

カオス、ノイズ、および量子古典対応

図書館情報大学 鎮目 浩輔 (Kosuke Shizume)

ロスアラモス研究所 S. Habib

ロスアラモス研究所 W. H. Zurek

要旨 カオス系における量子—古典対応とそれに対する decoherence の効果を調べた。カオス系のモデルとして1次元のハミルトニアン $H = p^2/2m + Bx^4 - Ax^2 + \Lambda \cos \omega t$ を取り、古典的及び量子力学的時間発展を数値的に求め、両者の比較を行った。また decoherence の効果を見るため同じ系にノイズを加えて同様の比較を行った。結果は以下のとおりである：

1) decoherence が無い場合に粒子の位置や運動量の平均値を比較すると、カオス系であっても量子と古典で大きな差はない。しかし詳細を見ると、最初は非常に小さかった差が $\log \text{time}$ と呼ばれる時刻ではっきりと増加する。一方、古典分布関数と量子的分布関数 (Wigner 関数) の間には大きな差が生じる。

2) ノイズを加えて decoherence を起こすと平均値間の差がより小さくなり、さらに分布関数自体が非常に似た形を取る。

1 はじめに

最近 Zurek - Paz (Phys. Rev. Let. 72 ('94) 2508) はカオス系では古典力学と量子力学の時間発展に大きな違いが生じると主張した。彼らは古典的確率分布関数(以下、古典的分布と略す)と量子的な分布関数の一種である Wigner 関数に注目し、古典分布の運動方程式 (Liouville 方程式) と Wigner 関数の運動方程式を比較した。そして後者に現れる量子補正が $t_h = \lambda^{-1} \ln(C/\hbar)$ において大きくなり、したがってそれ以降は両者の運動が大きく異なるであろうと主張している。ここで λ は Lyapunov exponent, C は初期条件やポテンシャルの非線型性で決まる定数である。この t_h は log time と呼ばれるが、 \hbar の対数に比例するためたとえ巨視的系でもせいぜい Lyapunov time の数十～百倍程度にしかならない。したがって彼らの主張が正しければ、カオス系ではたとえ巨視的物体であっても十分観測可能な時間内で物体の運動が古典力学の予想からはずれることになり、明らかに経験と矛盾する。彼らは decoherence がこの矛盾を解決しているとした。つまりカオス系で破れるはずの量子 - 古典対応が decoherence により回復し、そのため現実の物体は古典力学に従うことになることを主張した。しかし彼らの議論は上下を逆にした調和振動子系での計算に基づいており、本当にカオス系で量子 - 古典対応の破れがおきるかどうかは明白でない。類似の議論に Berry - Balazs (J. Math. Gen. 12 ('79) 625) がある。彼らはカオス系の古典分布関数は位相空間

において非常に細かい構造を持つが、量子的な Wigner関数は不確定性関係のため \hbar より細かい構造は持てず、したがってやはり $\log \text{time}$ ごろから両者に違いが生じるとしている。

一方、反対にカオス系でも量子-古典対応は破れないという主張がある。Ballentine (et al. Phys. Rev. A **50** ('94) 2854) はカオス系で量子的期待値と古典的期待値 (アンサンブル平均) の時間発展を数値的に計算し、 $\log \text{time}$ を超えても対応の破れは生じないと主張している (ただし彼の主な論点は Ehrenfest の定理の不十分性である)。さらに Takahashi (Prog. Theor. Phys. Supp. **98** ('89) 109) は古典分布と Wigner関数を数値的に計算して比較し、両者は一見非常に異なるが、双方に粗視化を行うと違いは消失することを示した。

本研究はまずこれらの議論の真偽を調べるため一次元のカオス系において古典的運動と量子的運動の比較を数値計算を用いて行い、量子-古典対応の破れの有無を調べる。つまり Newton方程式と Schroedinger方程式を数値的に解き、古典分布での座標 x の平均値 $\langle x \rangle_c$ と波動関数から計算される平均値 $\langle x \rangle_q$ を比較する。Newton方程式は初期分布からサンプリングした多数個の初期条件のそれぞれについて解き、その結果を平均することにより平均値を計算することになる。また初期条件は、量子と古典で同じ初期分布をとる必要がある。「同じ」の意味が問題となるが、ここではよく行われるよう

