - 3b_{\nu'}E(S^2_{\nu'}) + 3b^2_{\nu'}E(S_{\nu'}) - b^3_{\nu'} \\
&= -b_{\nu'}\left\{2(1 - b^2_{\nu'}) - \frac{1}{\nu'}\right\}
\end{aligned}$$

を得る．また$E(S^4_{\nu'}) = 1 + (2/\nu')$となるから，上記と同様にして

$$\begin{aligned}
\kappa_4(S_{\nu'} - b_{\nu'}) &= E[(S_{\nu'} - b_{\nu'})^4] - 3(E[(S_{\nu'} - b_{\nu'})^2])^2 \\
&= \frac{2}{\nu'}(1 - 2b^2_{\nu'}) + (1 - b^2_{\nu'})(1 + 3b^2_{\nu'}) - 3(1 - b^2_{\nu'})^2 \\
&= (1 - b^2_{\nu'})\{4 - 6(1 - b^2_{\nu'})\} + \frac{4}{\nu'}(1 - b^2_{\nu'}) - \frac{2}{\nu'}
\end{aligned}$$

を得る．　$\square$

補題2.2 ([To96]).　Wの3次，4次キュムラントは

$$\kappa_3(W) = \frac{1}{4\{(1-b_{\nu'}^2)+f'_\alpha(1-b_{\nu_2}^2)\}^{3/2}} \cdot \left\{\left(\frac{1}{\nu'^2}+\frac{1}{4\nu'^3}\right) - f_\alpha^{\prime\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\nu_2{}^2}+\frac{1}{4\nu_2{}^3}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{\nu_2{}^{5/2}}\right)$$

$$\kappa_4(W) = O\left(\frac{1}{\nu_2{}^2}\right)$$

証明の概略.　Stirlingの公式より,

$$\Gamma(n) = \sqrt{2\pi}n^{n-1/2}e^{-n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

であるから

$$\begin{aligned} b_{\nu'} &= \sqrt{\frac{2}{\nu'}}\Gamma\left(\frac{\nu'+1}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \\ &= 1-\frac{1}{4\nu'}+\frac{1}{32\nu'^2}+\frac{5}{128\nu'^3}+O\left(\frac{1}{\nu'^4}\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる．またこれより

$$1-b_{\nu'}^2 = \frac{1}{2\nu'}-\frac{1}{8\nu'^2}-\frac{1}{16\nu'^3}+O\left(\frac{1}{\nu'^4}\right) \tag{2.5}$$

になる．従って仮定より，$S_{\nu'}-b_{\nu'}$と$S_{\nu_2}-b_{\nu_2}$は独立であるので，補題 2.1, (2.4), (2.5) より W の3次キュムラントは

$$\begin{aligned} \kappa_3(W) &= \frac{1}{\{(1-b_{\nu'}^2)+f'_\alpha(1-b_{\nu_2}^2)\}^{\frac{3}{2}}}\kappa_3[(S_{\nu'}-b_{\nu'})-\sqrt{f'_\alpha}(S_{\nu_2}-b_{\nu_2})] \\ &= \frac{1}{\{(1-b_{\nu'}^2)+f'_\alpha(1-b_{\nu_2}^2)\}^{\frac{3}{2}}}\left(\kappa_3(S_{\nu'}-b_{\nu'})-f_\alpha^{\prime\frac{3}{2}}\kappa_3(S_{\nu_2}-b_{\nu_2})\right) \\ &= \frac{1}{\{(1-b_{\nu'}^2)+f'_\alpha(1-b_{\nu_2}^2)\}^{\frac{3}{2}}}\left\{\left(\frac{1}{\nu'^2}+\frac{1}{4\nu'^3}\right)-f_\alpha^{\prime\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\nu_2{}^2}+\frac{1}{4\nu_2{}^3}\right)\right\} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\nu_2{}^{5/2}}\right) \end{aligned}$$

となる．同様にして W の4次キュムラントは

$$\kappa_4(W) = O\Big(\frac{1}{\nu_2^2}\Big)$$

となる．□

定理 2.1. 2重非心F分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の上側 100α パーセント点を f_α とするとき，次の近似式が成り立つ．

$$(2.6)\ -\frac{b_{\nu'} - \sqrt{f'_\alpha}\, b_{\nu_2}}{\sqrt{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)}}$$
$$= u_\alpha + \frac{u_\alpha^2 - 1}{24\{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^{3/2}} \cdot \Big\{\frac{1}{\nu'^2} + \frac{1}{4\nu'^3} - f_\alpha'^{3/2}\Big(\frac{1}{{\nu_2}^2} + \frac{1}{4{\nu_2}^3}\Big)\Big\}$$
$$- \frac{2u_\alpha^3 - 5u_\alpha}{576\{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^3}\Big(\frac{1}{\nu'^2} - \frac{f_\alpha'^{3/2}}{{\nu_2}^2}\Big)^2 + O\Big(\frac{1}{{\nu_2}^2}\Big).$$

