数理解析研究所講究録
1010巻 1997年 113-130

A Characterization of Axiom Schema playing the role of Tertium non Datur in Intuitionistic Predicate Logic

静岡大学理学部　白井古希男　(Kokio Shirai)

1966年、花沢正純氏は論文[1]において,「直観主義命題論理にどのようなaxiom schemaを追加すれば古典命題論理になるか」という問題を提起し,その完全な特徴付けを与えた。

この小論においては、この問題を述語論理の場合に拡張し、その1つの完全解を与える。

花沢氏によるaxiom schemaの特徴付けは、命題論理なので決定可能であるが.述語論理に拡張した我々の場合には当然ながらその特徴付けは決定可能ではない。

さらに1階の自然数論の場合の特徴付けも与えようと意図したが.現在のところまだその予想すら与えることには成功していない。

1 花沢の定理

まず，論文[1]における花沢氏の特徴付けの説明から始める。それは，述語論理の場合の特徴付けの証明は，本質的には花沢の定理に依存するからである。

花沢の定理を述べるために，良く知られているいくつかの定義を準備する。

1.1 (定義) 2-valid

古典命題論理において，formula A が tautology であるとは A に現われる相異なるすべての命題変数の集合から $\{0,1\}$ への関数 v (これを valuation という) をどのように与えても，v から定まる A の真理値 $[\![A]\!]_v$ が 1 を値にもつことである。ここに，1 は真を，0 は偽を表わす。

この小論では，$\{0,1\}$ を 2 と表わし，tautology であることを，2-valid とよぶ。

古典命題論理の完全性定理：

古典命題論理で証明可能なことと 2-valid であることは同値である。

1.2 (定義) Gödel の 3値論理による 3-valid

3値論理は，Łukasiewicz，Post，Gödel，Kleene，McCarthy，Takahashi 等々により多くの異なった3値論理が定義されて

いるが，ここで用いるのは，Gödel [5] によって定義された n 値論理の $n=3$ に相当するものである。

その真理値は $\mathfrak{B}=\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ であり，$\wedge$，$\vee$，$\supset$，$\neg$ の真理値は，

$$[\![A \wedge B]\!] = \min\{[\![A]\!], [\![B]\!]\},$$

$$[\![A \vee B]\!] = \max\{[\![A]\!], [\![B]\!]\},$$

$$[\![A \supset B]\!] = \begin{cases} [\![B]\!] & \text{if} \quad [\![A]\!] > [\![B]\!] \\ 1 & \text{if} \quad [\![A]\!] \leqq [\![B]\!] \end{cases},$$

$$[\![\neg A]\!] = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad [\![A]\!] \neq 0 \\ 1 & \text{if} \quad [\![A]\!] = 0 \end{cases},$$

によって定められる。従って，*formula* A に現われる相異なる命題変数の集合から $\mathfrak{B}$ への関数 *valuation* v を1つ定めるごとに，A の真理値 $[\![A]\!]_v$ が一意的に定まる。ここに不等号は，$0 < \frac{1}{2} < 1$ とする。A が，すべての *valuation* v について $[\![A]\!]_v = 1$ のとき，A を $\mathfrak{B}$-*valid*（花沢の論文[1]では t-*formula*）とよぶ。

1.3　花沢の定理は次のように述べられる。

直観主義命題論理に *axiom schema* $\mathfrak{A}$ を追加したとき，古典命題論理になるための必要十分条件は，

(1) $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$-*valid* である．

(2) $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{B}$-*valid* でない.

の2条件を満たすことである。

1.4 花沢の特徴付けをみたす $\mathfrak{A}$ の例として、良く知られている *schema* に

排中律 : $A \vee \neg A$

二重否定の除去 : $\neg\neg A \supset A$

Peirce の法則 : $((A \supset B) \supset A) \supset A$

細井の法則 : $[(A \supset B) \supset B] \supset [(B \supset A) \supset A]$

その他, $A \vee (A \supset B)$, $(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$ 等々多くのものがある。（例えば、前原[2] 参照）

2 花沢の定理の述語論理への拡張の試み

花沢の定理を述語論理へ拡張しようと試みるとき、最も素直な予想は、定理の (1) と (2) の条件を述語論理での概念におきかえたものであろう。この予想を正確に述べるため、再び定義を与える。簡単のために、*language* には *individual constant* や *function symbol* は含まれていないとしておく。

