

# An approximation to a percentage point of the distribution of the kurtosis statistic $b_2$

筑波大・数学 高橋 邦彦 (Kunihiko Takahashi)  
筑波大・数学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

## 1. はじめに

統計的推測において、正規母集団からの標本に基づく最適な推定方式が、母集団分布が非正規分布であるときには必ずしも良いとは限らない。このようなことを改善するために多くの様々な robustness の議論がなされてはいるが、母集団分布が正規分布であるかどうかという正規性の検定は重要である。本論では正規性の検定において重要な役割を果たす正規標本  $X_1, \dots, X_n$  に基づく尖度統計量

$$b_2 = n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4 / \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right\}^2$$

を取り上げる。ただし  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$  とする。そして  $b_2$  の分布のパーセント点の近似について考察する。

## 2. 歪度統計量 $\sqrt{b_1}$ と尖度統計量 $b_2$

分布の非対称性、裾の長さを表わす尺度として分布の平均の周りでの  $r$  次のモーメントを  $\mu_r$  とするとき

$$(2.1) \quad \sqrt{\beta_1} := \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}, \quad \beta_2 := \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

が良く知られ、それぞれ分布の歪度 (skewness), 尖度 (kurtosis) という。特に正規分布の場合には  $\sqrt{\beta_1} = 0, \beta_2 = 3$  になる。

いま  $X_1, \dots, X_n$  を分布関数  $F(\cdot)$  からの無作為標本とする。ここで  $\Phi(\cdot)$  を標準正規分布関数とするとき、帰無仮説  $H : F(x) \equiv \Phi((x - \mu)/\sigma)$  を検定する問題を考える。各  $r = 2, 3, \dots$  について  $m_r$  を  $m_r := (1/n) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^r$  で定義し、(2.1) において  $\mu_r$  の代わりに  $m_r$  として得られた統計量

$$\sqrt{b_1} := \frac{m_3}{m_2^{3/2}}, \quad b_2 := \frac{m_4}{m_2^2}$$

をそれぞれ歪度統計量, 尖度統計量という ([S81], [PR96]). これらはそれぞれ  $\sqrt{\beta_1}$ ,  $\beta_2$  に関して一致性をもつことに注意. このとき仮説  $H$  の検定については  $|\sqrt{b_1}| > c$  または  $|b_2 - 3| > c'$  のときに  $H$  を棄却すればよいことが分かる. そのような場合に  $\sqrt{b_1}$ ,  $b_2$  の分布のパーセント点が必要になるが, 直接的に Cornish-Fisher 展開を適用したとき,  $\sqrt{b_1}$  の方は比較的良い近似が得られるが, 残念ながら  $b_2$  の方はあまり良い近似ではなくなる ([S81]). そこで,  $b_1$ ,  $b_2$  を逆双曲線正弦関数を用いて変換して正規近似する方法 ([J49]) や,  $\sqrt{b_1}$ ,  $b_2$  の分布を Pearson 系の分布にあてはめる方法 ([P65]) でパーセント点等を求めることが良く知られているが, その導出の意味が必ずしも明確であるとはいえない. 本論では非心  $t$  分布のパーセント点の近似を求めた方法 ([A95]) と類似の方法で  $b_2$  の分布のパーセント点の近似について考察する.

### 3. $b_2$ の分布のパーセント点の近似式

本論では仮説  $H$  の下で  $b_2$  の分布を考える.  $H$  の下では  $b_2$  と  $m_2$  は互いに独立になり, また  $b_2$  が母数に無関係であることに注意して  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$  と仮定する. そこで  $k$  を正数にとって固定し, 任意の  $c > 0$  に対して

$$(3.1) \quad \begin{aligned} P\{b_2 \leq c\} &= P\left\{\frac{m_4}{m_2^2} \leq c\right\} = P\left\{\left(\frac{m_4}{m_2^2}\right)^{1/k} \leq c^{1/k}\right\} \\ &= P\left\{m_4^{1/k} - c^{1/k} m_2^{2/k} \leq 0\right\} \end{aligned}$$