但し u_α は $N(0,1)$ の上側 100α パーセント点，$f'_\alpha = (f_\alpha + \zeta)/\tau$ とする．

証明の概略. (2.3)と補題 2.2 より，W の分布に関するCornish-Fisher展開を用いて，

$$-\frac{b_{\nu'} - \sqrt{f'_\alpha}\, b_{\nu_2}}{\sqrt{(1 - b_{\nu'}^2) + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)}}$$
$$= u_\alpha + \frac{1}{6}\kappa_3(W)(u_\alpha^2 - 1) + \frac{1}{24}\kappa_4(W)(u_\alpha^3 - 3u_\alpha)$$
$$- \frac{1}{36}\kappa_3(W)^2(2u_\alpha^3 - 5u_\alpha) + O\Big(\frac{1}{\nu_2^2}\Big)$$
$$= u_\alpha + \frac{u_\alpha^2 - 1}{24\{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^{3/2}} \cdot \Big\{\frac{1}{\nu'^2} + \frac{1}{4\nu'^3} - f_\alpha'^{3/2}\Big(\frac{1}{{\nu_2}^2} + \frac{1}{4{\nu_2}^3}\Big)\Big\}$$
$$- \frac{2u_\alpha^3 - 5u_\alpha}{576\{1 - b_{\nu'}^2 + f'_\alpha(1 - b_{\nu_2}^2)\}^3}\Big(\frac{1}{\nu'^2} - \frac{f_\alpha'^{3/2}}{{\nu_2}^2}\Big)^2 + O\Big(\frac{1}{{\nu_2}^2}\Big)$$

を得る． □

3. 数値計算による比較検討

数値計算の結果については表 1 ～表 4 に示した．近似式が方程式の形で表わされているため，数式処理ソフトウェア *Mathematica* を用いて初期値を 3 としてニュートン法によって算出した．また表の真値は*Mathematica* で9999 回のシミュレーションを行い，その10 回の平均をとったものとした．$F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の上側 100α パーセント点の近似式 (2.1) と (2.6) を α が 0.05, 0.10, 0.90, 0.95, ν_1 が 5, 10, 20, ν_2 が 10, 20 ,30, (λ_1, λ_2) が (5, 5), (5, 10), (10, 10) の時で比較した結果，新しい近似式はTikuの近似式とほぼ同等の値を得ることが分かった．但し，表中で横線が引かれているのは誤差の絶対値が 1 以上であることを示す．

参考文献

[A95] Akahira, M.(1995). A higher order approximation to a percentage point of the non-central t-distribution. *Commun. Statist.-Simula.*, **24**(3), 595–605.

[AST95] Akahira, M., Sato, M. and Torigoe, N.(1995). On the new approximation to the non-central t-distributions. *J. Japan Statist. Soc.*, **25,** 1–18.

[Ma48] Madow, W. G. (1948). On a source of downward bias in the analysis of variance and covariance. *Ann. Math. Statist,* **19,** 351–359.

[Mi79] 三輪哲久. (1979). SN比に関する推測について. 日本品質管理学会第 9 回年次大会研究発表要旨集, 37–40.

[P62a] Price, R. (1962). Error probabilities for adaptive multichannel reception of binary signals. *IRE Transactions on Information Theory,* **It-8,** 305–316.

[P62b] Price, R. (1962). *Error probabilities for adaptive multichannel reception of binary signals.* Lincoln Laboratory Technical Report, **258,** Massachusetts Institute of Technology.

[P62c] Price, R. (1962). Error probabilities for adaptive multichannel reception of binary signals. Addendum, *IRE Transactions on Information Theory,* **It-8,** 287–289.

[P64] Price, R. (1964). Some non-central F-distributions expressed in closed form. *Biometrika,* **51,** 107–122.

[S59] Scheffé, H. (1959). *The Analysis of Variance.* Wiley, New York

[Ti65] Tiku, M. L. (1965). Series expansions for the doubly non-central F-distribution. *Austral. J. Statist.*, **7**, 78–89.

[Ti72] Tiku, M. L. (1972). A note on the distribution of the doubly non-central F-distribution. *Austral. J. Statist.*, **14**, 37–40.

[To96] Torigoe, N.(1996). Approximations to non-central χ^2 and F distributions. *J. Japan Statist. Soc.*, **26**, 161–175.

[Ts82] 椿広計. (1982). 非心度・SN比・対数SN比の点推定について. 21th ＪＳＱＣ研究発表会, 56–59.

