数理解析研究所講究録
1012巻 1997年 191-197

Applications of the Schwarz Lemma in $\mathbb{C}^n$

東京電機大学　鶴見和之 (Kazuyuki Tsurumi)

1.

単位円内の正則函数の値域の決定は，複素力学系，単葉函数論等において，重要である。その決定において重要な役割を演ずるのがSchwarz Lemmaである。

本講では，$\mathbb{C}^n$ のSchwarz Lemmaによる，$\mathbb{C}^n$ の単位球 $\mathbb{B}$ から $\mathbb{C}^n$ への正則写像の値域の決定を与える。これらは単葉写像の考察の一助となるものである。併せて，他のSchwarz Lemmaの応用をも考察する。

2.

$\mathbb{C}^n$ の点を列ベクトル $z := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ で表し，$z' := (z_1, \cdots, z_n)$ (転置)，$z^* := (\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n)$ (転置共役) と表す。

$z, w \in \mathbb{C}^n$ に対して，$\langle z, w \rangle := w^* z = \sum \bar{w}_j z_j$，

$\|z\| := \sqrt{z^* z} := \sum |z_j|^2$ とおく。また，$\mathbb{B}_r :=$

$= \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < r \}$ $(r > 0)$, $\mathbb{B} := \mathbb{B}_1$ とおく。

$a \in \mathbb{B}$ に対して

$$P(z) := P_a(z) := \frac{a^* z}{\|a\|^2} a \ (a \neq 0), \quad P_0(z) := 0$$

$$s_a := \sqrt{1 - \|a\|^2}, \qquad Q_a(z) := (I - P)(z) \ (I; \text{identity})$$

$$\varphi_a(z) := \frac{a - P_a(z) - s_a Q_a(z)}{1 - a^* z}$$

とおく。これはまた、次の様にも書ける：

$$\varphi_a(z) = \sqrt{1 - \|a\|^2} \, (I - a a^*)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{z - a}{1 - a^* z},$$

このとき、次の定理が成り立つ；

<u>定理 A.</u> ([2], p.26, Theorem 2.2.2).

次の事が成り立つ：

(i) $\varphi_a(0) = a, \quad \varphi_a(a) = 0$

(ii) $\varphi_a'(0) = -s^2 P - sQ, \quad \varphi_a'(a) = -\frac{P}{s^2} - \frac{Q}{s}$

(iii) $$1 - \langle \varphi_a(z), \varphi_a(w) \rangle = \frac{(1 - \|a\|^2)(1 - \langle z, w \rangle)}{(1 - \langle z, a \rangle)(1 - \langle a, w \rangle)}$$
$(z, w \in \mathbb{B})$

(iv) 特に、

$$1 - \|\varphi_a(z)\|^2 = \frac{(1 - \|a\|^2)(1 - \|z\|^2)}{|1 - \langle z, a \rangle|^2}.$$

(v) $\varphi_a(z)$ は involution である。

(vi) $\varphi_a(z)$ は $\mathbb{B}$ の automorphism であり，$\overline{\mathbb{B}}$ から $\overline{\mathbb{B}}$ への同相写像である。

<u>定理B</u>.（[2], p.161, Theorem 8.1.2）。Ω_1 を $\mathbb{C}^n$ の balanced な領域とし，Ω_2 を $\mathbb{C}^m$ の balanced, 凸, 有界な領域とする。$F: \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ を正則写像とする。このとき，

(i) $F'(0)$ は Ω_1 を Ω_2 に写す。

(ii) $F(0) = 0$ ならば，$F(r\Omega_1) \subset r\Omega_2 \ (0 < r \leqq 1)$ である。

<u>定理 C</u>.（[2], p.162, Theorem 8.1.3）. $\mathbb{B}$ を $\mathbb{C}^n$ の単位球，$\widetilde{\mathbb{B}}$ を $\mathbb{C}^m$ の単位球とし，$F: \mathbb{B} \to \widetilde{\mathbb{B}}$ を正則写像で，$F'(0)$ が $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^m$ への正則写像ならば，

$$F(z) = F'(0)z \qquad (z \in \mathbb{B})$$

が成り立つ。

<u>定理 D</u>.（[2], p.163, Theorem 8.1.4）. $f: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, $a \in \mathbb{B}$ とすると，

$$\| \varphi_{f(a)}(f(z)) \| \leqq \| \varphi_a(z) \|$$

これは次の様に書ける；

$$\frac{|1-\langle f(z), f(a)\rangle|^2}{(1-\|f(z)\|^2(1-\|f(a)\|^2)} \leqq \frac{|1-\langle z, a\rangle|^2}{(1-\|z\|^2)(1-\|a\|^2)}。$$

3。

$\mathcal{H}(\mathbb{B})$ を $\mathbb{B}$ から $\mathbb{C}^n$ への正則写像の全体.

