数理解析研究所講究録
1010 巻 1997 年 81-88

直観主義命題論理のリンデンバウム代数について

南山大学経営学部
佐々木克巳 (Katsumi SASAKI)

命題変数のある有限集合をVとしたとき，Vから論理記号として$\supset$(含意) だけを用いてできる論理式の集合を$I(V)$とする．さらに，$I(V)$の中でもとくに一番右に出現する変数が$p(\in V)$である論理式を集めた集合を$I(V,p)$とする．また，$A, B \in I(V)$ に対して，２つの論理式 $A \supset B$ と $B \supset A$ がどちらも直観主義命題論理**LJ**で証明可能であることを，$A \equiv_{\mathbf{LJ}} B$ と表すことにする．Urquhart [1] では，商集合$I(V,p)/\equiv_{\mathbf{LJ}}$に，順序$\leq$を

$$[A] \leq [B] \Leftrightarrow B \supset A \in \mathbf{LJ}$$

のように定義し，$(I(V,p)/\equiv_{\mathbf{LJ}}, \leq)$ が有限のBool代数であることが示された．ここでは，$I(V,p)/\equiv_{\mathbf{LJ}}$の各同値類の代表元を具体的に構成する方法を述べる．この方法は論理記号として，$\perp$(矛盾) や$\wedge$(連言) を含む場合にも容易に拡張できる．

まず，いくつかの準備をする．命題変数の有限集合Vを固定し，Vの要素を表すのにアルファベットの小文字を用いることにする．論理式の有限集合Sと命題変数$p \in V$に対して，$S \supset p$ は，次の論理式を表すとする

$$\begin{cases} A_1 \supset (A_2 \supset (\cdots (A_n \supset p) \cdots)) & (S \neq \emptyset) \\ p & (S = \emptyset) \end{cases}$$

ただし，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ はSのすべての要素をある方法で並べた列とする．Sの要素の並べ方は一通りではないが，どのように並べても上の形で得られる論理式は直観主義論理で互いに同等である．命題変数$p \in V$に対して，次の4条件をみたす集合Lを全部集めた集合を$\mathcal{L}(p)$と表す

(1) $\mathbf{LJ} \cap I(V) \subseteq L \subseteq I(V)$,

(2) Lは modus ponens に関して閉じている,

(3) $p \notin L$,

(4) 任意の論理式$A \in I(V)$に対して，$A \in L$または$A \supset p \in L$.

さらに,

$$\mathcal{L} = \bigcup_{p \in V} \mathcal{L}(p)$$

とおき，$\mathcal{L}$の要素をJ, K, Lなどで表すことにする．$L \in \mathcal{L}$に対して，次のような記号を用いる

$pv(L) = \{p \in V | L \in \mathcal{L}(p)\}$,
$v(L) = V \cap L$,
$L\underline{\uparrow} = \{K \in \mathcal{L} | L \subseteq K\}$,
$L \uparrow = L\underline{\uparrow} - \{L\}$,
$L\triangle = \{K \in \mathcal{L} | v(L) \cup pv(L) \subseteq v(K)\} - L \uparrow$.
順序集合 $(\mathcal{L}, \subseteq)$ において，$\mathcal{L}$ 部分集合$L \uparrow$ の極小元を全部集めた集合を $L \uparrow_1$ と表し，$L\triangle$ の極大元を全部集めた集合を$L^{\triangle}$ と表すことにする．$L \uparrow_1 \subseteq L \uparrow, L^{\triangle} \subseteq L\triangle$ である．

補題1([1]). 論理式$F \in I(V, p)$ と，次の3条件をみたす集合Sが与えられている
(1) $\mathbf{LJ} \cap I(V) \subseteq S \subseteq I(V)$,
(2) Sは modus ponens に関して閉じている,
(3) $F \notin S$.
このとき，ある$L \in \mathcal{L}(p)$ が存在して，$S \subseteq L$ かつ $F \notin L$ である．

