

# An application of Jankov's characteristic formulas.

志村 立矢 (日本大学理工)

Tatsuya SHIMURA (Nihon Univ.)

## 1 Jankov の定理の拡張.

**Definition 1** 擬ブール代数 (pBa)  $\alpha = \langle A, \cap, \cup, \Rightarrow, \sim, 1, 0 \rangle$  は

$$a \cup b = 1 \text{ ならば } (a = 1 \text{ または } b = 1)$$

をみたすとき strongly connected であるといい, 2 番目に大きな元を持つとき subdirectly irreducible であるという. 以下では, subdirectly irreducible pBa の 2 番目に大きな元を  $\omega$  で表す.

**Definition 2** 論理式の集合の組を理論と呼ぶ.

理論  $(\Gamma, \Delta)$  が pBa  $\alpha$  で充足可能であるとは,  $\alpha$  上の付値  $v$  で任意の  $A_1, A_2, \dots, A_m \in \Gamma$  と  $B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta$  に対し,

$$v((A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n)) \neq 1$$

となるものが存在することとする.

中間論理  $J$  と理論  $(\Gamma, \Delta)$  は, ある  $A_1, A_2, \dots, A_m \in \Gamma$  と  $B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta$  に対し,

$$J \vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n)$$

となるならば  $(\Gamma, \Delta)$  は  $J$  で証明可能であるといい,  $J \vdash \Gamma \rightarrow \Delta$  と記す.

$(\Gamma, \Delta)$  が  $L$  で証明可能でないとき  $L$ -無矛盾であるという.

以下ではしばしば Gentzen の sequent の記法を流用して, たとえば

$$J \vdash \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{A\} \rightarrow \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{B\}$$

を

$$J \vdash \Gamma_1, \Gamma_2, A \rightarrow \Delta_1, \Delta_2, B$$

と表すことにする.

中間命題論理の代数的完全性により,  $(\Gamma, \Delta)$  が  $\mathbf{L}$ -無矛盾ならば,  $\mathbf{L}$  が恒真であるような  $pBa \alpha$  が存在し  $(\Gamma, \Delta)$  は  $\alpha$  で充足可能であることがわかる.

**Lemma 1** 理論  $(\Gamma, \Delta)$  が  $pBa \alpha$  で充足可能ならば,  $\alpha$  の商代数として表すことができる *subdirectly irreducible*  $pBa \beta$  とその上の付値  $v'$  で任意の  $A \in \Gamma$  に対し,  $v'(A) = 1$ , 任意の  $B \in \Delta$  に対し,  $v'(B) \leq \omega$  となるものが存在する.

特に,  $(\Gamma, \Delta)$  が  $\mathbf{J}$ -無矛盾ならば  $\mathbf{J}$  が *valid* な *subdirectly irreducible*  $pBa \beta$  とその上の付値  $v$  で任意の  $A \in \Gamma$  に対し,  $v(A) = 1$ , 任意の  $B \in \Delta$  に対し,  $v(B) \leq \omega$  となるものが存在する.

**Proof.)** 仮定より  $\rho$  上の付値  $V$  で任意の  $A_1, A_2, \dots, A_m \in \Gamma$  と  $B_1, B_2, \dots, B_n \in \Delta$  に対し,

$$v((A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n)) \neq 1$$

となるものが存在するので,  $v(A)$  ( $A \in \Gamma$ ) を含み  $v(B)$  ( $B \in \Delta$ ) を含まないような  $\alpha$  上のフィルターで極大なものが存在する.

このフィルターで  $\alpha$  を割ったものを  $\beta$  とすればよい.

特に,  $\alpha$  を  $\mathbf{J}$  の Lindenbaum algebra とすれば後半の主張を得る. **q.e.d.**

**Definition 3** strongly connected な  $pBa \alpha$  が与えられたとき,  $\alpha$  の各元  $v$  に相異なる命題変数  $p_v$  を対応させ, 論理式の集合  $Y(\alpha)$  を次のように定義する.

$$Y(\alpha) = \{(\neg p_a) \equiv p_{\sim a} \mid a \in \alpha\} \cup \{(p_a \supset p_b) \equiv p_{a \Rightarrow b}, (p_a \wedge p_b) \equiv p_{a \cap b}, (p_a \vee p_b) \equiv p_{a \cup b} \mid a, b \in \alpha\}$$

また,  $X(\alpha)$  を次のように定義し, これを  $\alpha$  の Jankov 理論と呼ぶ.

$$X(\alpha) = (Y(\alpha), \{p_a \mid a \neq 1\}).$$

特に  $\alpha$  が *subdirectly irreducible* のときは  $X(\alpha)$  は次のように定義してもよい.

$$X(\alpha) = (Y(\alpha), \{p_\omega\}).$$

**Definition 4** Jankov 理論  $X(\alpha)$  は  $p_a$  に  $a$  を対応させるという  $\alpha$  上の付値により  $\alpha$  で充足可能である. これを,  $X(\alpha)$  の  $\alpha$  での標準的な refutation と呼ぶ.