に単純に古典分布と Wigner関数を同じガウス分布にとる。これにより初期においては $\langle x \rangle_c$ と $\langle x \rangle_q$ のみならず、運動量の平均値、さらにそれらのすべてのモーメンツがどちらでも同じになる。このような同じ初期条件から出発して、 x の平均値、さらに p の平均値やそれらの高次のモーメンツの時間発展を調べ、時間がたつにつれ生じる差 $\langle x \rangle_q - \langle x \rangle_c$ 等を調べる。また古典的分布と Wigner関数の比較も行う。ここまでは基本的に Ballentine や Takahashi らと同じ種類の計算であるが、扱う系が違ふこと、また計算の精度が高いという点が異なっている。次に decoherence の効果を見るために系にノイズを加えてこれらの違いがどうなるかをみる。このために量子的および古典的な Fokker-Planck 方程式を数値的に解き分布の運動を求め、上記と同様に平均値、モーメンツ、分布関数の比較を行う。

II decoherence なしでの量子—古典対応

1) モデルと計算の概要 カオス系のハミルトニアンとして次をとる (Lin & Ballentine, Phys.Rev.Let. 65 ('90)2927):

$$H = \frac{p^2}{2m} + Bx^4 - Ax^2 + \Lambda \cos \omega t; \quad m=1, B=\frac{1}{2}, A=10, \Lambda=10, \omega=6.07.$$

このハミルトニアンから作られる Schroedinger 方程式と Newton 方程式を数値的に解く。Schroedinger 方程式の初期条件としては最小ガウス波束

$$\phi_{in}(x) = (2\pi(\delta x)^2)^{-1/4} \exp\left[-\frac{(x-x_{in})^2}{4\delta x^2} + i\frac{p_{in}x}{\hbar}\right]$$

をとる。 x_{in} と p_{in} はそれぞれ座標、運動量の平均値の初期値、 δx は座標の標準偏差の初期値。ニュートン方程式の初期条件は、まず上記の波動関数に対応する Wigner関数

$$f_w = \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left[-\frac{(x-x_{in})^2}{2\delta x^2} - \frac{(p-p_{in})^2}{2\delta p^2}\right]$$

と同じ確率密度関数 $f_{cl}=f_w$ をとる（ガウス分布の Wigner関数が正定値であるためこのことが可能）。そしてこの分布をとる乱数を多数回発生させ、それぞれを初期条件とする多数本のニュートン方程式を数値的に解く。ここでは約16万個の初期条件を発生させ、対応する16万本の方程式を解いて平均値等を計算した。またこれらの計算では $\hbar=0.1$ とした。こうすると Zurek-Paz の log time t_h は約5になる。

2) 結果 $\langle x \rangle_q$ および $\langle x \rangle_c$ の運動を図1(a)に示す。横軸は時間、実線が $\langle x \rangle_c$ 、点線が $\langle x \rangle_q$ 、さらに太線が $\langle x \rangle_q - \langle x \rangle_c$ である。これより次のことが言える：

- ・時刻が t_h を超えても対応の破れといえるほど大きな差は生じない。差はゆっくりとしか大きくなり、大きな値になる前に平均値が平衡値に接近してしまっている。

- ・しかし差を詳細に見ると、 t_h のあたりで急に増加している。

紙面の関係でグラフは省略するが、 p の平均値や x や p の5次までのモーメントも同じ振舞を見せている。次にWigner関数と古典的分布関数を2つの時点で比較する。図2(a)と(b)がそれぞれ $t=2T$ ($T=2\pi/\omega \approx 1$)における古典分布とWigner関数、(c)と(d)が $t=4T$ におけるそれらである。これから次のことがわかる。

- ・ 少なくとも早い時刻では、古典分布関数のピークに対応する部分にWigner関数の正のピークができる。いわばclassical backboneともいえるものである。しかし、このbackboneの間には古典分布には存在し得ない、負の値もとる振動部分が現れる。これはbackbone間の干渉によるものと考えられる。
- ・ 時間が経つにつれ振動は広がり、本来classical backboneとなるべき部分でさえ振動により破壊されていく。
- ・ 図は略したが $t=10T$ でのWigner関数を見ると、この振動はますます細かくなりところによっては \hbar よりも細かいスケールで振動する。この意味で、不確定性関係は必ずしもBerry-Balzasの主張したような構造のスケールの下限を意味しない。

III decoherenceを加えた場合の量子—古典対応

1) 計算の概要 decoherenceは本来注目している系と環境を分離し、環境の影響をトレースアウトすることにより生じる。しかし高温極限では系にノイズを加えることと実質的に等し