なる  $1/k$  乗変換を考える. 次に

$$(3.2) \quad Y := m_4^{1/k} - c^{1/k} m_2^{2/k}$$

とにおいて,  $Y$  のモーメントを求める. まず, 任意の  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$  について

$$(3.3) \quad E[m_4^\alpha m_2^\beta] = E[b_2^\alpha m_2^{2\alpha+\beta}] = E[b_2^\alpha] E[m_2^{2\alpha+\beta}]$$

になる. また, Hsu and Lawley [HL39] の結果を用いて

$$\begin{aligned} \mu &:= E(b_2) = \frac{3(n-1)}{n+1} = 3 - \frac{6}{n+1}, \\ \gamma_2 &:= E\left[\left(\frac{b_2 - \mu}{\mu}\right)^2\right] = \frac{8n(n-2)(n-3)}{3(n-1)^2(n+3)(n+5)} = O\left(\frac{1}{n}\right), \\ \gamma_3 &:= E\left[\left(\frac{b_2 - \mu}{\mu}\right)^3\right] = \frac{64n(n-2)(n-3)(n^2 - 5n + 2)}{(n-1)^3(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \gamma_4 &:= E\left[\left(\frac{b_2 - \mu}{\mu}\right)^4\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{64n(n-2)(n-3)(n^5 + 207n^4 - 1707n^3 + 4105n^2 - 1902n + 720)}{3(n-1)^4(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)(n+11)(n+13)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\gamma_5 := E\left[\left(\frac{b_2 - \mu}{\mu}\right)^5\right] = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

になるから、任意の  $\alpha > 0$  に対して

$$(3.4) \quad E(b_2^\alpha) = E\left[\mu^\alpha \left(1 + \frac{b_2 - \mu}{\mu}\right)^\alpha\right]$$

$$= \mu^\alpha \left\{ 1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\gamma_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\gamma_3 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\gamma_4 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right\}$$

を得る。一方、任意の  $\ell \geq 0$  に対して

$$(3.5) \quad E[m_2^\ell] = \left(\frac{2}{n}\right)^\ell \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + \ell\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

になる。ただし  $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数とする。そこで  $a = c^{1/k}$  とおくと  $Y$  のモーメントは次のようになる。

$$\mu_1 := E(Y) = E(m_2^{2/k}) \{E(b_2^{1/k}) - a\},$$

$$\mu_2 := E(Y^2) = E(m_2^{4/k}) \{E(b_2^{2/k}) - 2aE(b_2^{1/k}) + a^2\},$$

$$\mu_3 := E(Y^3) = E(m_2^{6/k}) \{E(b_2^{3/k}) - 3aE(b_2^{2/k}) + 3a^2E(b_2^{1/k}) - a^3\},$$

$$\mu_4 := E(Y^4) = E(m_2^{8/k}) \{E(b_2^{4/k}) - 4aE(b_2^{3/k}) + 6a^2E(b_2^{2/k}) - 4a^3E(b_2^{1/k}) + a^4\}.$$

ここで、それぞれの値については、(3.4)、(3.5) からその近似値が求められる。

さらに (3.1) から任意の  $\alpha (0 < \alpha < 1)$  に対して

$$(3.6) \quad 1 - \alpha = P\{b_2 \leq c\} = P\{Y \leq 0\} = P\left\{\frac{Y - \mu_1}{\sigma_Y} \leq -\frac{\mu_1}{\sigma_Y}\right\}$$

になる。ただし  $\sigma_Y := \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{\text{Var}(Y)} = \sqrt{\mu_2 - \mu_1^2}$  とする。このとき

$$(3.7) \quad W := \frac{Y - \mu_1}{\sigma_Y}$$

とおけば、 $E(W) = 0$ 、 $\text{Var}(W) = 1$  で  $W$  の 3 次、4 次のキュムラントは

$$\kappa_3(W) = \frac{1}{\sigma_Y^3} (\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3),$$

$$\kappa_4(W) = \frac{1}{\sigma_Y^4} (\mu_4 - 4\mu_3\mu_1 - 3\mu_2^2 + 12\mu_2\mu_1^2 - 6\mu_1^4)$$