2.1 (定義) $\mathfrak{L}$-*valid*

A を述語論理での *sentence* とする。真理値の集合を、

$\mathfrak{2}=\{0,1\}$ とする。

$\mathfrak{M}$ が A の $\mathfrak{2}$-structure であるとは，

$\mathfrak{M}=\langle D, p^{\mathfrak{M}}, \cdots, R^{\mathfrak{M}}, \cdots \rangle$ であって，次の 1)〜3)：

1) D は空でない集合．

2) A に現われる各命題変数 p について，$p^{\mathfrak{M}}$ は $\mathfrak{2}$ のいずれかの元を表わす．

3) A に現われる各述語記号 R に対して，例えば R が k-変数ならば，$R^{\mathfrak{M}}$ は $R^{\mathfrak{M}}: D^k \to \mathfrak{2}$ なる関数とする．

をみたすものとする。

$\mathfrak{2}$-structure $\mathfrak{M}$ を 1 つ与えたとき，D の各元 d に対し，$\bar{d}$ という individual constant を，$d_1 \neq d_2$ なら $\bar{d}_1$ と $\bar{d}_2$ が異なるように追加して言語を拡張しておく．すると，$\mathfrak{M}$ によって定まる解釈によって，拡張された language での sentence A に対して，A の真理値 $[\![A]\!]_{\mathfrak{M}}$ が一意的に定まる。ただし，

$$[\![p]\!]_{\mathfrak{M}}=p^{\mathfrak{M}}$$

$$[\![R(\bar{d}_1,\cdots,\bar{d}_k)]\!]_{\mathfrak{M}}=R^{\mathfrak{M}}(d_1,\cdots,d_k)$$ とし，

$$[\![\forall x F(x)]\!]_{\mathfrak{M}}=\min\{[\![F(\bar{d})]\!]_{\mathfrak{M}} : d\in D\}$$

$$[\![\exists x F(x)]\!]_{\mathfrak{M}}=\max\{[\![F(\bar{d})]\!]_{\mathfrak{M}} : d\in D\}$$

と定める。もちろん，∧，∨，⊃，¬ については普通のとうりに定めるのである。したがって，もとの述語論理の sentence に対しても，その真理値が一意的に定まる。

sentence A が，すべての $\mathfrak{L}$-structure $\mathfrak{M}$ について $[\![A]\!]_{\mathfrak{M}}=1$ のとき，A は $\mathfrak{L}$-valid という。

formula A は，その universal closure が $\mathfrak{L}$-valid のとき，$\mathfrak{L}$-valid という。

2.2 （定義） Gödel の $\mathfrak{B}$-valid

A を述語論理の sentence とする。真理値の集合を $\mathfrak{B}=\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ $(0<\frac{1}{2}<1)$ とする。

$\mathfrak{M}$ が A の $\mathfrak{B}$-structure であるとは，2.1 の $\mathfrak{L}$-structure の定義において，$\mathfrak{L}$ を $\mathfrak{B}$ におきかえたものとする。

A の $\mathfrak{B}$-structure $\mathfrak{M}$ を1つ与えたとき，A の真理値 $[\![A]\!]_{\mathfrak{M}}$ が一意的に定まる。sentence A が，すべての A の $\mathfrak{B}$-structure $\mathfrak{M}$ について $[\![A]\!]_{\mathfrak{M}}=1$ のとき，A は $\mathfrak{B}$-valid という。

formula A は，その universal closure が $\mathfrak{B}$-valid のとき，$\mathfrak{B}$-valid という。

2.3 予想

直観主義述語論理に axiom schema $\mathfrak{A}$ を追加したとき，古典述語論理になるための必要十分条件は，

(1) $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{L}$-valid である。

(2) $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{B}$-valid でない。

の2条件を満たすことである。

2.4　しかし，花沢の定理の述語論理への自然な拡張である2.3の予想は成立しない。

例えば，P，Qを相異なる1変数の述語記号とし，

$\mathfrak{A}(P,Q)$ を $\exists x P(x) \vee \forall x \neg Q(x) \vee \exists x (P(x) \supset \forall y Q(y))$ とする。

