数理解析研究所講究録
1013巻 1997年 28-40



# 複占市場における情報獲得と相互エントロピー

東京理科大学　大矢 雅則　(Masanori Ohya)
東京理科大学　松岡 隆志 (Takashi Matsuoka)

## 1. はじめに

J. von Neumann と O. Morgensten[1]に始まるゲーム理論は、複数の意思決定主体（プレーヤ）に依存する人間の社会的な行動を、その相互依存の関係を数学的に設定、分析することにより説明する理論である。その相互依存のあり方は、相手の戦略を知る、知らないという「情報」の有無の問題と言い換えることもでき、よって、従来のゲーム理論においては、「情報」という概念は、相手の戦略をどの程度知っているかという状況を数理的に構成し、そのそれぞれの状況に対応する利得の大小によって「情報」の価値を評価する。確かに、この方法は「情報」という言葉の常識的な解釈からも自然な設定といえるが、ここではあくまで情報そのものを数量的に把握するという考え方は導入されていない。

本稿の目的は、需要不確実性下の複占市場モデル[2]を例に取り上げ、情報理論の観点からゲーム理論における情報（情報量）の取り扱い方の一つの方法を試みることである[3]。

我々が取り上げるモデルは、市場需要を表すパラメータが不確実性の影響下にある（パラメータが確率変数として表現される）簡単なモデルである。供給者としては、第１企業と第２企業の二つだけであり、これらの企業が生産する製品の差別化は問題にしない。さて、一般に我々は、市場パラメータに関する知識として、過去の経験等からその確率分布（平均値等）を知ることはできても、１回１回の試行においてその実現値を正確に予測することは難しい。しかし、何らかの市場調査を行うことによって、その精度を上げることは可能である。細江はこうした状況における不確定さの減少が、各企業の利得に及ぼす影響を考察するために、予測の精度を０（無情報）から１（完全情報）の間で変化させることのできる情報システムを導入し、クールノ・ナッシュ型均衡モデルでの解析を行った[2]。ただし、ここでも、情報の価値は市場パラメータの予測の精度に応じた利得の差としての評価の段階にとどまっている。そこで、我々は彼のモデルに対して、エントロピー、相互エントロピーといった情報量を導入し、情報の獲得と利得の変化の関係を情報理論の観点から説明することを試みる[3]。

## 2. クールノゲームにおける情報価値と情報システム

同じ一定の限界費用$C$（$\geq 0$）を持ち、同質の生産物を作る二つの企業（１、２）の複占市場を考える。いま、この生産物の市場価格$P$は、市場の需要関数$f$として次の式で与えられる。

$$P = f(q_1, q_2, a) = a - b(q_1 + q_2)$$

ここで、$a$、$b$は市場の需要に関する確率変数であり、$q_1$、$q_2$はそれぞれ、企業１、２の生

産量である。いま、$a$（$>0$）は、離散的な値と離散的な確率分布を持つ確率変数で、製品の生産が行われた後（$q_1$、$q_2$が確定した後）でのみ、その値は実現するものとする。他方、$b$は簡単のため、本稿では既知の確定値として取り扱う。さらに、各企業は、確率変数$a$が従う確率分布の形状（平均値など）は知っているが、その実現値に関しては、一般に生産を行う前に知ることはできないとする。このとき、各企業の利得は、

$$U_i(q_i, q_j; a) = q_i(P - C) = q_i(a - b(q_i + q_j) - C)$$

で与えられ、各企業は自社の利得を最大にするように戦略$q_i$を決定する。

本稿では、我々はクールノモデルに対して解析を行う。以下簡単にクールノ・ナッシュ均衡戦略について復習しておこう[4]。

クールノ・ナッシュ均衡戦略では、企業$i$（1あるいは2）は相手方$j$（2あるいは1）の取る戦略$q_j$（産出水準）を予想（想定）することによって、自己の利得を最大にするように自己の戦略$q_i$を決定する。クールノモデルでは、先手と後手の区別はなく、よって同時並行的に互いの戦略が決まる。その均衡解を求める手順を簡単に示すと次のようになる。