順序集合(W, R)と，命題変数全体の集合から

$$\{U \in 2^W | x \in U \text{ かつ } xRy \text{ ならば， } y \in U\}$$

への写像Pとが与えられたとき，$M = (W, R, P)$をクリプケモデルといい，Wの要素をworld という．論理式AがMの world x で真であることを$M \models_x A$ と表す．すべての $x \in W$ に対して，$M \models_x A$ となるとき，AはMで真であるといい，$M \models A$ と表す．$M \not\models_x A \supset B$ であるなら，xRy であるようなある $y \in W$ が存在して，$M \models_y A$ かつ $M \not\models_y B$ であることはよく知られている．

[1] は，$L \in \mathcal{L}$ に対して，クリプケモデル$M(L)$を定義し，以下の補題を示した．また，$L \in \mathcal{L}$ に対して，$M(L)$ を帰納的に定義する方法も述べている．これにより，$(L\underline{\uparrow}, \leq)$ の構造を具体的に求めることができる．

定義2([1]). $L \in \mathcal{L}$ に対して，クリプケモデル $M(L)$ を次のように定義する

$$M(L) = (L\underline{\uparrow}, \subseteq, P),$$

ただし，$P(p) = \{K \in L\underline{\uparrow} | p \in K\}$ である．

補題3([1]). 論理式$F \in I(V)$と$L \in \mathcal{L}$が与えられたとき，任意の $K \in L\underline{\uparrow}$ に対して，

$$M(L) \models_K F \quad \Leftrightarrow \quad F \in K.$$

系4.
(i) 論理式$F \in I(V, p)$ に対して，$F \in \mathbf{LJ} \ \Leftrightarrow \ F \in \bigcap_{L \in \mathcal{L}(p)} L$.
(ii) 2つの論理式 $A, B \in I(V, p)$ が与えられたとき，次の2条件は同等である

(1) 任意の $L \in \mathcal{L}(p)$ に対して，$A \in L \Leftrightarrow B \in L$,

(2) $A \equiv_{\mathbf{LJ}} B$,

(iii) $I(V,p)/\equiv_{\mathbf{LJ}} = \{\{A|$ 任意の $L \in \mathcal{L}(p)$ に対して，$A \in L \Leftrightarrow L \in \mathcal{L}'\}|\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}(p)\}$.

また，[1] では，$\mathcal{L}(p)$ の要素の総数は有限個であり，その総数をkとしたとき，$(I(V,p)/\equiv_{\mathbf{LJ}}, \leq)$ はk次元のBool代数であることも示されている．さらに，$\mathcal{L}' \in \mathcal{L}(p)$ が与えられたとき，

$$\text{任意の } K \in \mathcal{L}(p) \text{ に対して，} F(\mathcal{L}') \in K \Leftrightarrow K \in \mathcal{L}'$$

をみたす論理式$F(\mathcal{L}')(\in I(V,p))$ が存在することを示し，その$F(\mathcal{L}')$ が$I(V,p)/\equiv_{\mathbf{LJ}}$ の要素の代表元であることを示した．つまり，$I(V,p)/\equiv_{\mathbf{LJ}} = \{[F(\mathcal{L}')]|\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}(p)\}$ である．しかし，$F(\mathcal{L}')$ を具体的に構成する方法を示してはいなかった．ここでの目的は，この論理式を構成することである．最初に，$\mathcal{L}' = \mathcal{L}(p) - \{L\}$ のときを扱う．つまり，

$$\text{任意の} K \in \mathcal{L}(p) \text{に対して，} \mathcal{F}(L) \in K \Leftrightarrow K \neq L$$

をみたす論理式$\mathcal{F}(L)$ を構成する．その後で，この$\mathcal{F}(L)$ を用いて，一般の$\mathcal{L}'$に対する論理式を構成する．