**Definition 5**  $\alpha, \beta$  を  $pBa$  とする.

写像  $\varphi: \alpha \rightarrow \beta$  が  $pBa$  の埋め込みであるとは, 次の条件が成立することとする.

$$\varphi(1) = 1, \varphi(0) = 0,$$

$$\varphi(u \cap v) = \varphi(u) \cap \varphi(v),$$

$$\varphi(u \cup v) = \varphi(u) \cup \varphi(v),$$

$$\varphi(u \Rightarrow v) = \varphi(u) \Rightarrow \varphi(v),$$

$$\varphi(\sim v) = \sim \varphi(v).$$

**Theorem 1 (infinite version of Jankov's theorem)**  $\alpha$  を *completely connected pBa* とする. このとき,  $pBa$   $\rho$  に関する次の条件は同等である.

1.  $X(\alpha)$  は  $\rho$  で充足可能である.
2.  $\alpha$  から  $\rho$  の商代数として表せる *subdirectly irreducible pBa*  $\beta$  への埋め込みが存在する.

**Proof** 1.  $\rightarrow$  2. を示す.

Lemma 1 より  $\rho$  の商代数として表せる *subdirectly irreducible pBa*  $\beta$  と付値  $v$  があって  $v(A) = 1$  ( $A \in Y(\alpha)$ ),  $v(p_a) \leq \omega$  ( $a \neq 1$ ) となっている.

$\alpha$  から  $\beta$  への埋め込み  $\varphi$  を  $\varphi(a) = v(p_a)$  により定義できることを示せばよい.

演算を保つこと.

他の場合も同様なので,  $\Rightarrow$  を保つことを示す. まず  $v((p_a \supset p_b) \equiv p_{a \Rightarrow b}) = 1$  より  $v(p_a \supset p_b) = v(p_{a \Rightarrow b})$  が成り立つことに注意する.

$$\begin{aligned} \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b) &= v(p_a) \Rightarrow v(p_b) \\ &= v(p_a \supset p_b) \\ &= v(p_{a \Rightarrow b}) \\ &= \varphi(a \Rightarrow b) \end{aligned}$$

単射であること.

$a \neq b$  ならば  $a \Rightarrow b \neq 1$  または  $b \Rightarrow a \neq 1$  であるから, 一般性を失うことなく  $a \Rightarrow b \neq 1$  と仮定できる.

このとき,  $v(a \Rightarrow b) = v(p_{a \Rightarrow b}) \neq 1$  より,  $v(a) \neq v(b)$  となる. **q.e.d.**

また Jankov [1] と同様に次が成り立つ.

**Lemma 2**  $\alpha$  は *completely connected pBa* とし,  $A$  には  $\{p_a : a \in \alpha\}$  以外の変数は含まれないとする.

1. (Jankov)  $\alpha$  における  $X(\alpha)$  の標準的な *refutation* を  $v$  とし,  $v(C) = a$  とすれば次が成立する.

$$\mathbf{H} \vdash Y(\alpha) \rightarrow (A \equiv p_a).$$

2. 次の条件は同等である.

$$(a) \quad H \vdash Y(\alpha) \rightarrow A,$$

(b)  $X(\alpha)$  の標準的な *refutation* の下で  $A$  は値 1 をとる.

**Proof.** 1. は  $A$  の構成に関する帰納法により容易に証明できる.

2. の (b)  $\rightarrow$  (a) を示す.