くなる。この場合 decoherence の効果は密度行列に対する量子 Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x | \rho | y \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle x | [H, \rho] | y \rangle - \frac{D}{\hbar^2} (x-y)^2 \rho(x, y)$$

を解くことにより得られる。なおここでは Zurek-Paz にならない散逸の効果は無視している。一方、このノイズの元での古典的 Fokker-Planck 方程式は

$$\frac{\partial f_c}{\partial t} = \left(-p \frac{\partial}{\partial x} + V, x \frac{\partial}{\partial p} + D \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) f_c$$

である(やはり散逸は無視)。この両者を同じ初期条件のもとで数値的に解き、やはり座標等の平均値とモーメンツ、および Wigner 関数と古典分布関数を比較した。

2) 結果 まず平均値を図 1(b) に示す。これからわかるように平均値の差は小さくなっている。図 1(c) に decoherence のない場合とある場合での $\langle x \rangle_q - \langle x \rangle_c$ を並べて示した。ほぼ 1 ~ 2 割程度に減っていることがわかる。次に Wigner 関数と古典分布関数を図 3 に示す。これより、次がわかる：

- ・ 古典的分布はノイズにより細かい構造がならされている。
- ・ Wigner 関数は干渉による速い振動が消されており、また負の部分も減っている。
- ・ 古典分布と Wigner 関数が非常に似てくる。

つまり decoherence は平均値等の改善だけでなく、Wigner関数と古典分布関数の定量的な対応を大きく改善するのである。

IV まとめと議論

以上の結果から、少なくともこのカオス系では平均値やある程度低次のモーメントに関する限り、量子-古典対応の破れは存在しない。しかし分布関数は早い段階で大きく異なってくる。さらに干渉のため \hbar よりも細かい構造が生じる。decoherence の量子-古典対応における役割を見ると、単に平均値の対応をよくする上ではその寄与は大きなものではない(もともと差は小さい)が、さらに分布関数のレベルにまで踏み込むと対応をよくする上で本質的である。ここで decoherence により量子力学が古典力学に近づくのか、あるいはその逆かという興味深い問題が生じる。上記のようにノイズは古典的分布の細かい構造をならし、一方で Wigner関数の振動も消してしまう。また decoherence が無いときとあるときでそれぞれの平均値を比較すると、decoherence による平均値の変化は量子でも古典でも同じ程度になる。これより、decoherence は量子力学も古典力学もどちらも同じぐらい変え、その結果双方が「ともに歩み寄って」対応がよくなるのである。

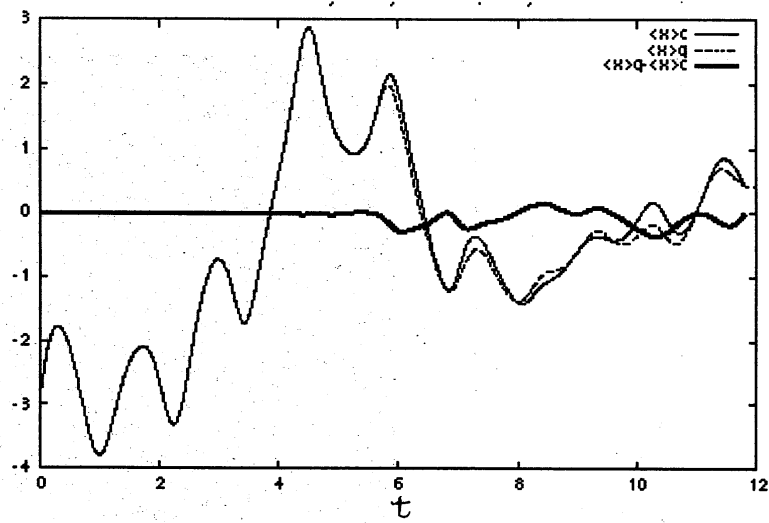


図1(a) x の期待値の比較。実線が $\langle x \rangle_c$ (古典)、点線が $\langle x \rangle_q$ (量子)。太線が両者の差 $\langle x \rangle_q - \langle x \rangle_c$ 。(下図も同様)