[手順1]：企業$i$は企業$j$の戦略を$q_j$と想定して、$q_j$に対する企業$i$の利潤を最大にするように自己の最適戦略を決定する。この最適戦略を$q_i^*$とすれば、これは企業$j$の戦略$q_j$に対する戦略であるから、企業$i$の反応関数を$R_i$とすると、

$$q_i^* = R_i(q_j)$$

と表すことができる。

[手順2]：クールノ・ナッシュ戦略においては、想定する相手の戦略もまた相手の最適戦略であるはずだから、次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases} q_1^* = R_1(q_2^*) \\ q_2^* = R_2(q_1^*) \end{cases}$$

[手順3]：手順2の連立方程式を解き、その値を$(q_1^e, q_2^e)$とすれば、これがクールノ・ナッシュ均衡点となる。

クールノ・ナッシュ均衡点は、お互い相手の最適戦略に対する予想が実現した状態であるから、反応関数を使って表せば、

$$q_i^e = R_i(R_j(q_i^e))$$

が成立し、よって、手順2の連立方程式を解くことによって求められるのである。以上、クールノ・ナッシュ均衡点を求めることは、反応関数$R_i$を具体的に求めることに帰着する。

### 2．1　ゼロ情報ゲームから見た完全情報ゲームにおける情報の価値

まず、始めに$a$の予測に対して、その実現値を正確に予想できる場合（完全情報）と、全く予想できない場合（ゼロ情報）の基本的なケースを考える。このケースについては、酒井

[5、6]が詳細な分析を行っており、以下、彼の結果を簡単に紹介する。いま、ゲームの情報構造は、ベクトル$x=(x_1,x_2)$を使って表現される。ここで、

$x_i=1 \Leftrightarrow$企業$i$ が$a$の実現値を正確に予測できるとき、

$x_i=0 \Leftrightarrow$企業$i$ が$a$の実現値を全く予測できないとき。

このとき、ゲームの情報構造は以下三つのケースに分けられる。

(1) ゼロ情報ゲーム $(0,0)$；両企業ともに無知の場合。

(2) 完全情報ゲーム $(1,1)$；両企業ともに$a$の実現値を正確に予測できる場合。

(3) 私的情報ゲーム $(1,0)$、$(0,1)$；いずれか一方の企業$i$ のみが、$a$の実現値を正確に予測できる場合。

ここで、私的情報の場合、例えば$(1,0)$ゲームにおいて、企業1が完全な情報を得ていること事態は相手の企業2にも知られており、逆に企業1は企業2が無知である状況を踏まえて戦略を立てることができるものとする。また、完全情報ゲームが意味するところは、各企業がそれぞれ独自に市場調査を行い、その結果として完全な予測を得られたとしても、結局は公開情報あるいは共有情報として情報を利用することに等しいということである。

いま、例えば$(0,0)$ゲームにおけるクールノ・ナッシュ均衡点を$\left(q_1^{(0,0)},q_2^{(0,0)}\right)$、その期待利得水準を$E\left(U_i^{(0,0)}(q_i^{(0,0)},q_j^{(0,0)};a)\right)$（以下、$E\left(U_i^{(0,0)}(a)\right)$と略）とすると、三つのタイプの情報ゲームにおける均衡点と期待利得水準に対して、次の定理が成立する[5、6]。

**定理 2-1** (1) $q_1^{(0,0)}=q_1^{(0,1)}=E\left(q_1^{(1,0)}(a)\right)=E\left(q_1^{(1,1)}(a)\right)$、

$q_2^{(0,0)}=q_2^{(1,0)}=E\left(q_2^{(0,1)}(a)\right)=E\left(q_2^{(1,1)}(a)\right)$。

(2) $E\left(U_1^{(0,0)}(a)\right)=E\left(U_1^{(0,1)}(a)\right)\le E\left(U_1^{(1,1)}(a)\right)\le E\left(U_1^{(1,0)}(a)\right)$、

$E\left(U_2^{(0,0)}(a)\right)=E\left(U_2^{(1,0)}(a)\right)\le E\left(U_2^{(1,1)}(a)\right)\le E\left(U_2^{(0,1)}(a)\right)$。

