数理解析研究所講究録
1008 巻 1997 年 101-109

リー群の 2 つの involution の分類とルート系

京大・総合人間学部　松木敏彦 (Toshihiko MATSUKI)

本稿では [2] の両側剰余類分解の話の補足として、G が compact のときの involution の組の分類とルート系について少し詳しく解説する。特に例外型のときの分類は大島利雄氏の助言にもとずき昨年得られたもので [3] に追加修正されたものである。

1. 2 つの involution に関するルート系

$\mathfrak{g}$ を compact リー環、σ, τ をその 2 つの involution とする。(σ と τ の可環性は仮定しない。)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\sigma} \oplus \mathfrak{g}^{-\sigma} = \mathfrak{g}^{\tau} \oplus \mathfrak{g}^{-\tau}$$

を σ と τ に関する $+1, -1$ 固有空間分解とし、$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau}$ の 1 つの極大可環部分空間とする。$\alpha \in i\mathfrak{a}^*$ に対して root space

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha) = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [Y, X] = \alpha(Y)X \text{ for all } Y \in \mathfrak{a}\}$$

が定義できるが、さらに自己同型 $\sigma\tau$ が $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha)$ に作用するので、固有空間分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha) = \bigoplus_{|\lambda|=1} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$$

ができる。ここで

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda) = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha) \mid \sigma\tau X = \lambda X\}$$

である。(注意：$\sigma\tau = \tau\sigma$ ならば、$(\sigma\tau)^2 = id.$ だから $\lambda = \pm 1$ である。) $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}) = \{\alpha \in i\mathfrak{a}^* - \{0\} \mid \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha) \neq \{0\}\}$ とおく。

<u>命題</u> ([3]) Σ はルート系の公理を満たす。

[2] では証明を略したので、本稿では証明をつける。$\sigma\tau = \tau\sigma$ の場合にこれは [5] Theorem 5 で証明されており、以下の証明は基本的にそのやり方に沿ったものである。まず、次の補題を準備する。

<u>補題</u> (i) σ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$ から $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, -\alpha, \lambda^{-1})$ への複素線形同型を与える。

(ii) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{g}$ に関する複素共役 $X \mapsto \overline{X}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$ から $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, -\alpha, \lambda^{-1})$ への conjugate linear な同型を与える。

<u>証明</u> (i) $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$ とする。このとき、$Y \in \mathfrak{a}$ に対し、

$$[Y, \sigma X] = \sigma[\sigma Y, X] = -\sigma[Y, X] = -\alpha(Y)\sigma X$$

であり、また

$$\sigma\tau(\sigma X) = \sigma(\sigma\tau)^{-1}X = \lambda^{-1}\sigma X$$

である。よって $\sigma X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, -\alpha, \lambda^{-1})$ である。σ は involution だから明らかにこの写像は全単射である。

(ii) $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$ とする。このとき、$Y \in \mathfrak{a}$ に対し、

$$[Y, \overline{X}] = \overline{[Y, X]} = \overline{\alpha(Y)X} = -\alpha(Y)\overline{X}$$

であり、また

$$\sigma\tau\overline{X} = \overline{\sigma\tau X} = \overline{\lambda X} = \lambda^{-1}\overline{X}$$

である。よって $\overline{X} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, -\alpha, \lambda^{-1})$ である。この写像は明らかに全単射である。 q.e.d.

<u>**命題の証明**</u> α を Σ の元とする。補題により、ある λ について $0 \neq X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$ が $\sigma X = \overline{X}$ を満たすように取れる。$Y = [X, \sigma X]$ とおく。このとき、まず $Y \in i\mathfrak{a}$ であることを示そう。

補題により $\sigma X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, -\alpha, \lambda^{-1})$ であるから

$$Y = [X, \sigma X] \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, 0, 1)$$

である。また、

$$\sigma Y = \sigma[X, \sigma X] = [\sigma X, X] = -[X, \sigma X] = -Y$$

であり、

$$\overline{Y} = \overline{[X, \overline{X}]} = [\overline{X}, X] = -[X, \overline{X}] = -Y.$$

も成り立つ。したがって

$$Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, 0, 1) \cap i\mathfrak{g}^{-\sigma} = i\mathfrak{a}$$