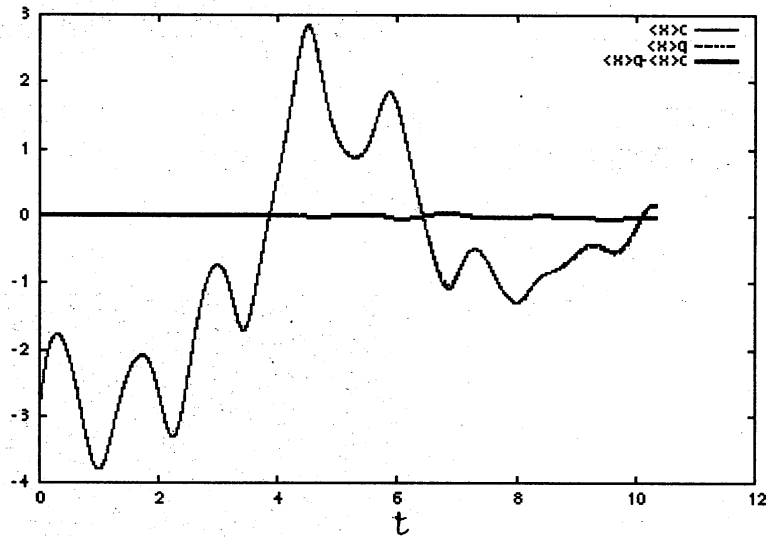


図1(b) x の期待値の比較。Decoherenceがある場合。

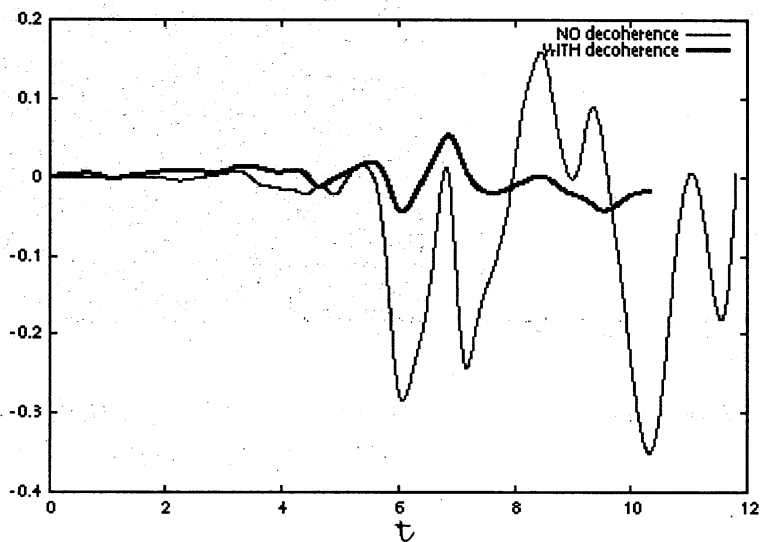


図1(c) $\langle x \rangle_q - \langle x \rangle_c$ の比較。太線がdecoherenceがある場合。

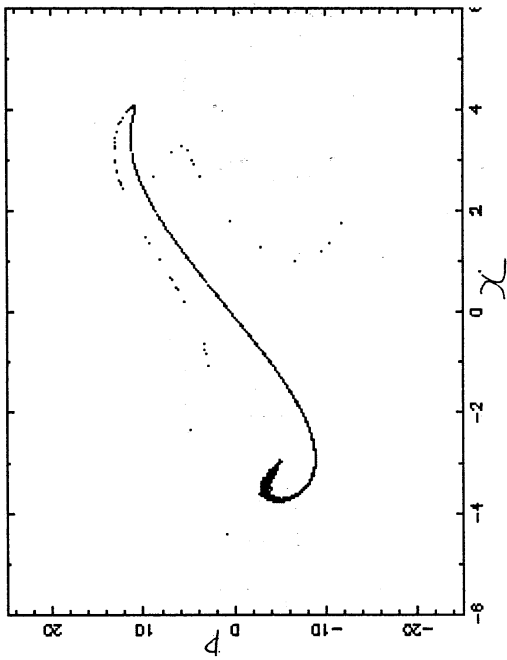


図2(a) $t=2T$ での古典分布。黒点の一つ一つがひとつの位相空間での粒子の位置を示す。

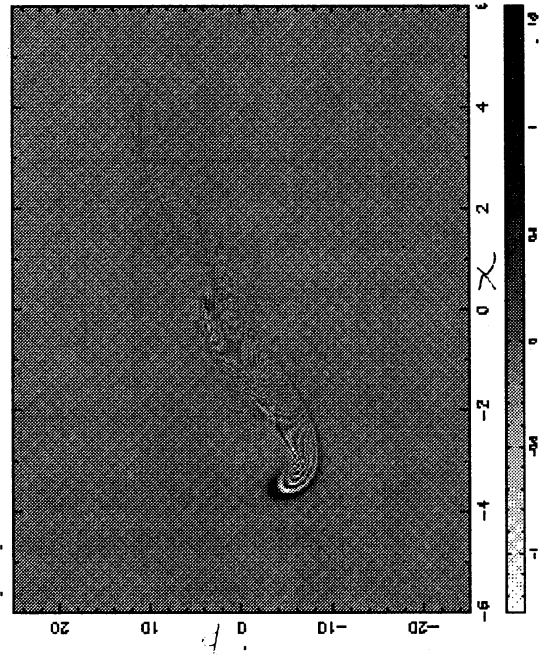