になる。従って (3.6) において Cornish-Fisher 展開を用いて次のことを得る。

**定理.**  $b_2$  の分布の上側  $100\alpha\%$  点  $c = c_\alpha$  は次の近似式から求められる。

$$(3.8) \quad -\frac{\mu_1}{\sigma_Y} = u_\alpha + \frac{1}{6}\kappa_3(W)(u_\alpha^2 - 1) \\ + \frac{1}{24}\kappa_4(W)(u_\alpha^3 - 3u_\alpha) - \frac{1}{36}\kappa_3^2(W)(2u_\alpha^3 - 5u_\alpha) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

ただし  $u_\alpha$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  の上側  $100\alpha\%$  点とする。

**系.**  $b_2$  の分布の上側  $100\alpha\%$  点  $c = c_\alpha$  の近似値は

$$(3.9) \quad \left\{ \mu_1 \sigma_Y^2 + \frac{1}{6} \sigma_Y^3 \kappa_3(W) (u_\alpha^2 - 1) \right\}^2 = \sigma_Y^6 u_\alpha^2$$

の解として得られる。

**注意.**  $b_2$  の分布の下側  $100\alpha\%$  点  $c = c_{1-\alpha}$  の近似値は (3.8), (3.9) において  $\alpha$  を  $1-\alpha$  として得ることができる。

## 4. 数値的検討

前節において求めた近似式 (3.9) を用い  $k = 2, 4, 6, 8$  の場合に  $b_2$  の分布の上側 (下側) 1%, 5% の値を計算する。その際 Pearson and Hartley [PH76] において Pearson 系の分布への当てはめによって 20(10)50, 75(25)200, 250, 300(100)1000, 2000 の場合に  $b_2$  の分布の上側 (下側) 1%, 5% の値が与えられているので、それらを対象値として差を求める (表 1~8)。その結果,  $k = 2$  の場合が比較的安定しているように見える。

表 1.  $b_2$  の分布の上側パーセント点の値 ( $k = 2$ )

| $n$  | 上側 1%点 |         |        | 上側 5%点 |         |        |
|------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|
|      | [PH76] | (3.9)   | 差      | [PH76] | (3.9)   | 差      |
| 20   | 5.38   | 4.58207 | -0.798 | 4.18   | 4.10029 | -0.080 |
| 30   | 5.20   | 4.59818 | -0.602 | 4.12   | 4.07380 | -0.046 |
| 40   | 5.04   | 4.56571 | -0.474 | 4.06   | 4.02811 | -0.032 |
| 50   | 4.88   | 4.51570 | -0.364 | 4.00   | 3.98064 | -0.019 |
| 75   | 4.59   | 4.37668 | -0.213 | 3.87   | 3.87473 | 0.005  |
| 100  | 4.39   | 4.25199 | -0.138 | 3.77   | 3.79075 | 0.021  |
| 125  | 4.24   | 4.14828 | -0.092 | 3.70   | 3.72435 | 0.024  |
| 150  | 4.13   | 4.06259 | -0.067 | 3.65   | 3.67086 | 0.021  |
| 175  | 4.04   | 3.99114 | -0.049 | 3.61   | 3.62686 | 0.017  |
| 200  | 3.98   | 3.93079 | -0.049 | 3.57   | 3.58999 | 0.020  |
| 250  | 3.87   | 3.83450 | -0.035 | 3.52   | 3.53148 | 0.011  |
| 300  | 3.79   | 3.76092 | -0.029 | 3.47   | 3.48685 | 0.017  |
| 400  | 3.67   | 3.65518 | -0.015 | 3.41   | 3.42261 | 0.013  |
| 500  | 3.60   | 3.58210 | -0.018 | 3.37   | 3.37795 | 0.008  |
| 600  | 3.54   | 3.52802 | -0.012 | 3.34   | 3.34470 | 0.005  |
| 700  | 3.50   | 3.48606 | -0.014 | 3.31   | 3.31875 | 0.009  |
| 800  | 3.46   | 3.45235 | -0.008 | 3.29   | 3.29778 | 0.008  |
| 900  | 3.43   | 3.42453 | -0.005 | 3.28   | 3.28040 | 0.000  |
| 1000 | 3.41   | 3.40110 | -0.009 | 3.26   | 3.26569 | 0.006  |
| 2000 | 3.28   | 3.27646 | -0.004 | 3.18   | 3.18626 | 0.006  |