<u>定理 1.</u> $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$, $\|f(z)\| < 1$, $0 < r < 1$ ならば, $z \in \mathbb{B}$, $(\|z\| = r)$ に対して, 次の式が成り立つ：

$$\frac{\|f(0)\| - r}{1 - \|f(0)\| r} \leqq \|f(z)\| \leqq \frac{\|f(0)\| + r}{1 + \|f(0)\| r}$$

(証明) 定理D において, $a = 0$ とおくと

$$\frac{|1-\langle f(\overset{z}{\cancel{a}}), f(0)\rangle|^2}{(1-\|f(z)\|^2)(1-\|f(0)\|^2)} \leqq \frac{1}{(1-\|z\|^2)}$$

ここで, $\|z\| = r$ より

(1)
$$|1-\langle f(z), f(0)\rangle|^2 (1-r^2) \leqq (1-\|f(z)\|^2)(1-\|f(0)\|^2)$$

また, $|\langle f(z), f(0)\rangle| \leqq \|f(z)\|\,\|f(0)\|$ より

(2) $(1-\|f(z)\|\cdot\|f(0)\|)^2 \leqq |1-\langle f(z), f(0)\rangle|^2$

(1), (2) より, 次の式を得る：

$$(1-\|f(z)\|\cdot\|f(0)\|)^2(1-r^2)$$
$$\leqq (1-\|f(z)\|^2)(1-\|f(0)\|^2)$$

$$\therefore\quad (1-\|f(z)\|\|f(0)\|)^2-(1-\|f(z)\|^2)(1-\|f(0)\|^2)$$
$$=\|f(z)\|^2-2\|f(z)\|\cdot\|f(0)\|+\|f(0)\|^2$$
$$=(\|f(z)\|-\|f(0))^2$$
$$\leqq r^2(1-\|f(z)\|\cdot\|f(0)\|)^2$$

$$\therefore\quad -r(1-\|f(z)\|\|f(0)\|)\leqq\|f(z)\|-\|f(0)\|$$
$$\leqq r(1-\|f(z)\|\|f(0)\|)$$

これより

$$\|f(z)\|(1+r\|f(0)\|)\leqq r+\|f(0)\|$$
$$\|f(z)\|(1-r\|f(0)\|)\geqq r-\|f(0)\|$$

$$\therefore\quad \frac{r-\|f(0)\|}{1-r\|f(0)\|}\leqq\|f(z)\|\leqq\frac{r+\|f(0)\|}{1+r\|f(0)\|}. \quad \lrcorner$$

__定理 2.__ $f(z)\in\mathcal{H}(\mathbb{B})$, $\|f(z)\|<M$, $0<r<1$ ならば, $z\in\mathbb{B}$ $(\|z\|=r)$ に対して, 次の式が成り立つ:

$$(3)\quad \frac{M(\|f(0)\|-Mr)}{M-\|f(0)\|r}\leqq\|f(z)\|\leqq\frac{M(\|f(0)\|+Mr)}{M+\|f(0)\|r}$$

(証明) $g(z)=\dfrac{f(z)}{M}$ とおくと, 定理1より,

$$\frac{\|g(0)\|-r}{1-\|g(0)\|r} \leqq \|g(z)\| \leqq \frac{\|g(0)\|+r}{1+\|g(0)\|r}$$

$$\therefore \frac{\frac{\|f(0)\|}{M}-r}{1-\frac{\|f(0)\|}{M}r} \leqq \frac{\|f(z)\|}{M} \leqq \frac{\frac{\|f(0)\|}{M}+r}{1+\frac{\|f(0)\|}{M}r}$$

これより，(3)式が得られる。 $\lrcorner$

また，$f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$ の零点，不動点に関して，次の定理が成り立つ：

<u>定理 3</u> （[6], p.40, Theorem 1） $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$, $f: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, $f(0) \neq 0$ ならば，$f(z)$ は $\mathbb{B}_{\|f(0)\|}$ に零点を持たない。もし，f が automorphism ならば，$f(z)$ は $\mathbb{B}_{\|f(0)\|}$ の境界上に零点を持つ。

<u>定理 4.</u> （[6], p.41, Theorem 3）, $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$, $f: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, $f(0) \neq 0$ ならば，$f(z)$ は $\mathbb{B}_r$ 内に不動点を持たない。ここで

$$r := \frac{1-\sqrt{1-\|f(0)\|^2}}{\|f(0)\|} \quad \left(= \frac{1}{1+\sqrt{1-\|f(0)\|^2}}\right).$$

文　　献

[1] P. L. Duren : Univalent Functions, Springer Verlag (1983)

[2] W. Rudin : Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag (1980)

[3] H. S. Shapiro : The Schwarz Function and its Generalization to Higher Dimensions, John-Wiley & Sons, (1992).

[4] M. Tsuji : Potential Theory in Modern Function Theory, Maruzen Co. LTD. (1959)

[5] 辻正次：複素函数論，槇書店 (1971).

[6]. K. Tsurumi and H. M. Srivastava : The Fixed-Points and Zeros of Holomorphic Self-Maps of the Unit Ball in $\mathbb{C}^n$, Res. Reports of Tokyo Denki University (1995) 39—45.