定義5. $L \in \mathcal{L}(p)$ に対して，集合$\mathcal{H}(L)$ と論理式$\mathcal{F}(L)$ を次のように定義する

$$\mathcal{H}(L) = v(L) \cup \{q \supset p|q \in pv(L)\} \cup \{p \supset q|q \in pv(L)\}$$
$$\cup\{\mathcal{F}(K) \supset p|K \in L\uparrow_1\} \cup \{\mathcal{F}(K)|K \in L^{\triangle}\},$$
$$\mathcal{F}(L) = \mathcal{H}(L) \supset p.$$

明らかに，$\mathcal{F}(L) \in I(V,p)$ である．また，[1] で述べられた$M(L)$ の構成を用いれば，この$\mathcal{F}(L)$ も帰納的に構成できる．($L \in \mathcal{L}(p) \cap \mathcal{L}(q)$ $(p \neq q)$ のとき，同じLに対して，2つの形の$\mathcal{F}(L)$ が存在することになが，それら2つの$\mathcal{F}(L)$ は直観主義論理で同等であるので，このことによる混乱はおこらない．)

主補題6. $L, K \in \mathcal{L}(p), J \in \mathcal{L}$ とするとき，次の(i),(ii) が成立する

(i) $\mathcal{F}(L) \notin K \Leftrightarrow L = K$,

(ii) $\mathcal{F}(L) \notin J \Leftrightarrow L \in J\underline{\uparrow}$.

上の主補題を証明するためにいくつかの補題を示す.

補題7. $L \in \mathcal{L}$ とする．

(i) 論理式の有限集合Sと$p \in pv(L)$ に対して，$S \supset p \notin L \Leftrightarrow S \subseteq L$,

(ii)(cf. [1]) $p \notin v(L)$ が与えられたとき，

$$p \in pv(L) \Leftrightarrow \text{任意の } K \in L\uparrow \text{ に対して，} p \in K$$

(iii) 任意の $L' \in L\uparrow \cup L\triangle$ に対して，$v(L) \cup pv(L) \subseteq v(L')$,
(iv) $V = v(L) \cup pv(L)$ ならば，$L\uparrow = L\triangle = \emptyset$,
(v) 任意の $K \in \mathcal{L}$ に対して，$K = L \Leftrightarrow v(K) = v(L)$ かつ $K\uparrow = L\uparrow$,
(vi) 任意の $p \in pv(L)$ に対して，$q \in pv(L) \Leftrightarrow p \supset q, q \supset p \in L$.

証明. (i) $S \not\subseteq L$ とする．ある $A \in S$ が存在して，$A \notin L$ である．$p \in pv(L)$ だから，$A \supset p \in L$. $S \supset p$ は，$(S - \{A\}) \supset (A \supset p)$ と表せることから，$S \supset p \in L$.

逆は，S の要素の総数 $\#(S)$ についての数学的帰納法で証明する．

$\#(S) = 0$ のとき，$S = \emptyset$ だから，$p \in pv(L)$ を用いて，$S \supset p = p \notin L$.

$\#(S) > 0$ のとき，$\#(S^*) < \#(S)$ であるような任意の S^* に対して，

$$S^* \subseteq L \text{ ならば } S^* \supset p \in L$$

が成立すると仮定する．条件より，ある $A \in S$ が存在する．$S \subseteq L$ とすると，$S - \{A\} \subseteq L$ だから，帰納法の仮定より，$(S - \{A\}) \supset p \notin L$. $A \in S \subseteq L$ だから，$A \supset ((S - \{A\}) \supset p) \notin L$. つまり，$S \supset p \notin L$.

(ii) $p \notin pv(L)$ とする．$p \notin L$ だから，ある $A \in I(V)$ が存在して，$A \supset p \notin L$ かつ $A \notin L$ である．補題1より，ある $K \in L\underline{\uparrow} \cap \mathcal{L}(p)$ が存在して，$A \supset p \notin K$. $K \in \mathcal{L}(p)$ より，$A \in K$ かつ $p \notin K$. よって，$A \notin L$ より，$K \neq L$. 故に，$K \in L\uparrow$. 逆は，[1] で示されている．