表 2.  $b_2$  の分布の下側パーセント点の値 ( $k = 2$ )

| $n$  | 下側 1%点 |         |        | 下側 5%点 |         |        |
|------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|
|      | [PH76] | (3.9)   | 差      | [PH76] | (3.9)   | 差      |
| 20   | 1.64   | 1.37546 | -0.265 | 1.83   | 1.58608 | -0.244 |
| 30   | 1.79   | 1.56360 | -0.226 | 1.98   | 1.78452 | -0.195 |
| 40   | 1.89   | 1.72798 | -0.162 | 2.07   | 1.93079 | -0.139 |
| 50   | 1.95   | 1.85523 | -0.095 | 2.15   | 2.03849 | -0.112 |
| 75   | 2.08   | 2.06060 | -0.019 | 2.27   | 2.21051 | -0.059 |
| 100  | 2.18   | 2.17941 | -0.001 | 2.35   | 2.31224 | -0.038 |
| 125  | 2.24   | 2.25732 | 0.017  | 2.40   | 2.38067 | -0.019 |
| 150  | 2.29   | 2.31334 | 0.023  | 2.45   | 2.43075 | -0.019 |
| 175  | 2.34   | 2.35627 | 0.016  | 2.48   | 2.46954 | -0.010 |
| 200  | 2.37   | 2.39070 | 0.021  | 2.51   | 2.50081 | -0.009 |
| 250  | 2.42   | 2.44350 | 0.024  | 2.55   | 2.54879 | -0.001 |
| 300  | 2.46   | 2.48296 | 0.023  | 2.59   | 2.58450 | -0.005 |
| 400  | 2.52   | 2.53974 | 0.020  | 2.64   | 2.63529 | -0.005 |
| 500  | 2.57   | 2.57984 | 0.010  | 2.67   | 2.67054 | 0.001  |
| 600  | 2.60   | 2.61035 | 0.010  | 2.70   | 2.69695 | -0.003 |
| 700  | 2.62   | 2.63468 | 0.015  | 2.72   | 2.71773 | -0.002 |
| 800  | 2.65   | 2.65471 | 0.005  | 2.74   | 2.73465 | -0.005 |
| 900  | 2.66   | 2.67162 | 0.012  | 2.75   | 2.74879 | -0.001 |
| 1000 | 2.68   | 2.68615 | 0.006  | 2.76   | 2.76084 | 0.001  |
| 2000 | 2.77   | 2.76880 | -0.001 | 2.83   | 2.82760 | -0.002 |

表 3.  $b_2$  の分布の上側パーセント点の値 ( $k = 4$ )