である。($\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau} = \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{\sigma\tau}$ の極大可環部分空間であることに注意する。)

$B(\ ,\ )$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の Killing form とする。任意の $Z \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ に対し、

$$B(Z, Y) = B(Z, [X, \sigma X]) = B([Z, X], \sigma X) = \alpha(Z)B(X, \sigma X) = \alpha(Z)B(X, \overline{X})$$

が成り立つ。$B(X, \overline{X}) < 0$ であり、$Z \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ を $\alpha(Z) \neq 0$ となるように選ぶことができるので $Y \neq 0$ がわかる。次に $Z = Y$ とおくと、$0 < B(Y, Y) = \alpha(Y)B(X, \overline{X})$ であるから、$\alpha(Y) < 0$ がわかる。したがって、$\mathfrak{b} = \mathbb{C}X + \mathbb{C}\sigma X + \mathbb{C}Y$ は $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ と同型な $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分リー環であることがわかった。

任意の $\beta \in \Sigma$ に対し、$\mathfrak{b}$ の $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \beta + n\alpha)$ への作用を考えれば、$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の有限次元表現論によって Σ がルート系の公理を満たすことは容易にわかる。 q.e.d.

$G_0 = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の内部自己同型群とする。$x \in G_0$ に対し τ に共役な $\mathfrak{g}$ の involution $\tau_x = x^{-1}\tau x$ が定義できる。以下のようにして、$(\mathfrak{g}, \sigma, \tau)$ のルート系から $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau_x)$ のルート系がわかることに注意しよう。

$H = (G_0)^\sigma = \{x \in G_0 \mid x\sigma = \sigma x\}$, $L = (G_0)^\tau$, $A = \exp \mathfrak{a}$ とおくと、[3] Theorem 1 ([2] 定理 1) により

$$G_0 = HAL = LAH$$

である。$x = \ell a h$ $(\ell \in L, a \in A, h \in H)$ と表すと

$$\tau_x = \tau_{\ell a h} = \tau_{ah}$$

であり、また、$\sigma_h = \sigma$ だから $h \in H \subset G_0$ の作用により $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau_a)$ と $(\mathfrak{g}, \sigma, \tau_{ah})$ は同じルート系を持つことがわかる。したがって、$x = a \in A$ のときを考えればよい。

$X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha)$ について

$$\sigma\tau_a X = \sigma a^{-1}\tau a X = \sigma\tau a^2 X = \sigma\tau a^{2\alpha} X = a^{2\alpha}\sigma\tau X$$

が成り立つ。したがって、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha)$ 上の $\sigma\tau_a$ の固有値は $\sigma\tau$ の固有値の $a^{2\alpha}$ 倍になる。

<u>例</u> ([2] 例 4) $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n, \mathbb{F})$ $(\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$, $n = p + q = r + s$, $r \geq p \geq q \geq s$ とし、σ, τ を

$$\sigma g = I_{p,q} g I_{p,q}, \qquad \tau g = I_{r,s} g I_{r,s}$$

で定義する。ただし

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

とする。このとき、$\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\tau}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ が次のように取れる。

$$\mathfrak{a} = \left\{ Y(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \begin{pmatrix} & 0 & d(\theta_1, \ldots, \theta_s) \\ & & 0 & \\ -d(\theta_1, \ldots, \theta_s) & & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta_1, \ldots, \theta_s \in \mathbb{R} \right\}$$

ただし

$$d(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \begin{pmatrix} \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta_s \end{pmatrix}.$$

$e_j \in i\mathfrak{a}^*$ を

$$e_j : Y(\theta_1, \ldots, \theta_s) \mapsto i\theta_j$$

で定義すると、$\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha)$ が次のようになることは普通の制限ルート系の典型的な例としてよく知られている。

α	$\pm e_j \pm e_k$	$\pm e_j$	$\pm 2e_j$
$\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha)$	c	$c(r-s)$	$c-1$

($\Sigma \subset BC_s$-型ルート系 である。) ただし、

$$c = \begin{cases} 1 & (\mathbb{F} = \mathbb{R}) \\ 2 & (\mathbb{F} = \mathbb{C}) \\ 4 & (\mathbb{F} = \mathbb{H}) \end{cases}$$