図2(b) $t=2T$ でのWigner関数。階調が値を示し、もっとも黒に近い部分が約1.5, 白い部分が約-1.2

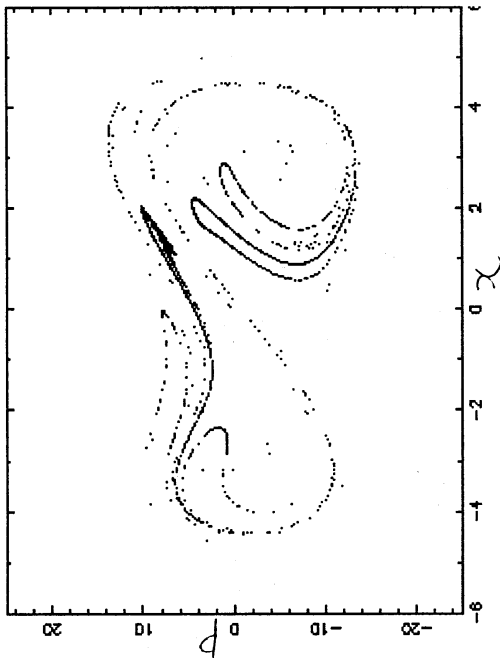


図2(c) $t=4T$ での古典分布

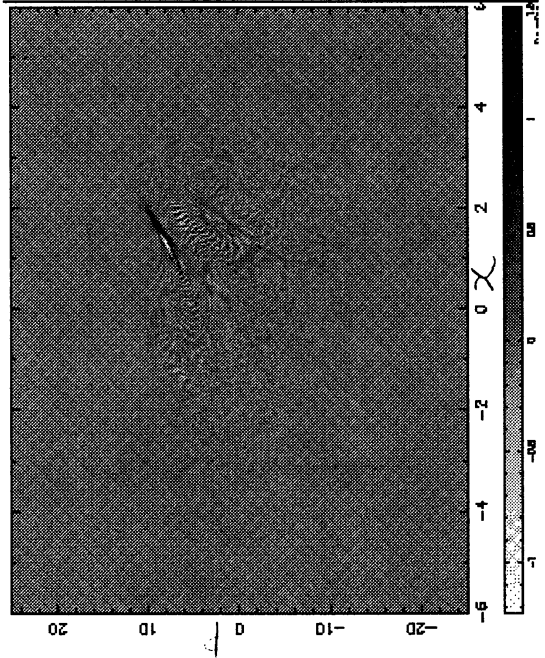


図2(d) $t=4T$ でのWigner関数。もっとも黒い部分で約1.2, 白い部分で約-1.4。

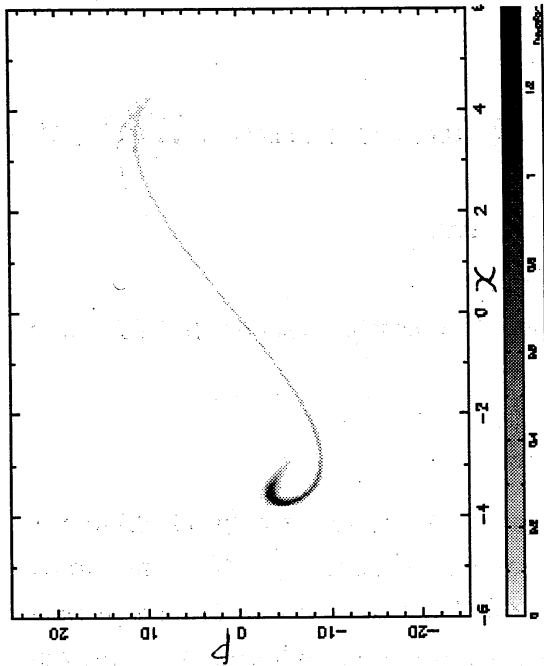


図3(a) $t=2T$ での古典分布関数。階調が確率密度の値をあらわす。もっとも黒い部分で約1.4、白い部分で0。