| $n$  | 上側 1%点 |         |        | 上側 5%点 |         |        |
|------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|
|      | [PH76] | (3.9)   | 差      | [PH76] | (3.9)   | 差      |
| 20   | 5.38   | 4.27664 | -1.103 | 4.18   | 3.92368 | -0.256 |
| 30   | 5.20   | 4.29872 | -0.901 | 4.12   | 3.92393 | -0.196 |
| 40   | 5.04   | 4.31683 | -0.723 | 4.06   | 3.90484 | -0.155 |
| 50   | 4.88   | 4.31751 | -0.562 | 4.00   | 3.88010 | -0.120 |
| 75   | 4.59   | 4.26532 | -0.325 | 3.87   | 3.81246 | -0.058 |
| 100  | 4.39   | 4.18537 | -0.205 | 3.77   | 3.74939 | -0.021 |
| 125  | 4.24   | 4.10564 | -0.134 | 3.70   | 3.69509 | -0.005 |
| 150  | 4.13   | 4.03374 | -0.096 | 3.65   | 3.64910 | -0.001 |
| 175  | 4.04   | 3.97074 | -0.069 | 3.61   | 3.61005 | 0.000  |
| 200  | 3.98   | 3.91586 | -0.064 | 3.57   | 3.57661 | 0.007  |
| 250  | 3.87   | 3.82585 | -0.044 | 3.52   | 3.52239 | 0.002  |
| 300  | 3.79   | 3.75551 | -0.034 | 3.47   | 3.48026 | 0.010  |
| 400  | 3.67   | 3.65276 | -0.017 | 3.41   | 3.41865 | 0.009  |
| 500  | 3.60   | 3.58089 | -0.019 | 3.37   | 3.37529 | 0.005  |
| 600  | 3.54   | 3.52740 | -0.013 | 3.34   | 3.34278 | 0.003  |
| 700  | 3.50   | 3.48574 | -0.014 | 3.31   | 3.31729 | 0.007  |
| 800  | 3.46   | 3.45220 | -0.008 | 3.29   | 3.29663 | 0.007  |
| 900  | 3.43   | 3.42449 | -0.006 | 3.28   | 3.27947 | -0.001 |
| 1000 | 3.41   | 3.40113 | -0.009 | 3.26   | 3.26492 | 0.005  |
| 2000 | 3.28   | 3.27658 | -0.003 | 3.18   | 3.18603 | 0.006  |

表 4.  $b_2$ の分布の下側パーセント点の値 ( $k = 4$ )

| $n$  | 下側 1%点 |         |        | 下側 5%点 |         |        |
|------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|
|      | [PH76] | (3.9)   | 差      | [PH76] | (3.9)   | 差      |
| 20   | 1.64   | 1.12160 | -0.518 | 1.83   | 1.50829 | -0.322 |
| 30   | 1.79   | 1.32690 | -0.463 | 1.98   | 1.70198 | -0.278 |
| 40   | 1.89   | 1.51761 | -0.372 | 2.07   | 1.85739 | -0.213 |
| 50   | 1.95   | 1.67371 | -0.276 | 2.15   | 1.97656 | -0.173 |
| 75   | 2.08   | 1.93836 | -0.142 | 2.27   | 2.17146 | -0.099 |
| 100  | 2.18   | 2.09453 | -0.085 | 2.35   | 2.28669 | -0.063 |
| 125  | 2.24   | 2.19561 | -0.044 | 2.40   | 2.36307 | -0.037 |
| 150  | 2.29   | 2.26659 | -0.023 | 2.45   | 2.41807 | -0.032 |
| 175  | 2.34   | 2.31965 | -0.020 | 2.48   | 2.46006 | -0.020 |
| 200  | 2.37   | 2.36121 | -0.009 | 2.51   | 2.49351 | -0.016 |
| 250  | 2.42   | 2.42313 | 0.003  | 2.55   | 2.54415 | -0.006 |
| 300  | 2.46   | 2.46799 | 0.008  | 2.59   | 2.58134 | -0.009 |
| 400  | 2.52   | 2.53058 | 0.011  | 2.64   | 2.63361 | -0.006 |
| 500  | 2.57   | 2.57361 | 0.004  | 2.67   | 2.66954 | -0.000 |
| 600  | 2.60   | 2.60580 | 0.006  | 2.70   | 2.69631 | -0.004 |
| 700  | 2.62   | 2.63118 | 0.011  | 2.72   | 2.71729 | -0.003 |
| 800  | 2.65   | 2.65194 | 0.002  | 2.74   | 2.73434 | -0.006 |
| 900  | 2.66   | 2.66935 | 0.009  | 2.75   | 2.74856 | -0.001 |
| 1000 | 2.68   | 2.68425 | 0.004  | 2.76   | 2.76067 | 0.001  |
| 2000 | 2.77   | 2.76822 | -0.002 | 2.83   | 2.82759 | -0.002 |