2.41　$\mathfrak{A}(P,Q)$ は $\mathfrak{L}$-*valid* である。

∵）古典述語論理において，

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(P,Q) &\sim \exists x P(x) \vee \forall x \neg Q(x) \vee (\forall x P(x) \supset \forall y Q(y)) \\ &\sim \exists x P(x) \vee \forall x \neg Q(x) \vee (\neg \forall x P(x) \vee \forall y Q(y)) \\ &\sim (\neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)) \vee (\forall x \neg Q(x) \vee \forall y Q(y)) \\ &\sim (\forall x P(x) \supset \exists x P(x)) \vee (\forall x \neg Q(x) \vee \forall y Q(y))\end{aligned}$$

しかるに，$\forall x P(x) \supset \exists x P(x)$ は古典述語論理で証明可能であるから，$\mathfrak{A}(P,Q)$ は証明可能である。よって，古典述語論理の Soundness Theorem によって，$\mathfrak{A}(P,Q)$ は $\mathfrak{L}$-*valid* である。

2.42　$\mathfrak{A}(P,Q)$ は *not* $\mathfrak{B}$-*valid* である。

∵）a と b を異なる2元とし，$D=\{a,b\}$ とおく。

$P^{\mathfrak{M}}(a)=P^{\mathfrak{M}}(b)=\frac{1}{2}$，$Q^{\mathfrak{M}}(a)=0$，$Q^{\mathfrak{M}}(b)\geqq\frac{1}{2}$ とする。

$\mathfrak{M}=\langle D, P^{\mathfrak{M}}, Q^{\mathfrak{M}}\rangle$ とおくと，$\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{A}(P,Q)$ の $\mathfrak{B}$-*structure* の1つである。

$[\![\exists x P(x)]\!]_{\mathfrak{M}}=\frac{1}{2}$　　……①

$[\![\forall x \neg Q(x)]\!]_{\mathfrak{M}} = 0$ ……②

∵ $[\![\neg Q(\bar{b})]\!]_{\mathfrak{M}} = 0$

$[\![\exists x (P(x) \supset \forall y Q(y))]\!]_{\mathfrak{M}} = 0$ ……③

∵ $[\![Q(\bar{a})]\!]_{\mathfrak{M}} = 0$ より $[\![\forall y Q(y)]\!]_{\mathfrak{M}} = 0$

$[\![P(\bar{a}) \supset \forall y Q(y)]\!]_{\mathfrak{M}} = 0$, $[\![P(\bar{b}) \supset \forall y Q(y)]\!]_{\mathfrak{M}} = 0$

①～③ より $[\![\mathfrak{A}(P,Q)]\!]_{\mathfrak{M}} = \frac{1}{2} \neq 1$

2.43 p, q を異なる命題変数とし，

$\mathfrak{L}(p,q)$: $p \vee \neg q \vee (p \supset q)$ とおくと，$\mathfrak{L}(p,q)$ は $\mathfrak{B}$-valid である。

∵ $v(p)=1$ なら $[\![p]\!]_v = 1$ ∴ $[\![\mathfrak{L}(p,q)]\!]_v = 1$

$v(q)=0$ なら $[\![\neg q]\!]_v = 1$ ∴ $[\![\mathfrak{L}(p,q)]\!]_v = 1$

$v(p)=0$ or $v(q)=1$ なら，$[\![p \supset q]\!]_v = 1$ ∴ $[\![\mathfrak{L}(p,q)]\!]_v = 1$

それ以外のとき，$v(p)=v(q)=\frac{1}{2}$ ∴ $[\![p \supset q]\!]_v = 1$ ∴ $[\![\mathfrak{L}(p,q)]\!]_v = 1$

2.44 直観主義述語論理に $\mathfrak{A}(P,Q)$ からえられる schema を追加して得られる体系を $\mathcal{S}$ とする。

2.441 $\mathcal{S}$ は古典述語論理の部分体系である。

∵ $LJ \subset \mathcal{S}$

2.41 より $LK \vdash \mathfrak{A}(P,Q)$

∴ $\mathfrak{A}(P,Q)$ に述語論理の formula を代入して得られるすべての formula は LK-provable。よって，$\mathcal{S}$ は LK の部分体系である。