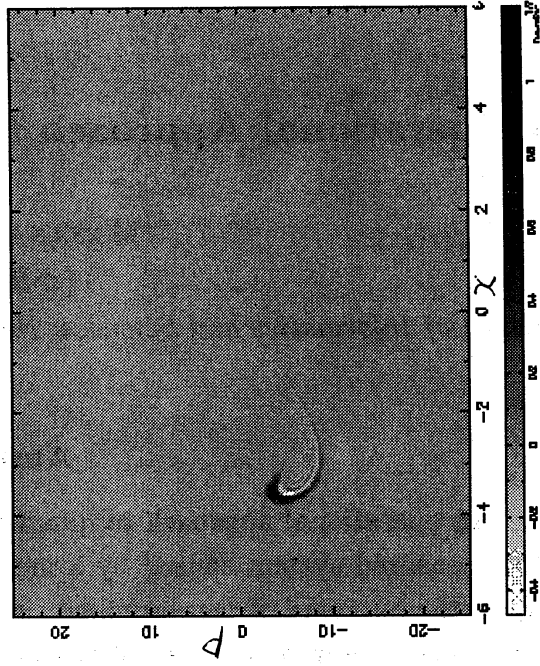


図3(b) $t=2T$ でのWigner関数。もっとも黒い部分で約1.2。白い部分で-0.4。

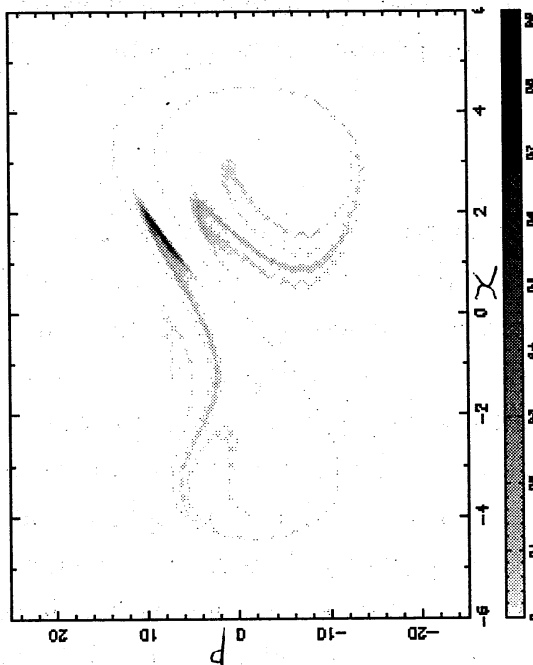


図3(c) $t=4T$ での古典分布。黒い部分で確率密度が約0.9、白い部分で0。

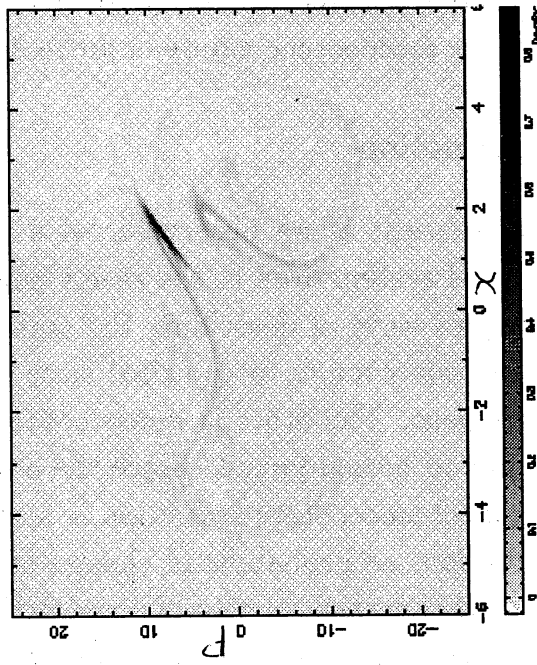


図3(d) $t=4T$ でのWigner関数。黒い部分で約0.9。白い部分で約-0.02。(ほとんどの部分は0に対応)。