(iii) (ii) より自明である．

(iv) $L\uparrow \cup L\triangle \neq \emptyset$ と仮定して，$V \neq v(L) \cup pv(L)$ を導けば十分である．$L\uparrow \cup L\triangle \neq \emptyset$ とすると，$K \in L\uparrow \cup L\triangle$ が存在する．(iii) を用いて，$v(L) \cup pv(L) \subseteq v(K)$ である．また，$K \in \mathcal{L}$ だから，ある $q \in V$ が存在して，$q \in pv(K)$. 故に，$q \notin v(K)$. $v(L) \cup pv(L) \subseteq v(K)$ だから，$q \notin v(L) \cup pv(L)$. よって，$V \neq v(L) \cup pv(L)$ を得る．

(v) $v(K) = v(L)$ かつ $K\uparrow = L\uparrow$ とする．$K = L$ を導くためには，次の同等性を示せば十分である

(∗) 任意の論理式 $F \in I(V)$ に対して，$F \in K \Leftrightarrow F \in L$.

(∗) を F についての数学的帰納法で証明する．

$F \in V$ のとき，$v(K) = v(L)$ より自明である．

$F \notin V$ のとき，(∗) が，F と異なる F のすべての部分論理式に対して成立すると仮定する．条件より，ある $A, B \in I(V)$ に対して，$F = A \supset B$ である．

$A \supset B \notin K$ とする．補題3より，ある $K_1 \in K\underline{\uparrow}$ が存在して，$A \in K_1$ かつ $B \notin K_1$.

$K_1 = K$ の場合には，帰納法の仮定より，$A \in L$ かつ $B \notin L$ であり，補題3を用いて，$A \supset B \notin L$ を得る．

$K_1 \in K\uparrow$ の場合も，$K\uparrow = L\uparrow$ であったから，$K_1 \in L\uparrow$ であり，$A \supset B \notin K_1$だから，$A \supset B \notin L$ を得る．

$A \supset B \notin L$ としたときも，同様にして，$A \supset B \notin K$ を得る．

(vi) $q \in pv(L)$ とする．故に，$q \notin L$である．$p \in pv(L)$ を用いて，$q \supset p \in L$を得る．同様に，$p \notin L$ と $q \in pv(L)$ より，$p \supset q \in L$を得る．

逆に，$p \supset q, q \supset p \in L$ とする．$q \supset p \in L$ と $p \notin L$ より，$q \notin L$．また，$p \in pv(L)$ と (ii) より，任意の$K \in L\uparrow$ に対して，$p \in K$．$p \supset q \in L$ より，任意の$K \in L\uparrow$ に対して，$p \supset q \in K$であり，$q \in K$ でもある．$q \notin L$だったから，(ii) を用いて，$q \in pv(L)$．

主補題6の証明．$X \in \mathcal{L}$に対して，集合$V - (v(X) \cup pv(X))$ の要素の総数をN_X とする．補題 7(iii) より，任意の$L' \in L\uparrow \cup L\triangle$ に対して，$v(L) \cup pv(L) \subseteq v(L')$ であり，$pv(L') \neq \emptyset$ でもあるから, $v(L) \cup pv(L) \subseteq v(L') \neq v(L') \cup pv(L')$ であり，

(1) 任意の$L' \in L\uparrow \cup L\triangle$ に対して, $N_{L'} < N_L$

を得る．

この補題をN_Lについての数学的帰納法で証明する．

(I)$N_L = 0$ のとき，

(2) $V = v(L) \cup pv(L)$

であり，補題 7(iv) より，

(3) $L\uparrow = L\triangle = \emptyset$.

である．よって，$L\uparrow_1 = L^\triangle = \emptyset$ である．さらに，

(4) $\mathcal{H}(L) = v(L) \cup \{q \supset p | q \in pv(L)\} \cup \{p \supset q | q \in pv(L)\}$

も成立する．

まず，(i) の ($\Leftarrow$) を示す．$\mathcal{F}(L) \in K$ とする．$\mathcal{F}(L) = \mathcal{H}(L) \supset p, p \in pv(K)$ より，補題7(i) を用いて，$\mathcal{H}(L) \not\subseteq K$ を得る．よって，ある$A \in \mathcal{H}(L)$ が存在して，

(5) $A \notin K$.