表 5.  $b_2$  の分布の上側パーセント点の値 ( $k = 6$ )

| $n$  | 上側 1%点 |         |        | 上側 5%点 |         |        |
|------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|
|      | [PH76] | (3.9)   | 差      | [PH76] | (3.9)   | 差      |
| 20   | 5.38   | 4.18014 | -1.200 | 4.18   | 3.88490 | -0.295 |
| 30   | 5.20   | 4.19615 | -1.004 | 4.12   | 3.88550 | -0.234 |
| 40   | 5.04   | 4.22436 | -0.816 | 4.06   | 3.86991 | -0.190 |
| 50   | 4.88   | 4.23921 | -0.641 | 4.00   | 3.84980 | -0.150 |
| 75   | 4.59   | 4.21682 | -0.373 | 3.87   | 3.79224 | -0.078 |
| 100  | 4.39   | 4.15460 | -0.235 | 3.77   | 3.73556 | -0.034 |
| 125  | 4.24   | 4.08507 | -0.155 | 3.70   | 3.68518 | -0.015 |
| 150  | 4.13   | 4.01930 | -0.111 | 3.65   | 3.64170 | -0.008 |
| 175  | 4.04   | 3.96019 | -0.080 | 3.61   | 3.60432 | -0.006 |
| 200  | 3.98   | 3.90790 | -0.072 | 3.57   | 3.57204 | 0.002  |
| 250  | 3.87   | 3.82094 | -0.049 | 3.52   | 3.51929 | -0.001 |
| 300  | 3.79   | 3.75225 | -0.038 | 3.47   | 3.47802 | 0.008  |
| 400  | 3.67   | 3.65108 | -0.019 | 3.41   | 3.41731 | 0.007  |
| 500  | 3.60   | 3.57991 | -0.020 | 3.37   | 3.37440 | 0.004  |
| 600  | 3.54   | 3.52677 | -0.013 | 3.34   | 3.34214 | 0.002  |
| 700  | 3.50   | 3.48532 | -0.015 | 3.31   | 3.31681 | 0.007  |
| 800  | 3.46   | 3.45191 | -0.008 | 3.29   | 3.29625 | 0.006  |
| 900  | 3.43   | 3.42428 | -0.006 | 3.28   | 3.27916 | -0.001 |
| 1000 | 3.41   | 3.40097 | -0.009 | 3.26   | 3.26466 | 0.005  |
| 2000 | 3.28   | 3.27656 | -0.003 | 3.18   | 3.18596 | 0.006  |

表 6.  $b_2$ の分布の下側パーセント点の値 ( $k = 6$ )