2.442 S は古典述語論理の真の部分体系である。

∵ 仮に，S が LK と一致したとする。

命題変数 r を1つ固定すると，LK $\vdash r \vee \neg r$ ∴ $S \vdash r \vee \neg r$

∴ LJ $\vdash \alpha_1, \cdots, \alpha_n \rightarrow r \vee \neg r$ となる n がある。ここに，

各 α_i は，$\alpha(P, Q)$ に述語論理の *formula* を代入して得られる *formula* の *universal closure* である。

さて，ここで，p，q を異なる命題変数として，$\mathcal{L}(p, q)$

を，$p \vee \neg q \vee (p \supset q)$ とおく。

命題論理の LJ に，$\mathcal{L}(p, q)$ からえられる *Schema* を追加して得られる命題論理の体系を S° とする。

α_i から全称作用素と存在作用素をすべて取り除き，述語記号に対象変数を代入した表現を，命題変数におきかえたものを α_i° とかくことにする。ただし，同じ述語記号をもつ表現は同じ命題変数で，異なる述語記号をもつ表現は，異なる命題変数で，おきかえる。これを，*sequent*

$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \rightarrow r \vee \neg r$ の LJ の証明図全体で，同時に行うものとする。すると，α_i° は，$\mathcal{L}(p, q)$ に命題論理の *formula* を代入したものになるから，

S° から，$r \vee \neg r$ が証明可能となる。

よって，S° は古典命題論理になる。

1.3 で述べた花沢の定理より $\mathcal{L}(p, q)$ は *not* $\mathcal{B}$-*valid*。

しかるに，2.43 より $\mathfrak{L}(p,q)$ は $\mathfrak{B}$-valid。よって矛盾する。故に，S は LK と一致することはない。

3 述語論理における特徴付け定理

3.1 定理を述べる前に．まず定義を与える。

$\mathfrak{A}$ を述語論理の formula とする。$\mathfrak{A}$ に含まれる相異なる述語記号を $R_1, \cdots, R_m$ とする。$\mathfrak{A}$に含まれない異なる命題変数を $p_1, \cdots, p_m$ とする。

このとき，命題論理の formula $\mathfrak{A}^\circ$ を以下のように帰納的に定義する。

1. $\mathfrak{A}$が命題変数のとき，$\mathfrak{A}^\circ$は $\mathfrak{A}$ 自身とする。
2. $\mathfrak{A}$が $R_i(t_1, \cdots, t_k)$ のとき，$\mathfrak{A}^\circ$ は p_i とする $(1 \leqq i \leqq m)$。
3. $(\neg\mathfrak{A})^\circ$ は $\neg(\mathfrak{A}^\circ)$ とする。
4. $(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{L})^\circ$ は $(\mathfrak{A}^\circ)\wedge(\mathfrak{L}^\circ)$ とする。$\vee$，$\supset$ のときも同様。
5. $(\forall x\mathfrak{F}(x))^\circ$ は $(\mathfrak{F}(a))^\circ$ とする。$\exists$ のときも同様。
6. 以上．

3.11　$\mathfrak{A}$が $\mathfrak{L}$-valid ならば，$\mathfrak{A}^\circ$は $\mathfrak{L}$-valid である。

　　$\mathfrak{A}$が $\mathfrak{B}$-valid ならば，$\mathfrak{A}^\circ$は $\mathfrak{B}$-valid である。

∵) $\mathfrak{A}^\circ$に現われる異なる命題変数の全体を $p_1, \cdots, p_m, p_{m+1}, \cdots, p_n$ とする。$p_{m+1}, \cdots, p_n$ は $\mathfrak{A}$に現われるすべての相異な

る命題変数とし，$p_1, \cdots, p_m$ は，$\mathfrak{A}$ に現われるすべての相異なる述語記号 $R_1, \cdots, R_m$ に対応する命題変数とする。

v を任意の valuation とする。

$D = \{a\}$ とし，$p_i^{\mathfrak{M}} = v(p_i)$ $(m+1 \leqq i \leqq n)$,

$R_i^{\mathfrak{M}} : D^k \to \mathbf{2}$ を，$R_i^{\mathfrak{M}}(a, \cdots, a) = v(p_i)$ $(1 \leqq i \leqq m)$ と定める。ここに，R_i は k 変数とする。