(4) より，A は$v(L), \{q \supset p | q \in pv(L)\}, \{p \supset q | q \in pv(L)\}$ のどれかに属する．$A \in v(L) (\subseteq L)$ のとき，(5) より $L \neq K$．$A \in \{q \supset p | q \in pv(L)\}$ のとき，ある$q \in pv(L)$ に対して，$A = q \supset p$ である．$q \in pv(L)$ より，$q \notin L$．$L \in \mathcal{L}(p)$ より，$q \supset p (= A) \in L$である．(5) を用いて，$L \neq K$ を得る．$A \in \{p \supset q | q \in pv(L)\}$ のときも，同様にして，$L \neq K$ を得る．

次に (i) の ($\Rightarrow$) を示す．$\mathcal{F}(L) \notin K$ とする．$\mathcal{F}(L) = \mathcal{H}(L) \supset p, K \in \mathcal{L}(p)$ より，補題7(i) を用いて，

(6) $\mathcal{H}(L) \subseteq K$

を得る．(3), 補題 7(v) より，$K = L$ を得るためには，次の3つを示せば十分である．

(7) $v(L) \subseteq v(K)$,

(8) $v(K) \subseteq v(L)$,
(9) $K\uparrow = \emptyset$.

(7) は (4),(6) より自明である.

(8) を示す. $r \notin v(L)$ とする. (2) より, この条件は $r \in pv(L)$ と同等である. (6) より, $r \supset p \in K$ である. $K \in \mathcal{L}(p)$ だから, $r \notin K$. つまり, $r \notin v(K)$.

(9) を示す. 補題7(iv) と $v(K) \cup pv(K) \subseteq V$ より, $V \subseteq v(K) \cup pv(K)$ を示せば十分である. $r \in V$ とする. (2) より, $r \in v(L) \cup pv(L)$ である. $r \in v(K)$ のときは, (7) より, $r \in v(K) \cup pv(K)$ である. $r \in pv(L)$ のとき, (4),(6) より, $p \supset r, r \supset p \in \mathcal{H}(L) \subseteq K$ である. よって, 補題7(vi) より, $r \in pv(K)$ である. よって, $r \in v(K) \cup pv(K)$.

(ii) を示す. (i) より, $\mathcal{F}(L) \notin L$. よって, $L \in J\underline{\uparrow}$ と仮定すると, $\mathcal{F}(L) \notin J$.

逆に, $\mathcal{F}(L) \notin J$ と仮定する. 補題1より, ある $J' \in J\underline{\uparrow} \cap \mathcal{L}(p)$ が存在して, $\mathcal{F}(L) \notin J'$. (i) より, $J' = L$ である. よって, $L \in J\underline{\uparrow}$.

(II) $N_L > 0$ のとき, $N_{L^*} < N_L$ であるような任意の L^* に対して, 補題が成立すると仮定する.

まず, (1) の ($\Leftarrow$) を示す. $\mathcal{F}(L) \in K$ とすると (I) と同様に, $\mathcal{H}(L) \not\subseteq K$ を得る. よって, ある $A \in \mathcal{H}(L)$ が存在して,

(10) $A \notin K$.

A は $v(L), \{q \supset p | q \in pv(L)\}, \{p \supset q | q \in pv(L)\}, \{\mathcal{F}(L') \supset p | L' \in L\uparrow_1\}, \{\mathcal{F}(L') | L' \in L^{\triangle}\}$ のどれかに属する. A が最初の3つの集合のいずれかに属するときは (I) と同様に示される. $A \in \{\mathcal{F}(L') \supset p | L' \in L\uparrow_1\}$ のとき, ある $L' \in L\uparrow_1$ に対して, $A = \mathcal{F}(L') \supset p$ である. $L' \in L\uparrow$ であり, (1) を用いると, $N_{L'} < N_L$ だから, 帰納法の仮定より, $\mathcal{F}(L') \notin L$ を得る. $L \in \mathcal{L}(p)$ より, $\mathcal{F}(L') \supset p (= A) \in L$ である. さらに, (10) より, $L \neq K$ を得る.