この定理から、我々は情報の価値を次のように理解することができる。（１）の関係式は、全てのゲームにおいて、その平均生産量が等しいことを示しているので、このゲームを何回か繰り返すことによる製品の総生産量は、いずれのゲームにおいてもほぼ等しくなる。にもかかわらず、関係式（２）が示すように、情報構造の違いによってその期待利得に差がでるのは、情報の獲得が同量の生産量に対しても利得の増加をもたらすからと考えることができる。また、期待利得の最大値は私的情報ゲームにおいて達成されており、このことは、情報を一方的に利用できるという状況の有利さに対応する。上の定理の結果は、クールノゲームにおける情報の価値を示すものとして妥当な評価であるといえよう。

### ２．２ 細江の情報システムとシグナル発生のベイズルール

前節の議論では、確率変数$a$の予測に関して「どれくらい正確か」という情報の程度の問題を扱うことはできなかった。そこで、細江はこの問題に対する一つのアプローチとして、

次のようなモデルを考案した[2]。

各々の企業が独自の調査機関を使って、市場の需要$a$の情報（予想値＝シグナル$s$）を獲得する場合を考えよう。よって、一般にそのシグナルは企業によって異なるものとする。このとき、各企業がこの固有のシグナルを私的情報として、その企業内だけで利用することを情報システムの私的利用と呼ぶ。本稿で扱うのは、この私的利用のケースのみであり、お互いの情報を共有するといったシェアリングの問題は扱わない。（また、本稿では、シグナルのコストに関する問題も扱わない。）

さて、このような情報システムを我々の議論に取り入れるためには、情報システムを通して獲得されるシグナルの発生メカニズムを数学的に設定すればよい。

確率変数$a$の値を$\{a\}=\{\underline{a},\ \overline{a}\}$（$\overline{a}\geq\underline{a}$）、その生起確率分布を$\{p(a)\}=\{\delta,1-\delta\}$とする。このとき、シグナル$s$の値を$\{s\}=\{\underline{s},\overline{s}\}$とすると、これは、企業が情報システムを通してシグナル$\underline{s}$（$\overline{s}$）を得たとき、確率変数$a$の値が$a=\underline{a}$（$a=\overline{a}$）となることを情報システムの精度に応じて、確率的に予測し戦略を立てることを意味する。よって、数値としての値は$a$も$s$も等しい値を取るが、その区別のために異なる記号を使用する。このとき、確率変数$a$の生起を前提とするシグナル$s$の条件付き確率を次のように与える。

＜シグナル発生の条件付き確立分布（情報システムのメカニズム）＞

$$\begin{cases} p(s=\underline{s}|a=\underline{a})=\beta, & p(s=\underline{s}|a=\overline{a})=1-\beta, \\ p(s=\overline{s}|a=\underline{a})=1-\beta, & p(s=\overline{s}|a=\overline{a})=\beta \end{cases} \quad \left(1\geq\beta\geq\frac{1}{2}\right) \tag{2.2.1}$$

ここでは、簡単のため、二つのシグナルに対して対称性を仮定している。このとき、$\beta=\dfrac{1}{2}$はゼロ情報（情報システムを使用しても、$a$の予測に関する精度が全く変わらない。）に対応し、$\beta=1$は、完全情報（獲得したシグナルと同じ値が$a$で実現される）に対応する。実際、ベイズの定理を用いると、シグナル$s$を得たときの市場パラメータ$a$が生じる条件付き確立分布が次のように求まる。

$$\begin{cases} p(a=\underline{a}|s=\underline{s})=\dfrac{\delta\beta}{\delta\beta+(1-\beta)(1-\delta)} \\ p(a=\overline{a}|s=\underline{s})=\dfrac{(1-\beta)(1-\delta)}{\delta\beta+(1-\beta)(1-\delta)} \\ p(a=\underline{a}|s=\overline{s})=\dfrac{\delta(1-\beta)}{\delta(1-\beta)+(1-\delta)\beta} \\ p(a=\overline{a}|s=\overline{s})=\dfrac{(1-\delta)\beta}{\delta(1-\beta)+(1-\delta)\beta} \end{cases} \tag{2.2.2}$$