| $n$  | 下側 1%点 |         |        | 下側 5%点 |         |        |
|------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|
|      | [PH76] | (3.9)   | 差      | [PH76] | (3.9)   | 差      |
| 20   | 1.64   | 1.07359 | -0.566 | 1.83   | 1.48775 | -0.342 |
| 30   | 1.79   | 1.27566 | -0.514 | 1.98   | 1.67920 | -0.301 |
| 40   | 1.89   | 1.46805 | -0.422 | 2.07   | 1.83609 | -0.234 |
| 50   | 1.95   | 1.62832 | -0.322 | 2.15   | 1.95785 | -0.192 |
| 75   | 2.08   | 1.90497 | -0.175 | 2.27   | 2.15888 | -0.111 |
| 100  | 2.18   | 2.07032 | -0.110 | 2.35   | 2.27816 | -0.072 |
| 125  | 2.24   | 2.17760 | -0.062 | 2.40   | 2.35706 | -0.043 |
| 150  | 2.29   | 2.25276 | -0.037 | 2.45   | 2.41367 | -0.036 |
| 175  | 2.34   | 2.30873 | -0.031 | 2.48   | 2.45673 | -0.023 |
| 200  | 2.37   | 2.35238 | -0.018 | 2.51   | 2.49091 | -0.019 |
| 250  | 2.42   | 2.41700 | -0.003 | 2.55   | 2.54247 | -0.008 |
| 300  | 2.46   | 2.46348 | 0.003  | 2.59   | 2.58018 | -0.010 |
| 400  | 2.52   | 2.52783 | 0.008  | 2.64   | 2.63298 | -0.007 |
| 500  | 2.57   | 2.57174 | 0.002  | 2.67   | 2.66915 | -0.001 |
| 600  | 2.60   | 2.60444 | 0.004  | 2.70   | 2.69605 | -0.004 |
| 700  | 2.62   | 2.63014 | 0.010  | 2.72   | 2.71711 | -0.003 |
| 800  | 2.65   | 2.65111 | 0.001  | 2.74   | 2.73421 | -0.006 |
| 900  | 2.66   | 2.66868 | 0.009  | 2.75   | 2.74846 | -0.002 |
| 1000 | 2.68   | 2.68370 | 0.004  | 2.76   | 2.76059 | 0.001  |
| 2000 | 2.77   | 2.76805 | -0.002 | 2.83   | 2.82758 | -0.002 |

表 7.  $b_2$ の分布の上側パーセント点の値 ( $k=8$ )

| $n$  | 上側 1%点 |         |        | 上側 5%点 |         |        |
|------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|
|      | [PH76] | (3.9)   | 差      | [PH76] | (3.9)   | 差      |
| 20   | 5.38   | 4.13500 | -1.245 | 4.18   | 3.86949 | -0.311 |
| 30   | 5.20   | 4.14659 | -1.053 | 4.12   | 3.86883 | -0.251 |
| 40   | 5.04   | 4.17822 | -0.862 | 4.06   | 3.85396 | -0.206 |
| 50   | 4.88   | 4.19915 | -0.681 | 4.00   | 3.83554 | -0.164 |
| 75   | 4.59   | 4.19099 | -0.399 | 3.87   | 3.78236 | -0.088 |
| 100  | 4.39   | 4.13783 | -0.252 | 3.77   | 3.72870 | -0.041 |
| 125  | 4.24   | 4.07369 | -0.166 | 3.70   | 3.68024 | -0.020 |
| 150  | 4.13   | 4.01123 | -0.119 | 3.65   | 3.63799 | -0.012 |
| 175  | 4.04   | 3.95424 | -0.086 | 3.61   | 3.60145 | -0.009 |
| 200  | 3.98   | 3.90336 | -0.077 | 3.57   | 3.56975 | -0.000 |
| 250  | 3.87   | 3.81811 | -0.052 | 3.52   | 3.51774 | -0.002 |
| 300  | 3.79   | 3.75034 | -0.040 | 3.47   | 3.47689 | 0.007  |
| 400  | 3.67   | 3.65007 | -0.020 | 3.41   | 3.41664 | 0.007  |
| 500  | 3.60   | 3.57931 | -0.021 | 3.37   | 3.37395 | 0.004  |
| 600  | 3.54   | 3.52638 | -0.014 | 3.34   | 3.34182 | 0.002  |
| 700  | 3.50   | 3.48505 | -0.015 | 3.31   | 3.31656 | 0.007  |
| 800  | 3.46   | 3.45171 | -0.008 | 3.29   | 3.29606 | 0.006  |
| 900  | 3.43   | 3.42413 | -0.006 | 3.28   | 3.27901 | -0.001 |
| 1000 | 3.41   | 3.40086 | -0.010 | 3.26   | 3.26454 | 0.005  |
| 2000 | 3.28   | 3.27655 | -0.003 | 3.18   | 3.18592 | 0.006  |