$A \in \{\mathcal{F}(L') | L' \in L^{\triangle}\}$ のとき, ある $L' \in L^{\triangle}$ に対して, $A = \mathcal{F}(L')$ である. $L' \in L\triangle$ と (1) より, $N_{L'} < N_L$ である. また, $L' \in L\triangle$ より, $L' \notin L\uparrow$ でもある. これと帰納法の仮定より, $\mathcal{F}(L') (= A) \in L$ を得る. さらに, (10) より, $K \neq L$ を得る.

次に (i) の ($\Rightarrow$) を示す. $\mathcal{F}(L) \notin K$ とすると, (I) と同様にして,

(11) $\mathcal{H}(L) \subseteq K$

を得る. 補題 7(v) より, $K = L$ を示すためには, 次の4つを示せば十分である.

(12) $v(L) \subseteq v(K)$,
(13) $L\uparrow \subseteq K\uparrow$.
(14) $v(K) \subseteq v(L)$,
(15) $K\uparrow \subseteq L\uparrow$.

(12) は (11) より自明である.

(13) を示す．$L' \in L\uparrow$とする．次の条件をみたすL_0 が存在する．

(16) $L_0 \in L\uparrow_1$,

(17) $L' \in L_0\underline{\uparrow}$.

(16) と (11) より，$\mathcal{F}(L_0) \supset p \in K$．$L \in \mathcal{L}(p)$ より，$\mathcal{F}(L_0) \notin K$．(16),(1) より，$N_{L_0} < N_L$ だから，帰納法の仮定より，$L_0 \in K\underline{\uparrow}$．一方，$p \in pv(L)$,(16), 補題 7(ii) より，$p \in L_0$．$K \in \mathcal{L}(p)$ より，$K \neq L_0$．よって，$L_0 \in K\uparrow$．(17) を用いて，$L' \in K\uparrow$．

(14) を示す．$r \notin v(L)$ とする．

$r \in pv(L)$ のときは，(11) より，$r \supset p, p \supset r \in K$ だから, 補題7(vi) より，$r \in pv(K), r \notin v(K)$ を得る．

(18) $pv(L) \subseteq pv(K)$,

であることも示されている．

$r \notin pv(L)$ のとき，補題7(ii) より，ある$L_1 \in L\uparrow$ に対して，$r \notin L_1$．(13) より，$L_1 \in K\uparrow$．よって，$r \notin K$ であり，つまり，$r \notin v(K)$．

(15) を示す．$L' \in \mathcal{L} - L\uparrow$ とする．次の2条件の中の少なくとも1つが成立する

(19) $L' \notin L\triangle$,

(20) $L' \in L\triangle$.

成立する条件によって場合分けして，$L' \notin K\uparrow$ を示す．

(19) が成立するとき，$L' \notin L\uparrow$より，$v(L) \cup pv(L) \not\subseteq v(L')$ である．(12) と (18) より，$v(K) \cup pv(K) \not\subseteq v(L')$．補題 7(iii) より，$L' \notin K\triangle \cup K\uparrow$．よって， $L' \notin K\uparrow$．

(20) が成立するとき，次の2条件をみたす L_1 が存在する

(21) $L_1 \in L^{\triangle}$,

(22) $L_1 \in L'\underline{\uparrow}$.