1. により  $a \in \alpha$  が存在して  $Y(\alpha)$  の下で  $A$  は  $p_a$  と同等となる. 標準的な *refutation*  $v$  の下で  $v(p_a) = a$  かつ  $v(A) = 1$  となるので  $a = 1$  でなければならない. **q.e.d.**

## 2 擬ブール代数のカテゴリーにおける Jankov の定理.

**Definition 6** カテゴリー  $C$  の対象の族とそれらの間の射の族の組  $\mathcal{D}$  を  $C$  の図式という. 図式  $\mathcal{D}$  上の *co-cone* とは  $C$  の対象  $\alpha$  と  $\mathcal{D}$  の各対象  $\alpha_i$  から  $\alpha$  への射  $\varphi_i$  の組  $\langle \alpha, \{\varphi_i\} \rangle$  で  $\mathcal{D}$  の各射  $\varphi: \alpha_i \rightarrow \alpha_j$  に対し,

$$\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi$$

が成立するものをいう.

**Definition 7** カテゴリー  $C$  の射はすべて単射であるとする.

$C$  の任意の対象  $\alpha, \beta$  に対し, 図式  $\langle \{\alpha, \beta\}, \emptyset \rangle$  上の *co-cone* が常に存在するとき,  $C$  は *joint embedding property* を持つという.

$C$  の任意の射  $\varphi_1: \alpha_0 \rightarrow \alpha_1, \varphi_2: \alpha_0 \rightarrow \alpha_2$  に対し, 図式  $\langle \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}, \{\varphi_1, \varphi_2\} \rangle$  上の *co-cone* が常に存在するとき,  $C$  は *amalgamation property* を持つという.

この節では  $C$  を *subdirectly irreducible pBa* を対象とし, それらの間の埋め込みを射とするカテゴリーとする.

**Definition 8**  $\alpha_i, \alpha_j$  を *subdirectly irreducible pBa* とし,  $\varphi: \alpha_i \rightarrow \alpha_j$  を *pBa* の間の埋め込み写像とする.  $\{p_a^i: a \in \alpha_i\}, \{p_b^j: b \in \alpha_j\}$  を  $\alpha_i, \alpha_j$  の各元に対応する命題変数とする. このとき,  $Y(\varphi)$  を次のように定める.

$$Y(\varphi) = \{p_a^i \equiv p_{\varphi(a)}^j \mid a \in \alpha_i\}.$$

$C$  の図式  $\mathcal{D}$  が与えられたとき,  $Y(\mathcal{D})$  を次のように定義する.

$$Y(\mathcal{D}) = \bigcup Y(\alpha_i) \cup \bigcup Y(\varphi)$$

ただし、和集合は  $\mathcal{D}$  のすべての対象  $\alpha_i$  とすべての射  $\varphi$  をわたるものとする。

また、理論  $X(\mathcal{D})$  を次のように定義し、これを  $\mathcal{D}$  の Jankov 理論と呼ぶことにする。

$$X(\mathcal{D}) = (Y(\mathcal{D}), \{p_a^i \mid i \text{ は } \mathcal{D} \text{ の対象 } \alpha_i \text{ すべてをわたる.}\}).$$

**Theorem 2 (Categorical version of Jankov's theorem)**  $\mathcal{D}$  を  $\mathcal{C}$  の図式とする。このとき、 $pBa \rho$  に関する次の条件は同等である。

1.  $X(\mathcal{D})$  は  $\rho$  で充足可能である。
2.  $\rho$  の商代数として表せる *subdirectly irreducible*  $pBa \alpha$  と、 $\mathcal{D}$  上の *co-cone*  $\langle \alpha, \{\varphi_i\} \rangle$  が存在する。

**Proof.)** 1.  $\rightarrow$  2. を示す。

$\rho$  の商代数として表せる *subdirectly irreducible*  $pBa \alpha$  と付値  $v$  で、 $v(A) = 1 (A \in Y(\mathcal{D}))$ ,  $v(p_a^i) \leq \omega (a \neq 1 \in \alpha_i)$  となるものが存在する。

定理 1 により、各  $\alpha_i$  から  $\alpha$  への埋めこみ  $\varphi_i$  を  $\varphi_i(a) = v(p_a^i) (a \in \alpha_i)$  により定義できる。

$\mathcal{D}$  の射  $\varphi: \alpha_i \rightarrow \alpha_j$  と  $a \in \alpha_i$  に対し  $p_a^i \equiv p_{\varphi(a)}^j \in Y(\varphi)$  となることに注意すると、

$$\varphi_i(a) = v(p_a^i) = v(p_{\varphi(a)}^j) = \varphi_j(\varphi(a))$$

が成り立つので  $\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi$  が示された。 **q.e.d.**