とする。$(\sigma\tau)^2 = id.$ であるから $\lambda = \pm 1$ であり、$\mathfrak{g}^{\sigma\tau} \cong \mathfrak{u}(p+s, \mathbb{F}) \oplus \mathfrak{u}(q-s, \mathbb{F})$ であるから、$\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$ は容易に計算できて、次の表で与えられる。

$\lambda \backslash \alpha$	$\pm e_j \pm e_k$	$\pm e_j$	$\pm 2e_j$
1	c	$c(p-s)$	$c-1$
-1	0	$c(q-s)$	0

$s = s_1 + s_2$ とし、

$$Y = Y(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}, 0, \ldots, 0) \qquad (\frac{\pi}{2}\text{の数は } s_1 \text{ 個})$$

$$a = \exp Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{s_1} & 0 \\ 0 & I_{r-s_1} & 0 & 0 \\ -I_{s_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{s_2} \end{pmatrix} \in U(n, \mathbb{F})$$

とおくと、

$$\tau_a X = \tau \mathrm{Ad}(a)^2 X = I'_{r,s} X I'_{r,s}$$

$$I'_{r,s} = I_{r,s} a^2 = \begin{pmatrix} -I_{s_1} & & 0 \\ & I_r & \\ 0 & & -I_{s_2} \end{pmatrix}$$

である。

$$a^{2e_j} = e^{2e_j(Y)} = \begin{cases} -1 & (j \leq s_1) \\ 1 & (j > s_1) \end{cases}$$

であるから、$\sigma\tau_a$ に関する $\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$ の表は次のようになる。

$\lambda \backslash \alpha$	$\pm e_j \pm e_k$ $(j,k \le s_1)$	$\pm e_j \pm e_k$ $(j,k > s_1)$	$\pm e_j \pm e_k$ $(j \le s_1 < k)$	$\pm e_j$ $(j \le s_1)$	$\pm e_j$ $(j > s_1)$	$\pm 2e_j$
1	c	c	0	$c(q-s)$	$c(p-s)$	$c-1$
-1	0	0	c	$c(p-s)$	$c(q-s)$	0

<u>注意</u> この例では σ と τ_a が可換になるように $a \in A$ を選んでいる。このような可換な involution の組 (σ, τ) に対する $\dim \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$ $(\lambda = \pm 1)$ は [4] Table V で計算されているが、上記の方法によりその統一的な扱いが可能になった。

2. involution の組の分類

リー環 $\mathfrak{g}$ に対し、$G = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の自己同型群、$G_0 = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ を内部自己同型群とする。$\mathfrak{g}$ の involution の組について同値関係 $\sim$ を次で定義する。

$$(\sigma, \tau) \sim (\sigma', \tau') \Longleftrightarrow \sigma' = \rho\sigma\rho^{-1},\ \tau' = \rho\rho_0\tau\rho_0^{-1}\rho^{-1} \text{ となる } \rho \in G,\ \rho_0 \in G_0 \text{ が存在する。}$$

<u>注意</u> $\mathfrak{g}$ が compact のとき、前節で述べたように (σ, τ) のルート系から $(\sigma, \rho_0\tau\rho_0^{-1})$ のルート系がわかり、また、$\rho \in G$ の作用により (σ', τ') のルート系は $(\sigma, \rho_0\tau\rho_0^{-1})$ と同じである。したがって、上の同値関係のある代表系についてルート系を記述すれば、すべての (σ, τ) のついてのルート系がわかったことになる。

この同値関係がどのようなものであるか考察しよう。$\mathfrak{g}$ の involution の組 (σ, τ) を1つ固定し、次の集合

$$S = \{(\sigma', \tau') \mid \sigma' = \rho\sigma\rho^{-1},\ \tau' = \rho'\tau\rho'^{-1} \text{ for some } \rho, \rho' \in G\}$$

の中における同値関係を調べればよい。すなわち、2つの対称対の同値類を指定して、その中で involution の組として同値でないものがあるかどうかを調べるのである。S の中の各同値類は

$$S_0 = \{(\sigma, \tau') \mid \tau' = \rho'\tau\rho'^{-1} \text{ for some } \rho' \in G\}$$