表1．2重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の上側 5% 点の誤差

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真　値	(2.6)	Tiku (2.1)
5	10	5	5	4.0511	0.009	0.007
	20			3.9954	0.029	0.029
	30			4.0245	-0.001	0.000
5	10	5	10	2.8544	——	0.149
	20			3.2912	0.101	0.097
	30			3.4832	0.026	0.026
5	10	10	10	4.0852	——	0.454
	20			4.6806	0.123	0.117
	30			4.9014	0.025	0.026
10	10	5	5	2.8461	-0.023	-0.025
	20			2.7404	-0.004	-0.004
	30			2.6892	0.021	0.021
10	10	5	10	1.9706	——	0.294
	20			2.2306	0.085	0.080
	30			2.3576	0.006	0.007
10	10	10	10	2.5784	——	0.451
	20			2.9042	0.105	0.098
	30			3.0286	0.029	0.029
20	10	5	5	2.2170	-0.005	-0.006
	20			2.0882	0.006	0.006
	30			2.0469	0.004	0.004
20	10	5	10	1.5430	——	0.353
	20			1.7086	0.072	0.065
	30			1.7762	0.013	0.014
20	10	10	10	1.8401	——	0.437
	20			2.0327	0.087	0.077
	30			2.1122	0.014	0.014

表2. 2重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の上側 10% 点の誤差

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真　値	(2.6)	Tiku (2.1)
5	10	5	5	3.1446	-0.012	-0.014
	20			3.2644	0.008	0.008
	30			3.3395	-0.012	-0.012
5	10	5	10	2.2548	——	-0.639
	20			2.6886	0.000	-0.006
	30			2.9020	-0.003	-0.003
5	10	10	10	3.2510	——	-0.748
	20			3.8721	-0.020	-0.027
	30			4.1288	0.006	0.006
10	10	5	5	2.2382	-0.024	-0.026
	20			2.2820	-0.008	-0.008
	30			2.2912	0.003	0.003
10	10	5	10	1.5863	——	-0.321
	20			1.8623	0.004	-0.002
	30			2.0027	-0.005	-0.004
10	10	10	10	2.0796	——	-0.370
	20			2.4390	-0.002	-0.009
	30			2.5962	0.007	0.007
20	10	5	5	1.7679	-0.010	-0.010
	20			1.7719	0.002	0.002
	30			1.7728	0.001	0.001
20	10	5	10	1.2505	——	-0.160
	20			1.4485	0.005	——
	30			1.5390	0.005	0.005
20	10	10	10	1.4898	——	-0.176
	20			1.7330	-0.001	-0.010
	30			1.8352	0.004	0.004

表3. 2重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の下側 10% 点の誤差

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真　値	(2.6)	Tiku (2.1)
5	10	5	5	0.4734	0.021	0.021
	20			0.5814	-0.001	-0.001
	30			0.6310	-0.001	0.000
5	10	5	10	0.3554	——	0.312
	20			0.4835	0.119	0.122
	30			0.5559	0.004	0.005
5	10	10	10	0.6153	——	0.639
	20			0.8463	0.183	0.187
	30			0.9697	0.015	0.015
10	10	5	5	0.4505	0.020	0.020
	20			0.5693	-0.002	-0.002
	30			0.6200	0.000	0.000
10	10	5	10	0.3447	——	0.275
	20			0.4732	0.094	0.097
	30			0.5441	0.006	0.007
10	10	10	10	0.4816	——	0.332
	20			0.6665	0.129	——
	30			0.7639	0.013	0.013
20	10	5	5	0.4416	0.016	0.016
	20			0.5616	0.002	0.002
	30			0.6238	-0.002	-0.002
20	10	5	10	0.3375	——	0.065
	20			0.4729	0.086	0.088
	30			0.5489	0.004	0.004
20	10	10	10	0.4081	——	0.201
	20			0.5767	0.104	0.106
	30			0.6691	0.004	0.004

表4. 2重非心 F 分布 $F(\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2)$ の下側 5% 点の誤差

ν_1	ν_2	λ_1	λ_2	真 値	(2.6)	Tiku (2.1)
5	10	5	5	0.3421	0.028	0.028
	20			0.4188	-0.006	-0.931
	30			0.4612	-0.011	-0.010
5	10	5	10	0.2563	0.579	-0.709
	20			0.3513	0.189	0.191
	30			0.4020	0.007	0.008
5	10	10	10	0.4622	——	0.783
	20			0.6492	0.295	0.297
	30			0.7439	0.017	——
10	10	5	5	0.3542	0.032	0.032
	20			0.4549	-0.003	-0.003
	30			0.5005	-0.003	-0.003
10	10	5	10	0.2744	——	0.354
	20			0.3784	0.155	0.156
	30			0.4399	0.009	0.009
10	10	10	10	0.3887	——	0.444
	20			0.5425	0.211	——
	30			0.6234	0.020	0.020
20	10	5	5	0.3674	0.027	0.027
	20			0.4767	0.001	-0.289
	30			0.5326	-0.001	-0.001
20	10	5	10	0.2827	——	0.149
	20			0.4015	0.141	0.142
	30			0.4706	0.009	0.009
20	10	10	10	0.3430	——	0.274
	20			0.4914	0.170	0.171
	30			0.5740	0.012	0.012