### 3 Maksimova completeness と interpolation property

この節では前節までの結果の応用として、Maksimova の Maksimova completeness と interpolation property に関する証明が自然に導かれることを示す。

**Definition 9** 中間論理  $J$  は  $\text{var}(A, B) \cap \text{var}(C, D) = \emptyset$  であるような論理式  $A, B, C, D$  が

$$J \vdash (A \wedge C) \supset (B \vee D)$$

をみたすならば、

$$J \vdash A \supset B \text{ または } J \vdash C \supset D$$

となるとき、Maksimova complete であるという。

また、

$$J \vdash A \supset B$$

ならば  $\text{var}(C) \subseteq \text{var}(A) \cap \text{var}(B)$  であるような論理式  $C$  で

$J \vdash A \supset C$  かつ  $J \vdash C \supset B$

となるものが存在するとき, interpolation property を持つといい,  $C$  を  $A \supset B$  の interpolant という.

Maksimova は interpolation property を持つような中間命題論理や Maksimova complete である中間命題論理を代数的に特徴づけた.

**Theorem 3 (Maksimova [2, 4])**  $J$  を中間命題論理,  $C$  を  $J$  が恒真であるような *subdirectly irreducible pBa* 全体とその間の埋め込みからなるカテゴリーとする.

1.  $J$  が *Maksimova complete* であるための必要十分条件は,  $C$  が *joint embedding property* を持つことである.
2.  $J$  が *interpolation property* を持つための必要十分条件は,  $C$  が *amalgamation property* を持つことである.

ここでは Theorem 2 の応用として, この定理の必要性の証明が自然に導かれることを示す.

必要性を証明するには, Theorem 2 より次を示せばよい.

**Lemma 3**  $J$  は *Maksimova complete* とする.  $J$  が恒真である任意の *subdirectly irreducible pBa*  $\alpha, \beta$  に対し,  $\mathcal{D} = \langle \{\alpha, \beta\}, \emptyset \rangle$  とすれば,  $X(\mathcal{D})$  は  $J$ -無矛盾である.

**Lemma 4**  $J$  は *interpolation property* を持つとする.  $J$  が恒真である任意の *subdirectly irreducible pBa*  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  と埋め込み  $\varphi_1: \alpha_0 \rightarrow \alpha_1, \varphi_2: \alpha_0 \rightarrow \alpha_2$  に対し,  $\mathcal{D} = \langle \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}, \{\varphi_1, \varphi_2\} \rangle$  とすれば  $X(\mathcal{D})$  は  $J$ -無矛盾である.

**Proof of Lemma 3.)**  $X(\mathcal{D})$  が  $J$  で証明可能と仮定する. すると, Maksimova completeness より  $X(\alpha)$  または  $X(\beta)$  が  $J$  で証明可能となる. ところが  $\alpha, \beta$  で  $J$  が恒真であり,  $X(\alpha), X(\beta)$  がそれぞれ  $\alpha, \beta$  で充足可能だからこれらは  $J$ -無矛盾でなければならない. **q.e.d.**

Lemma 4 の証明には若干の準備が必要である.

**Definition 10 (pile-up operation)** *pBa*  $\alpha$  と  $\beta$  が与えられたとき,  $\alpha$  の最大元  $1_\alpha$  と  $\beta$  の最小元  $0_\beta$  を同一視して得られる集合を  $\alpha \uparrow \beta$  とする.

$\alpha \uparrow \beta$  に順序を次のように定義することができ, この順序に関し  $\alpha \uparrow \beta$  は擬ブール束となる.

$$a \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b \in \alpha \text{ and } a \leq_\alpha b) \\ \text{or } (a \in \alpha \text{ and } b \in \beta) \\ \text{or } (a, b \in \beta \text{ and } a \leq_\beta b) \end{cases}$$

したがって  $\alpha \uparrow \beta$  には  $1_\beta$  を最大元,  $0_\alpha$  を最小元とする  $pBa$  の構造が入るが, 演算  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\Rightarrow$  は次のように定義できる.

$$a \cap b = \begin{cases} a \cap_\alpha b & (a, b \in \alpha) \\ a & (a \in \alpha, b \in \beta) \\ a \cap_\beta b & (a, b \in \beta) \end{cases},$$

$$a \cup b = \begin{cases} a \cup_\alpha b & (a, b \in \alpha) \\ b & (a \in \alpha, b \in \beta) \\ a \cup_\beta b & (a, b \in \beta) \end{cases},$$

$$a \Rightarrow b = \begin{cases} \iota(a \Rightarrow_\alpha b) & (a, b \in \alpha) \\ 1_\beta & (a \in \alpha, b \in \beta) \\ b & (a (\neq 0_\beta) \in \beta, b \in \alpha) \\ a \Rightarrow_\beta b & (a, b \in \beta) \end{cases}.$$

ただし  $a \in \alpha$  に対し,

$$\iota(a) = \begin{cases} a & (a \neq 1_\alpha) \\ 1_\beta & (a = 1_\alpha) \end{cases}$$

と定める.