の元を含むので S_0 の中の同値関係を調べればよい。$(\sigma, \tau') \sim (\sigma, \tau'')$ とすると、

$$\rho\sigma\rho^{-1} = \sigma, \qquad \rho\rho_0\tau'\rho_0^{-1}\rho^{-1} = \tau''$$

となる $\rho \in G$, $\rho_0 \in G_0$ が存在する。$\tau' = \rho'\tau\rho'^{-1}$ $(\rho' \in G)$ とおくと $\tau'' = (\rho_0\rho\rho')\tau(\rho_0\rho\rho')^{-1}$ $(\rho_0 \in G_0, \rho \in G^\sigma)$ と書ける。写像 $(\sigma, \rho'\tau\rho'^{-1}) \mapsto \rho' G^\tau$ により、S_0 と G/G^τ は1対1に対応するが、この対応により (σ, τ') を含む同値類は G/G^τ の部分集合

$$G^\sigma G_0 \rho' G^\tau = G_0 G^\sigma \rho' G^\tau$$

に対応することがわかる。射影 $\pi : G \to G/G_0$ により、S_0 の中の τ' を含む同値類は $\pi(G)$ の両側剰余類

$$\pi(G^\sigma)\pi(\rho')\pi(G^\tau)$$

に対応する。従って、次の両側剰余類分解

$$\pi(G^\sigma)\backslash\pi(G)/\pi(G^\tau)$$

を調べればよい。

$\mathfrak{g}$ が comact simple のとき、以下のように $\pi(G^\sigma)$ がわかっている (c.f. [1], p.156) のでこの両側剰余類分解は簡単である。$\pi(G^\sigma) = \pi(G)$ とならないのは次の場合のみである。

(1) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma) \cong (\mathfrak{o}(4m), \mathfrak{u}(2m))$ ($m \geq 3$, このとき $\pi(G) \cong \mathbb{Z}_2$, $\pi(G^\sigma) = \{e\}$)

(2) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma) \cong (\mathfrak{o}(8), \mathfrak{o}(8-q) \oplus \mathfrak{o}(q))$ ($q = 1, 2, 3$, このとき $\pi(G) \cong S_3$, $\pi(G^\sigma) \cong \mathbb{Z}_2$)

compact 対称対の分類と以上の考察を組み合わせて compact 単純リー環の involution の組の分類が完成する。その標準的な代表元と Σ, $\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$ は次の表のようになる。[3] には古典型のときの $\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$ の計算法も詳しく書いてある。(σ と τ が G_0-共役なものは省略する。)

A. 古典型

type $\mathfrak{g}$	$\begin{pmatrix} \sigma(X) \\ \tau(X) \end{pmatrix}$	Σ	$\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a}, \alpha, \lambda)$	c
BDI − I $\mathfrak{o}(n)$	$\begin{pmatrix} I_{p,q} X I_{p,q} \\ I_{r,s} X I_{r,s} \end{pmatrix}$	B_s	$\begin{pmatrix} c & c(p-s) & c-1 \\ 0 & c(q-s) & 0 \end{pmatrix}$	1
AIII − III $\mathfrak{su}(n)$		BC_s		2
CII − II $\mathfrak{u}(n, \mathbb{H})$		BC_s		4
AI − III $\mathfrak{su}(n)$	$\begin{pmatrix} \overline{X} \\ I_{p,q} X I_{p,q} \end{pmatrix}$	BC_q	$\begin{pmatrix} c & c(p-q) & c-1 \\ c & c(p-q) & c \end{pmatrix}$	1
CI − II $\mathfrak{u}(n, \mathbb{H})$	$\begin{pmatrix} (i_1 I_n) X (i_1 I_n)^{-1} \\ I_{p,q} X I_{p,q} \end{pmatrix}$			2