表 8.  $b_2$ の分布の下側パーセント点の値 ( $k = 8$ )

| $n$  | 下側 1%点 |         |        | 下側 5%点 |         |        |
|------|--------|---------|--------|--------|---------|--------|
|      | [PH76] | (3.9)   | 差      | [PH76] | (3.9)   | 差      |
| 20   | 1.64   | 1.05357 | -0.586 | 1.83   | 1.47822 | -0.352 |
| 30   | 1.79   | 1.25399 | -0.536 | 1.98   | 1.66862 | -0.311 |
| 40   | 1.89   | 1.44654 | -0.443 | 2.07   | 1.82604 | -0.244 |
| 50   | 1.95   | 1.60816 | -0.342 | 2.15   | 1.94889 | -0.201 |
| 75   | 2.08   | 1.88961 | -0.190 | 2.27   | 2.15269 | -0.117 |
| 100  | 2.18   | 2.05898 | -0.121 | 2.35   | 2.27391 | -0.076 |
| 125  | 2.24   | 2.16907 | -0.071 | 2.40   | 2.35404 | -0.046 |
| 150  | 2.29   | 2.24618 | -0.044 | 2.45   | 2.41144 | -0.039 |
| 175  | 2.34   | 2.30351 | -0.036 | 2.48   | 2.45503 | -0.025 |
| 200  | 2.37   | 2.34815 | -0.022 | 2.51   | 2.48959 | -0.020 |
| 250  | 2.42   | 2.41406 | -0.006 | 2.55   | 2.54161 | -0.008 |
| 300  | 2.46   | 2.46131 | 0.001  | 2.59   | 2.57958 | -0.010 |
| 400  | 2.52   | 2.52651 | 0.007  | 2.64   | 2.63265 | -0.007 |
| 500  | 2.57   | 2.57084 | 0.001  | 2.67   | 2.66895 | -0.001 |
| 600  | 2.60   | 2.60379 | 0.004  | 2.70   | 2.69591 | -0.004 |
| 700  | 2.62   | 2.62965 | 0.010  | 2.72   | 2.71702 | -0.003 |
| 800  | 2.65   | 2.65072 | 0.001  | 2.74   | 2.73414 | -0.006 |
| 900  | 2.66   | 2.66836 | 0.008  | 2.75   | 2.74841 | -0.002 |
| 1000 | 2.68   | 2.68343 | 0.003  | 2.76   | 2.76055 | 0.001  |
| 2000 | 2.77   | 2.76797 | -0.002 | 2.83   | 2.82757 | -0.002 |

## 参考文献

- [A95] Akahira, M. (1995). A higher order approximation to a percentage point of the non-central  $t$ -distribution. *Commun. Statist.-Simula.*, **24**(3), 595-605.
- [HL39] Hsu, C. T. and Lawley, D. N. (1939). The derivation of the fifth and sixth moments of the distribution of  $b_2$  in samples from a normal population. *Biometrika* **31**, 238-248.
- [J49] Johnson, N. L. (1949). Systems of frequency curves generated by methods of translations. *Biometrika* **36**, 149-176.
- [P30] Pearson, E. S. (1930). A further development of tests for normality. *Biometrika* **22**, 239-249.
- [P65] Pearson, E. S. (1965). Tables of percentage points of  $\sqrt{b_1}$  and  $b_2$  in normal samples; a rounding off. *Biometrika* **52**, 282-285.
- [PH76] Pearson, E. S. and Hartley, H. O. (1976). *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1. (3rd ed.), Cambridge University Press.
- [PR96] Patel, J. and Read, G. (1996). *Handbook of the Normal Distribution*. (2nd ed.), Marcel Dekker, New York.
- [S81] Shibata, Y. (1981). *Normal Distributions*. (In Japanese), Tokyo Univ. Press.