このとき, 次の事実が容易に証明できる.

**Lemma 5**  $\alpha$  は *subdirectly irreducible pBa* とし,  $\iota: \alpha \rightarrow \alpha \uparrow 2$  を上で定めた写像とすれば, 次が成り立つ.

1.  $\alpha \uparrow 2$  は  $1_\alpha$  を 2 番目に大きな元として持つ *subdirectly irreducible pBa* であり,  $\iota$  は  $pBa$  としての埋めこみである.
2.  $\alpha$  の *subdirectly irreducible pBa*  $\beta$  への埋めこみ  $\varphi$  が  $\varphi(\omega_\alpha) \neq \omega_\beta$  をみたすならば,

$$\varphi'(a) = \begin{cases} \varphi(a) & (a \neq 1_\alpha, 1) \\ 1_\beta & (a = 1) \\ \omega_\beta & (a = 1_\alpha) \end{cases}$$

は  $pBa$  の埋め込みであり,  $\varphi = \varphi' \circ \iota$  が成り立つ.

**Proof of Lemma 4.)** *subdirectly irreducible pBa*  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  と埋め込み  $\varphi_1: \alpha_0 \rightarrow \alpha_1$ ,  $\varphi_2: \alpha_0 \rightarrow \alpha_2$  に対し,  $\mathcal{D} = \{\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}, \{\varphi_1, \varphi_2\}\}$  とすれば

$$\mathbf{J} \vdash Y(\alpha_0), Y(\alpha_1), Y(\varphi_1), Y(\alpha_2), Y(\varphi_2) \rightarrow p_\omega^0, p_\omega^1, p_\omega^2$$

と仮定して矛盾を導けばよい。ここで、 $p_\omega^i$  は  $\alpha_i$  の 2 番目に大きな元  $\omega_i$  に対応する変数である。

まず  $\varphi_1(\omega_0) = \omega_1$  または  $\varphi_2(\omega_0) = \omega_2$  となる場合を考える。一般性を失うことなく  $\varphi_1(\omega_0) = \omega_1$  と仮定してよい。

このとき、 $(p_\omega^0 \equiv p_\omega^1) \in Y(\varphi_1)$  であることと  $\varphi_2(\omega_1) \leq \omega_2$  より、

$$\mathbf{J} \vdash Y(\alpha_0), Y(\alpha_1), Y(\varphi_1), Y(\alpha_2), Y(\varphi_2) \rightarrow p_\omega^2$$

となる。

$\mathbf{J}$  は interpolation property を持つので次をみたすような論理式  $C$  が存在する。

$$\mathbf{J} \vdash Y(\alpha_0), Y(\alpha_1), Y(\varphi_1) \rightarrow C,$$

$$\mathbf{J} \vdash C, Y(\alpha_0), Y(\alpha_2), Y(\varphi_2) \rightarrow p_\omega^2,$$

$$\text{var}(C) \subseteq \{p_a^0 \mid a \in \alpha_0\}.$$

$\alpha_0$  における  $X(\alpha_0)$  の標準的な refutation の下での  $C$  の値を  $a$  とすれば

$$\mathbf{H} \vdash Y(\alpha_0) \rightarrow (C \equiv p_a^0)$$

となるので、はじめから  $C$  は  $p_a^0$  の形であるとしてよい。

$\alpha_1$  での付値  $v_1$  を

$$v_1(p_a^0) = \varphi_1(a) \ (a \in \alpha_0), \ v_1(p_a^1) = a \ (a \in \alpha_1)$$

と定めると、この付値の下で  $Y(\alpha_0), Y(\alpha_1), Y(\varphi_1)$  に属する論理式はすべて値  $1_{\alpha_1}$  をとる。 $\alpha_1$  において  $\mathbf{J}$  は恒真であるので、 $v_1(p_a^0) = \varphi_1(a)$  も値  $1_{\alpha_1}$  をとらねばならない。したがって  $a = 1_{\alpha_0}$  となる。一方

$$\mathbf{J} \vdash p_\omega^0, Y(\alpha_0), Y(\alpha_2), Y(\varphi_2) \rightarrow p_\omega^2,$$