DI – III $\mathfrak{o}(2m)$ AIII – II $\mathfrak{su}(2m)$	$\begin{pmatrix} I_{p,q}XI_{p,q} \\ J_mXJ_m^{-1} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} I_{p,q}XI_{p,q} \\ J_m\overline{X}J_m^{-1} \end{pmatrix}$	$\mathrm{BC}_{q'}$	$\begin{pmatrix} 2c & c(p-q) & 2c-1 \\ 2c & c(p-q) & c-1 \\ 0 & 2c\varepsilon_q & 0 \end{pmatrix}$ $(q'=[q/2],\ \varepsilon_q=q-2q')$	1 2
AI – II $\mathfrak{su}(2m)$	$\begin{pmatrix} \overline{X} \\ J_m\overline{X}J_m^{-1} \end{pmatrix}$	A_{m-1}	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	
DIII – III′ $\mathfrak{o}(4m)$	$\begin{pmatrix} J_{2m}XJ_{2m}^{-1} \\ J'_{2m}XJ'_{2m}{}^{-1} \end{pmatrix}$	BC_{m-1}	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	
DI – I′ $\mathfrak{o}(8)$	$\begin{pmatrix} I_{p,q}XI_{p,q} \\ \kappa^{-1}(I_{r,s}\kappa(X)I_{r,s}) \end{pmatrix}$ $(q,s=1 \text{ or } 3)$	(2.1)	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	

記号の説明 $n=2m=p+q=r+s,\ r>p\geq q>s,\ \mathbb{H}=\{a_0+a_1i_1+a_2i_2+a_3i_3 \mid a_j\in\mathbb{R}\}$,

$$I_{p,q}=\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix},\quad J_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad J_m=\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_1 \end{pmatrix},\quad J'_m=\begin{pmatrix} J_{m-1} & 0 \\ 0 & -J_1 \end{pmatrix}$$

κ は $\mathfrak{o}(8)$ の位数 3 の外部自己同型であって

$$\kappa\mathrm{Ad}(I_{4,4})=\mathrm{Ad}(I_{4,4})\kappa,\quad \mathrm{Ad}(I'_{7,1})\kappa\mathrm{Ad}(I'_{7,1})=\kappa^{-1}$$

$(I'_{7,1}=I_{4,4}I_{5,3})$ を満たすものとする。DI-I' 型のときの Σ は

$$\Sigma=\begin{cases} \mathrm{G}_2 & \text{if } q=s=3 \\ \phi & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.1}$$

である。それぞれの Σ の type に対して、$\dim\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha,\lambda)$ の欄の行列は次のことを意味する。

BC_* or B_*	$\begin{pmatrix} d(\pm e_j\pm e_k,1) & d(\pm e_j,1) & d(\pm 2e_j,1) \\ d(\pm e_j\pm e_k,-1) & d(\pm e_j,-1) & d(\pm 2e_j,-1) \\ (\,d(\pm e_j\pm e_k,\pm i) & d(\pm e_j,\pm i) & d(\pm 2e_j,\pm i)\,) \end{pmatrix}$
A_{m-1}	$\begin{pmatrix} d(\alpha,1) \\ d(\alpha,-1) \end{pmatrix}$ for all $\alpha\in\Sigma$
G_2	$\begin{pmatrix} d(\alpha,1) & d(\beta,1) \\ d(\alpha,\pm\omega) & d(\beta,\pm\omega) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \alpha: \text{ short roots} \\ \beta: \text{ long roots} \\ \omega^3=1,\ \omega\neq 1 \end{pmatrix}$

ここで、$d(\alpha,\lambda)=\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha,\lambda)$ であり、BC_*-型、B_*-型のときは $i\mathfrak{a}^*$ の標準的な正規直交基底 $\{e_1,\ldots,e_*\}$ を取る。