(11) と (21) より，$\mathcal{F}(L_1) \in K$．一方，(1),(21) より，$N_{L_1} < N_L$．よって，帰納法の仮定より，$L_1 \notin K\underline{\uparrow}$．(22) より，$L' \notin K\uparrow$．

(ii) は，(I) と同様に示される．

系8. $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}(p)$ のとき，任意の$L \in \mathcal{L}(p)$ に対して，

$$\{\mathcal{F}(K) | K \in \mathcal{L}'\} \supset p \in L \Leftrightarrow L \in \mathcal{L}'.$$

証明．$\{\mathcal{F}(K) | K \in \mathcal{L}'\} \supset p \notin L$ とする．$L \in \mathcal{L}(p)$ と補題7(i) より，$\{\mathcal{F}(K) | K \in \mathcal{L}'\} \subseteq L$．つまり，任意の $K \in \mathcal{L}'$ に対して，$\mathcal{F}(K) \in L$ である．主補題6(i) より，任意の $K \in \mathcal{L}'$ に対して，$K \neq L$ である．つまり，$L \notin \mathcal{L}'$．

逆も同様に示される．

系4, 系8より，次の定理が成立する．

定理9.

$$I(V,p)/\equiv_{\mathbf{LJ}} = \{[\{\mathcal{F}(K)|K \in \mathcal{L}'\} \supset p]|\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}(p)\}.$$

また，[1]の結果より，$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}(p)$ のとき，$\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$ であれば，

$$[\{\mathcal{F}(K)|K \in \mathcal{L}_1\} \supset p] \neq [\{\mathcal{F}(K)|K \in \mathcal{L}_2\} \supset p]$$

である．

補題3を用いれば，[1]で$F(\mathcal{L}')$を用いて述べたのと同様に，次の系が成立する．

系10. 任意の論理式$F \in I(V,p)$ に対して，
(i) $F \equiv_{\mathbf{LJ}} \{\mathcal{F}(L)|L \in \mathcal{L}_1\} \supset p$,
(ii) $F \equiv_{\mathbf{LJ}} (\{\mathcal{F}(L)|L \in \mathcal{L}_2\} \supset p) \supset p$,
ただし，$\mathcal{L}_1 = \{K \in \mathcal{L}(p)|M(K) \models F\}, \mathcal{L}_2 = \{K \in \mathcal{L}(p)|M(K) \not\models F\}$ である．

証明. (i) L を$\mathcal{L}(p)$の任意の要素とする．系4より，

$$\text{任意の} K \in \mathcal{L}(p) \text{に対して，} F \in K \Leftrightarrow \{\mathcal{F}(L)|L \in \mathcal{L}_1\} \supset p \in K$$

を示せば十分である．$F \in K$ とすると，$K \in \mathcal{L}_1$．よって，$\mathcal{F}(K) \in \{\mathcal{F}(L)|L \in \mathcal{L}_1\}$．ところが，主補題6(i)より，$\mathcal{F}(K) \notin K$ だから，$\{\mathcal{F}(L)|L \in \mathcal{L}_1\} \not\subseteq K$．補題7(i)と$K \in \mathcal{L}(p)$より，$\{\mathcal{F}(L)|L \in \mathcal{L}_1\} \supset p \in K$．

逆に，$\{\mathcal{F}(L)|L \in \mathcal{L}_1\} \supset p \in K$とすると，補題7(i)と$K \in \mathcal{L}(p)$より，$\{\mathcal{F}(L)|L \in \mathcal{L}_1\} \not\subseteq K$. よって，ある$L \in \mathcal{L}_1$が存在して，$\mathcal{F}(L) \notin K$．主補題6(i)より，$L = K$だから，$K \in \mathcal{L}_1$．よって，$F \in K$．

(ii)も同様に示される．

また，$\wedge$を含む論理式を用いると，系10(ii)の右辺の論理式は

$$\mathcal{F}(L_1) \wedge \mathcal{F}(L_2) \wedge \cdots \wedge \mathcal{F}(L_n)$$

と直観主義論理で同等である．ただし，$n = 0$のとき，上の表現は$p \supset p$を表し，$L_1, L_2, \cdots, L_n$は$\mathcal{L}_2$のすべての要素をある方法で並べた列とする．

参考文献

[1] A. Urquhart, Implicational formulas in intuitionistic logic, The Journal of Symbolic Logic, 39, 1974, pp. 661-664.