となることと  $\mathbf{J}$  は  $\alpha_2$  で恒真であることより、 $\alpha_2$  での付値  $v_2$  を

$$v_2(p_a^0) = \varphi_2(a) \ (a \in \alpha_0), \ v_2(p_a^2) = a \ (a \in \alpha_2)$$

と定めれば、この付値の下で  $Y(\alpha_0), Y(\alpha_2), Y(\varphi_2)$  に属する論理式はすべて値  $1_{\alpha_2}$  をとるので  $v_2(p_\omega^2) = 1_{\alpha_2}$  でなければならない。これは  $v_2(p_\omega^2) = \omega_2 \neq 1_{\alpha_2}$  と矛盾する。

次に  $\varphi_1(\omega_0) \neq \omega_1$  かつ  $\varphi_2(\omega_0) \neq \omega_2$  の場合を考える。

$\alpha'_0 = \alpha_0 \uparrow 2$  とすれば Lemma 5 により、 $\varphi'_1 : \alpha'_0 \rightarrow \alpha_1$ ,  $\varphi'_2 : \alpha'_0 \rightarrow \alpha_2$  で  $\varphi'_1(1_{\alpha_0}) = \omega_1$ ,  $\varphi'_2(1_{\alpha_0}) = \omega_2$ ,  $\varphi_1 = \varphi'_1 \circ \iota$ ,  $\varphi_2 = \varphi'_2 \circ \iota$  となるものが存在する。

$\mathcal{D}' = \langle \{\alpha'_0, \alpha_1, \alpha_2\}, \{\varphi'_1, \varphi'_2\} \rangle$  には前半の証明が適用でき、 $\mathcal{D}'$  上の co-cone  $(\alpha, \{\psi_0, \psi_1, \psi_2\})$  が存在する。 $(\alpha, \{\psi_0 \circ \iota, \psi_1, \psi_2\})$  が  $\mathcal{D}$  上の co-cone となるのは明らかである。 **q.e.d.**



## 4 様相論理での Jankov の定理.

これまでに述べたことを様相命題論理に対しても考えてみよう. ここでは S4 の拡張に対してその概要を述べる.

**Definition 11**  $(\mathbf{B}, I)$  が位相ブール代数 (tBa) であるとは  $\mathbf{B} = \langle B, \cap, \cup, ^c, 1, 0 \rangle$  がブール代数であり,  $I: B \rightarrow B$  が

$$I1 = 1, I Ia = Ia, Ia \leq a, I(a \cap b) = Ia \cap Ib$$

をみたすこととする.

$(\mathbf{B}, I)$  を位相ブール代数とすれば,

$$a \Rightarrow b = I(a^c \cup b), \sim a = Ia^c$$

としたとき,  $H = \langle \{Ia \mid a \in B\}, \cap, \cup, \Rightarrow, \sim, 1, 0 \rangle$  は擬ブール代数となる. これが subdirectly irreducible のとき,  $(\mathbf{B}, I)$  も subdirectly irreducible という.  $H$  の 2 番目に大きな元を  $\omega$  で表す.

**Definition 12**  $\mathbf{L}$  を様相論理とする. 様相論理の論理式の集合  $S$  が  $\mathbf{L}$ -無矛盾であるとは任意の  $A_1, A_2, \dots, A_n \in S$  に対し,

$$\mathbf{L} \not\vdash \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)$$

となることをいう.

**Definition 13** subdirectly irreducible tBa  $\alpha = (\mathbf{B}, I)$  が与えられたとき,

$$Y(\alpha) = \{(\neg p_a) \equiv p_{a^c}, (\Box p_a) \equiv p_{Ia} \mid a \in \alpha\} \cup \{(p_a \wedge p_b) \equiv p_{a \cap b}, (p_a \vee p_b) \equiv p_{a \cup b} \mid a, b \in \alpha\}$$

$$X(\alpha) = Y(\alpha) \cup \{\neg p_\omega\}$$

とおく.

**Definition 14**  $\alpha_i, \alpha_j$  を subdirectly irreducible tBa とし,  $\varphi: \alpha_i \rightarrow \alpha_j$  を tBa の間の埋め込み写像とする.  $\{p_a^i : a \in \alpha_i\}, \{p_b^j : b \in \alpha_j\}$  を  $\alpha_i, \alpha_j$  の各元に対応する命題変数とする.