B. 例外型

type $\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$ $\mathfrak{l}$	$\mathfrak{g}^{\sigma\tau}$ $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{l}$	Σ	$\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha,\lambda)$
EI − II E_6	$\mathfrak{sp}(4)$ $\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$	F_4 $\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{sp}(1)$	F_4	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$
EV − VI E_7	$\mathfrak{su}(8)$ $\mathfrak{o}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathrm{E}_6\oplus\mathbb{R}$ $\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$		$\begin{pmatrix}2&1\\2&0\end{pmatrix}$
EVIII − IX E_8	$\mathfrak{o}(16)$ $\mathrm{E}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$	$\mathrm{E}_7\oplus\mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{o}(12)\oplus\mathfrak{o}(4)$		$\begin{pmatrix}4&1\\4&0\end{pmatrix}$
EV − VII E_7	$\mathfrak{su}(8)$ $\mathrm{E}_6\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{o}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)\oplus\mathbb{R}$	C_3	$\begin{pmatrix}4&0&1\\4&0&0\end{pmatrix}$
EII − III E_6	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{o}(10)\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{o}(10)\oplus\mathbb{R}$ $\mathfrak{su}(5)\oplus\mathbb{R}^2$	BC_2	$\begin{pmatrix}4&4&1\\2&4&0\end{pmatrix}$
EVI − VII E_7	$\mathfrak{o}(12)\oplus\mathfrak{su}(2)$ $\mathrm{E}_6\oplus\mathbb{R}$	$\mathrm{E}_6\oplus\mathbb{R}$ $\mathfrak{o}(10)\oplus\mathbb{R}^2$		$\begin{pmatrix}6&8&1\\2&8&0\end{pmatrix}$
EI − III E_6	$\mathfrak{sp}(4)$ $\mathfrak{o}(10)\oplus\mathbb{R}$	$\mathfrak{sp}(4)$ $\mathfrak{sp}(2)\oplus\mathfrak{sp}(2)$	BC_2	$\begin{pmatrix}3&4&0\\3&4&1\end{pmatrix}$
EI − IV E_6	$\mathfrak{sp}(4)$ F_4	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$ $\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{sp}(1)$	A_2	$\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$
EII − IV E_6	$\mathfrak{su}(6)\oplus\mathfrak{su}(2)$ F_4	$\mathfrak{sp}(4)$ $\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{sp}(1)$	BC_1	$\begin{pmatrix}8&3\\8&5\end{pmatrix}$
EIII − IV E_6	$\mathfrak{o}(10)\oplus\mathbb{R}$ F_4	F_4 $\mathfrak{o}(9)$	BC_1	$\begin{pmatrix}8&7\\8&1\end{pmatrix}$
FI − II F_4	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{sp}(1)$ $\mathfrak{o}(9)$	$\mathfrak{sp}(3)\oplus\mathfrak{sp}(1)$ $\mathfrak{o}(5)\oplus\mathfrak{o}(4)$	BC_1	$\begin{pmatrix}4&3\\4&4\end{pmatrix}$

ここで $\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha,\lambda)$ の欄の行列の意味は A_2, BC_2, C_3-型のときは古典型の表と同じであり、F_4-型のときは次のことを意味する。(α は short root, β は long root)

$$\begin{pmatrix}\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha,1) & \dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\beta,1)\\ \dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\alpha,-1) & \dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{a},\beta,-1)\end{pmatrix}$$

<u>注意</u> (1) $\mathfrak{g}$ が例外型のとき、任意の involution σ に対し $\pi(G^\sigma) = \pi(G)$ であるから、$\pi(G^\sigma)\backslash\pi(G)/\pi(G^\tau)$ は trivial である。したがって、2つの対称対の組み合わせをすべて考えるだけでよい。[4] Table V を見るとそのような組み合わせはすべて現れている。よって、involution の組の同値類の代表元としてすべて可換なものを取ることができる。

(2) 一方、古典型については、DI-III, AIII-II 型 (p は奇数、$p \neq q$) のときと DI-I' 型のときには involution の組の同値類の代表元として可換なものを取ることはできない。

(3) 前節の (σ, τ_a) のルート系の計算法により、この2つの表から [4] Table V のすべてのデータを導くことができる。σ と τ が G_0-conjugate のときが [4] における "type $(\mathfrak{k}_\varepsilon)$" に対応することに注意しよう。

[1] O. Loos. *Symmetric spaces II.* Benjamin, 1969.

[2] T. Matsuki. 代数群の2つの involution に関する両側剰余類分解 II. In 数理解析研究所講究録 *895*, pages 98–113, 1995.

[3] T. Matsuki. Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions. preprint.

[4] T. Oshima and J. Sekiguchi. The restricted root system of a semisimple symmetric pair. *Advanced Studies in Pure Math.*, 4:433–497, 1984.

[5] W. Rossmann. The structure of semisimple symmetric spaces. *Canad. J. Math.*, 31:157–180, 1979.