$\mathfrak{M} = \langle D, R_1^{\mathfrak{M}}, \cdots, R_m^{\mathfrak{M}}, p_{m+1}^{\mathfrak{M}}, \cdots, p_n^{\mathfrak{M}} \rangle$ とおくと，$\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{A}$ の $\mathbf{2}$-structure で，$\mathfrak{A}$ が $\mathbf{2}$-valid より $[\![\mathfrak{A}]\!]_{\mathfrak{M}} = 1$ となる。しかるに，$\mathfrak{M}$ の定義より，$[\![\mathfrak{A}]\!]_{\mathfrak{M}} = [\![\mathfrak{A}^\circ]\!]_v$ 。$\therefore$ $[\![\mathfrak{A}^\circ]\!]_v = 1$.

v は任意の valuation より，$\mathfrak{A}^\circ$: $\mathbf{2}$-valid になる。

$\mathbf{3}$-valid のときも同様である。

3.12 $\mathfrak{A}^\circ$ が $\mathbf{2}$-valid でも，$\mathfrak{A}$ が $\mathbf{2}$-valid とは限らない。

$\mathfrak{A}^\circ$ が $\mathbf{3}$-valid でも，$\mathfrak{A}$ が $\mathbf{3}$-valid とは限らない。

例1. P を 1 変数述語記号とし，

$\mathfrak{A}(P)$: $\forall x P(x) \vee \neg \exists x P(x)$ とすると，

$D = \{a, b\}$ $(a \neq b)$，$P^{\mathfrak{M}}(a) = 1$，$P^{\mathfrak{M}}(b) = 0$ によって，

$\mathfrak{M} = \langle D, P^{\mathfrak{M}} \rangle$ を定義すると，$\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{A}(P)$ の $\mathbf{2}$-structure

$[\![\forall x P(x)]\!]_{\mathfrak{M}} = 0$，$[\![\exists x P(x)]\!]_{\mathfrak{M}} = 1$ $\therefore$ $[\![\neg \exists x P(x)]\!]_{\mathfrak{M}} = 0$

$\therefore$ $[\![\mathfrak{A}(P)]\!]_{\mathfrak{M}} = 0$ $\therefore$ $\mathfrak{A}(P)$ は not $\mathbf{2}$-valid である。

しかし，$\mathfrak{A}(P)^\circ$ は $p \vee \neg p$ $\therefore$ $\mathfrak{A}(P)^\circ$ は $\mathbf{2}$-valid である。

2. $\mathfrak{A}^\circ$ が $\mathfrak{B}$-valid であるが，$\mathfrak{A}$ が not $\mathfrak{B}$-valid の例は，既に，2.42，2.43 で与えてある。

3.13 補題 Γ を述語論理の formula の有限列，Θ を高々長さ 1 の述語論理の formula の有限列とする。

式 $\Gamma \to \Theta$ が LJ で証明可能ならば，命題論理の式 $\Gamma^\circ \to \Theta^\circ$ は 命題論理の LJ で証明可能である。

証明. $\Gamma \to \Theta$ における LJ の証明図を $\mathbb{P}$ とし，$\mathbb{P}$ に現われる相異なる述語変数の全体を $R_1, \cdots, R_m$ とし，$\mathbb{P}$ に現われない相異なる命題変数を $p_1, \cdots, p_m$ とする。$\mathbb{P}$ の各 formula A を 3.1 の定義による A° でおきかえれば，$\Gamma^\circ \to \Theta^\circ$ の命題論理での証明図になっている。

3.14 $q_1, \cdots, q_n$ を相異なる命題変数，$R_1, \cdots, R_m$ を相異なる述語記号とする。これらからできる述語論理の formula を $\mathfrak{A}(q_1, \cdots, q_n, R_1, \cdots, R_m)$ とし，この formula の $q_1, \cdots, q_n, R_1, \cdots, R_m$ に述語論理の formulas $A_1, \cdots, A_n, B_1, \cdots, B_m$ を代入してえられる formula を $\mathfrak{A}$ とする。ただし，必要があれば，束縛変数の名称を適当に変更するものとする。すると，$\mathfrak{A}^\circ$ は，$\mathfrak{A}(q_1, \cdots, q_n, R_1, \cdots, R_m)^\circ$ に $A_1^\circ, \cdots, A_n^\circ, B_1^\circ, \cdots, B_m^\circ$ を代入したものに等しい。

3.2 定理

直観主義述語論理に axiom schema $\mathfrak{A}$ を追加した体系 S が古典述語論理になるための必要十分条件は

(1) $\mathfrak{A}$ が Ω-valid である.