このとき,  $Y(\varphi)$  を次のように定める.

$$Y(\varphi) = \{p_a^i \equiv p_{\varphi(a)}^j \mid a \in \alpha_i\}.$$

また,  $\mathcal{D}$  を subdirectly irreducible tBa とその間の埋め込みからなるカテゴリーの図式が与えられたとき,  $Y(\mathcal{D})$  を次のように定義する.

$$Y(\mathcal{D}) = \bigcup Y(\alpha_i) \cup \bigcup Y(\varphi)$$

ただし、和集合は  $\mathcal{D}$  のすべての対象  $\alpha_i$  とすべての射  $\varphi$  をわたるものとする。  
また、 $X(\mathcal{D})$  を次のように定義し、これを Jankov 理論と呼ぶことにする。

$$X(\mathcal{D}) = Y(\mathcal{D}) \cup \{\neg p_\omega^i \mid i \text{ は } \mathcal{D} \text{ の対象 } \alpha_i \text{ すべてをわたる.}\}.$$

このとき、擬ブール代数のときと同様に次が成り立つ。

**Theorem 4 (cf. Theorem 1)**  $\alpha$  を *completely connected pBa* とする。このとき、 $pBa$   $\rho$  に関する次の条件は同等である。

1.  $X(\alpha)$  は  $\rho$  で充足可能である。
2.  $\alpha$  から  $\rho$  の商代数として表せる *subdirectly irreducible pBa* への埋め込みが存在する。

**Theorem 5 (cf. Theorem 2)**  $\mathcal{D}$  を *subdirectly irreducible tBa* とその間の埋め込みからなるカテゴリーの図式とする。このとき、 $tBa$   $\rho$  に関する次の条件は同等である。

1.  $X(\mathcal{D})$  は  $\rho$  で充足可能である。
2.  $\rho$  の商代数として表せる *subdirectly irreducible tBa*  $\alpha$  と、 $\mathcal{D}$  上の *co-cone*  $\langle \alpha, \{\varphi_i\} \rangle$  が存在する。

このカテゴリーでの *amalgamation property* は弱い形の *interpolation property* と同等であることを Maksimova [3] は示した。

**Definition 15**  $L$  を  $S4$  の拡張とする。

$$L \vdash \Box A \supset B$$

ならば  $\text{var}(C) \subseteq \text{var}(A) \cap \text{var}(B)$  であるような論理式  $C$  で

$$L \vdash \Box A \supset C \text{ かつ } L \vdash C \supset B$$

となるものが存在するとき、*interpolation for deducibility* を持つといい、 $C$  を  $\Box A \supset B$  の *interpolant* という。

**Theorem 6 (Maksimova [3, 4])**  $L$  を  $S4$  の拡張、 $C$  を  $L$  が恒真であるような *subdirectly irreducible tBa* 全体とその間の埋め込みからなるカテゴリーとする。

このとき、 $L$  が *interpolation for deducibility* を持つための必要十分条件は、 $C$  が *amalgamation property* を持つことである。

この定理の必要性を示すためには、中間論理の時と同様に次を示せばよい。

**Lemma 6 (cf. Lemma 4)** 様相論理  $\mathbf{L}$  は *interpolation for deducibility* を持つとする。 $\mathbf{L}$  が恒真である任意の *subdirectly irreducible tBa*  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  と埋め込み  $\varphi_1 : \alpha_0 \rightarrow \alpha_1, \varphi_2 : \alpha_0 \rightarrow \alpha_2$  に対し,  $\mathcal{D} = \langle \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}, \{\varphi_1, \varphi_2\} \rangle$  とすれば  $X(\mathcal{D})$  は  $\mathbf{L}$ -無矛盾である。

**Definition 16** *subdirectly irreducible tBa*  $\alpha = (\mathbf{B}, I_\alpha)$  が与えられたとき  $\mathbf{B} \times 2$  上の interior operator  $I$  を次のように定義することができる。

$$I(a, b) = \begin{cases} (I_\alpha a, 0) & ((a, b) \neq (1_\alpha, 1)) \\ (1_\alpha, 1) & ((a, b) = (1_\alpha, 1)) \end{cases}$$

*tBa*  $\alpha \uparrow 2$  を  $\alpha \uparrow 2 = (\mathbf{B} \times 2, I)$  で定義する。