(2) $\mathfrak{A}^{\circ}$ が not $\mathfrak{B}$-valid である.

を満たすことである。

3.21 証明

3.211 必要性

$S = LK$ とすると, $LK \vdash \mathfrak{A}$

$\therefore$ 古典述語論理の Soundness Theorem より $\mathfrak{A}$ は Ω-valid …①

$S = LK$ とすると, $LK \vdash r \vee \neg r$ $\therefore S \vdash r \vee \neg r$

ここに, r は命題変数である。

$\therefore$ $LJ \vdash \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n \rightarrow r \vee \neg r$ となる自然数 n と, $\mathfrak{A}$ への代入の universal closure $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n$ がある。

3.13 の補題より, 命題論理の LJ において sequent

$\mathfrak{A}_1^{\circ}, \cdots, \mathfrak{A}_n^{\circ} \rightarrow r \vee \neg r$ が証明可能である。

しかるに, 直観主義命題論理に $\mathfrak{A}^{\circ}$ を axiom schema として追加した体系を S° とすると,

3.14 より $S^{\circ} \vdash \mathfrak{A}_i^{\circ}$ $\therefore$ $S^{\circ} \vdash r \vee \neg r$

$\therefore$ S° は古典命題論理に等しい。

よって, 1.3 の花沢の定理より $\mathfrak{A}^{\circ}$ は not $\mathfrak{B}$-valid ……②

∴ ①, ② より，必要性がいえた.

3.212　十分性

(1) $\mathfrak{A}$ が 2-valid で，(2) $\mathfrak{A}^\circ$ が not 3-valid とする。

$LJ \subset LK$ であり,

(1) より $\mathfrak{A}$: 2-valid ∴古典述語論理の完全性定理(Gödel)

より，$LK \vdash \mathfrak{A}$　　∴　$S \subset LK$ ……①

次に，$S \supset LJ$ ……②

$\mathfrak{A}$ に代入された formula は，S から証明可能であるから，

$\mathfrak{A}$ の異なるすべての述語記号を $R_1, \cdots, R_m$ とし，$\mathfrak{A}$ にない相異なる命題変数を $p_1, \cdots, p_m$ とすれば，$\mathfrak{A}$ の $R_1, \cdots, R_m$ に $p_1, \cdots, p_m$ を代入した formula $\mathfrak{B}$ も S で証明可能である。

しかるに，$LJ \vdash \mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}^\circ$

∴ $S \vdash \mathfrak{A}^\circ$ ……③

S° を直観主義命題論理に $\mathfrak{A}^\circ$ を axiom schema として追加した体系とすると，②, ③ より　$S \supset S^\circ$ ……④

しかも，(1) より 3.11 によって，$\mathfrak{A}^\circ$ は 2-valid である。

一方，(2) より $\mathfrak{A}^\circ$ は not 3-valid である.

よって，花沢の定理より，S° は古典命題論理になる。

∴ ④ より　$S \vdash r \vee \neg r$ ……⑤

②, ⑤ より　$S \supset LK$ ……⑥

①, ⑥ より　$S = LK$　よって，十分性がいえた。

3.3 定理の条件 (1), (2) をみたす例をいくつかあげておく。

$\neg \forall x A(x) \vee \exists x A(x)$, $\exists x(A(x) \vee \neg A(x))$, $\forall x \exists y(A(x,y) \vee \neg A(x,y))$

$\exists y \forall x(A(x,y) \vee \neg A(x,y))$, $\forall x \forall y(A(x,y) \vee \neg A(x,y))$,

$\exists x \exists y(A(x,y) \vee \neg A(x,y))$

$\forall x A(x) \vee \exists x \neg A(x)$, $\forall x(A(x) \vee \exists y \neg A(y))$

$\exists x[\exists y\{\exists z A(y,z) \wedge A(x,y)\} \vee \neg A(x,x)]$

$[(\forall x A(x) \supset \exists y B(y)) \supset \exists x A(x)] \supset \exists x A(x)$

$[(\forall x A(x) \supset \exists y B(y)) \supset \forall x A(x)] \supset \exists x A(x)$

$\exists y[A(y) \vee \forall x(A(x) \supset B)]$ 　B に x はない。

$\forall x(\neg\neg A(x) \supset A(x))$, $\exists x(\neg\neg A(x) \supset A(x))$, $\neg \exists x \neg A(x) \supset \forall y A(y)$

$\neg \forall x \neg A(x) \supset \exists y A(y)$, $\forall x \neg\neg A(x) \supset \forall x A(x)$,

$\forall x \neg\neg A(x) \supset \exists x A(x)$

$\neg\neg \forall x A(x) \supset \exists x A(x)$

4 自然数論における特徴付けについて．

ここにいう自然数論とは1階の自然数論のことであって古典自然数論は通常 *Peano arithmetic*，直観主義自然数論は *Heyting arithmetic* とよばれている。両者の相異は論理だけであり，

Language は，*individual constant* 0，*function symbols* と

しては，1変数の successor を表わす ′ の他に，加法と乗法を表わす2変数の function symbols ＋，× が入っているとする。述語記号は2変数の等号 ＝ だけとする。

axioms としては，equality axioms の外に，＋と×に関する defining axioms があり，その他に自然数に関する axioms

$\forall x \neg (x' = 0)$ ，$\forall x \forall y (x' = y' \supset x = y)$ ，mathematical induction の schema：∀J

$$[F(0) \wedge \forall x (F(x) \supset F(x'))] \supset \forall x F(x)$$

をもっているとする。

4.1　3.2 で述べた (1)，(2) をみたす $\mathfrak{A}$ に自然数論の formulas を任意に代入したもの（universal closure をとったもの）を axiom schema とすれば，axiom schema $\mathfrak{A}$ を HA に追加すれば，PA が得られることは明らかである。

4.2　Troelstra [3] によれば，HA に axiom schema

$\forall x (C \vee F(x)) \supset C \vee \forall x F(x)$　（C に x はない）

を追加すれば，PA がえられる。従って，これを導く axiom schema，例えば $\exists x \forall y (F(x) \supset F(y))$ なども HA に追加すれば，PA がえられる。

p を命題変数，R を1変数の述語記号とするとき，

$$\forall x(p \vee R(x)) \supset p \vee \forall x R(x)$$

は $\mathcal{B}$-valid であるが，HA には VJ があるので，prime formula に対する排中律は証明でき，従って formula A の degree に関する帰納法で，$A \vee \neg A$ の universal closure が上記の $\mathcal{B}$-valid formula から得られる schema を用いて証明可能になるのである。

4.3 その他に，$\neg\neg\exists x R(x) \supset \exists x \neg\neg R(x)$ も $\mathcal{B}$-valid であるが，これからえられる axiom schema を HA に追加すれば，やはり PA がえられる。

4.4 VJ に関係する axiom schema としては，

$\exists x A(x) \supset \exists x[A(x) \wedge \forall y(y<x \supset \neg A(y))]$ (Least number Principle)

や，

$\forall x[\exists y\{y<x \wedge A(y) \wedge \forall z(z<y \supset \neg A(z))\} \vee \forall y\{y<x \supset \neg A(y)\}]$

などを HA に追加しても，PA がえられる。

4.5 自然数論になると VJ があるため，状態はずっと複雑になり，現在のところ，私には予想を提出することもできない。

References

[1] M. Hanazawa, A characterization of axiom schema playing the role of Tertium non Datur in intuitionistic logic, Proc. Jap. Acad., 42, No.9 (1966), pp. 1007～1010.

[2] 前原昭二，数理論理学序説 (1966)，共立全書 160.

[3] A.S. Troelstra (ed.), Mathematical investigation of intuitionistic arithmetic and analysis, Lecture notes in mathematics 344 (Springer, Berlin. Heidelberg. New York, 1973).

[4] A.S. Troelstra and D. van Dalen, Constructivism in Mathematics an introduction vol.1 (North-Holland, Amsterdam, 1988).

[5] K. Gödel, Zum intuitionistschen Aussagenkalkül (1932), Translated in S. Feferman, ed. Kurt Gödel collected works vol.1, (Oxford univ. press, New York, Clarendonpress, Oxford, 1986)