また  $\iota : \alpha \rightarrow \alpha \uparrow 2$  を

$$\iota(a) = \begin{cases} (a, 0) & (a \neq 1_\alpha) \\ (1_\alpha, 1) & (a = 1_\alpha) \end{cases}$$

と定める。

**Lemma 7 (cf. Lemma 5)**  $\alpha$  は *subdirectly irreducible tBa* とし,  $\iota : \alpha \rightarrow \alpha \uparrow 2$  を上で定めた写像とすれば, 次が成り立つ。

1.  $\alpha \uparrow 2$  は  $(1_\alpha, 0)$  を 2 番目に大きな元として持つ *subdirectly irreducible tBa* であり,  $\iota$  は *tBa* としての埋めこみである。
2.  $\alpha$  の *subdirectly irreducible tBa*  $\beta$  への埋めこみ  $\varphi$  が  $\varphi(\omega_\alpha) \neq \omega_\beta$  をみたすならば,

$$\varphi'(a, b) = \begin{cases} \varphi(a) & (b = 0, a \neq 1_\alpha) \\ \varphi(a) \cup \omega_\beta^c & (b = 1, a \neq 1_\alpha) \\ 1_\beta & ((a, b) = (1_\alpha, 1)) \\ \omega_\beta & ((a, b) = (1_\alpha, 0)) \end{cases}$$

は *tBa* の埋め込みであり,  $\varphi = \varphi' \circ \iota$  が成り立つ。

**Proof of Lemma 6.)** (Sketch) 理論  $X(\mathcal{D})$  が  $\mathbf{L}$ -無矛盾でないならば Lemma 7 より

$$\mathbf{L} \vdash Y(\alpha_0), Y(\alpha_1), Y(\varphi_1), Y(\alpha_2), Y(\varphi_2) \rightarrow p_\omega^2$$

と仮定して構わない。  $Y(\alpha_0), Y(\alpha_1), Y(\varphi_1)$  はすべて  $\square$ -論理式なので *intL* が *interpolation for deducibility* を持つことより, 次をみたすような論理式  $C$  が存在する。

$$\mathbf{L} \vdash Y(\alpha_0), Y(\alpha_1), Y(\varphi_1) \rightarrow C,$$

$$\mathbf{L} \vdash C, Y(\alpha_0), Y(\alpha_2), Y(\varphi_2) \rightarrow p_\omega^2,$$

$$\text{var}(C) \subseteq \{p_a^0 \mid a \in \alpha_0\}.$$

Lemma 4 の証明と同様にして  $C = p_1^0$  としてかまわない。よって

$$\mathbf{L} \vdash p_1^0, Y(\alpha_0), Y(\alpha_2), Y(\varphi_2) \rightarrow p_\omega^2,$$

となるがこれは  $\mathbf{L}$  が  $\alpha_2$  で恒真であるという仮定に反する。 **q.e.d.**

**Remark.** Maksimova の Lemma 4,6 の証明は  $v_i(p_a^i) = a$  ( $i = 1, 2; a \in \alpha_i$ ) という valuation  $v_i$  の下で値 1 をとる論理式の集合を  $T_i$  とし,  $T_1 \cup T_2$  の下で同等な論理式を同一視して得られる代数が求めるものであるという構造をしている。

この  $v_i$  は  $X(\alpha_i)$  の  $\alpha$  での標準的な refutation であり,  $Y(\alpha_i)$  は  $T_i$  の理論としての公理化となっているので我々の証明は Maksimova の証明と近いものである。

しかし, Maksimova は同じ証明で interpolation property と super-amalgamation property とが同等であることも示している。現在のところ我々の方法でこれを示すことは筆者にはできていない。

## 参考文献

- [1] Jankov, V., *Relationship between deducibility in the intuitionistic propositional calculus and finite implicational structures*, *Doklady Akademii Nauk SSSR* 151 (1963), 1293-1294.
- [2] Maksimova, L., *Craig's theorem in superintuitionistic logics and amalgamable varieties of pseudo-Boolean algebras*, *Algebra i Logika* 16 (1977), 643-681.
- [3] Maksimova, L., *Craig's theorem in modal logics and amalgamable varieties of topological Boolean algebras*, *Algebra i Logika* 18 (1979), 556-586.
- [4] Maksimova, L., *On variable separation in modal and superintuitionistic logics*, *Studia Logica* 55 (1995), 99-112.