このとき、(2.2.2) 式において、$\beta=\dfrac{1}{2}$を代入すると、シグナルの如何に関わらずその条件

付き確率は、

$$p(a=\underline{a}|s)=\delta、\ p(a=\overline{a}|s)=(1-\delta)$$

となるから、パラメータ$a$の予測に対する確率的な情報は、情報システムを利用しないときと全く変わらない。また、$\beta=1$を代入すると、

$$\begin{cases} p(a=\underline{a}|s=\underline{s})=1, p(a=\overline{a}|s=\underline{s})=0, \\ p(a=\underline{a}|s=\overline{s})=0, p(a=\overline{a}|s=\overline{s})=1 \end{cases}$$

であるから、シグナル$s$を得ることによってパラメータ$a$の値を正確に予測できる。よって、（2.2.1）式で与えられる$\beta$は、この情報システムの精度と呼びうるものである。

本稿では、簡単のため、各々の企業が利用する情報システムの精度$\beta$は等しいケースのみ考える。すなわち、二つの企業が個々に情報システムを利用する私的情報ゲームは$(\beta,\beta)$と表され、情報の精度における二企業の対称性が成立する。ここで、ベイズの定理を用いれば、このゲームを解くのに必要な幾つかの確立分布が次のように求まる。

（b）市場パラメータ$a$とシグナル$s$の同時確立分布：

$$\begin{cases} p(a=\overline{a},s=\overline{s})=p(s=\overline{s}|a=\overline{a})p(a=\overline{a})=\beta(1-\delta), \\ p(a=\overline{a},s=\underline{s})=(1-\beta)(1-\delta), \\ p(a=\underline{a},s=\overline{s})=(1-\beta)\delta, \quad p(a=\underline{a},s=\underline{s})=\beta\delta \end{cases} \tag{2.2.3}$$

（c）シグナル$s$の発生確率分布：

$$\begin{cases} p(s=\overline{s})=p(a=\overline{a},s=\overline{s})+p(a=\underline{a},s=\overline{s})=\beta(1-\delta)+(1-\beta)\delta, \\ p(s=\underline{s})=p(a=\overline{a},s=\underline{s})+p(a=\underline{a},s=\underline{s})=(1-\beta)(1-\delta)+\beta\delta \end{cases} \tag{2.2.4}$$

（d）企業$i$がシグナル$s_i$を得たとき、企業$j$がシグナル$s_j$を得る条件付き確率分布：

$$\begin{cases} p(s_j=\underline{s}|s_i=\underline{s})=\displaystyle\sum_{a'\in\{\underline{a},\overline{a}\}}p(s_j=\underline{s}|a=a')p(a=a'|s_i=\underline{s}) \\ \qquad\qquad\qquad\quad =\dfrac{\delta\beta^2+(1-\beta)^2(1-\delta)}{\delta\beta+(1-\beta)(1-\delta)} \\ p(s_j=\overline{s}|s_i=\underline{s})=\dfrac{\beta(1-\beta)}{\delta\beta+(1-\beta)(1-\delta)} \\ p(s_j=\underline{s}|s_i=\overline{s})=\dfrac{\beta(1-\beta)}{\delta(1-\beta)+(1-\delta)\beta} \\ p(s_j=\overline{s}|s_i=\overline{s})=\dfrac{\delta(1-\beta)^2+(1-\delta)\beta^2}{\delta(1-\beta)+(1-\delta)\beta} \end{cases} \tag{2.2.5}$$

(e) 企業$i$ のシグナル$s_i$と、企業$j$のシグナル$s_j$の同時確率分布：

$$\begin{cases} p\left(s_i=\bar{s},s_j=\bar{s}\right)=p\left(s_i=\bar{s}\middle|s_j=\bar{s}\right)p\left(s_j=\bar{s}\right)=p\left(s_j=\bar{s}\middle|s_i=\bar{s}\right)p\left(s_i=\bar{s}\right) \\ =\delta(1-\beta)^2+(1-\delta)\beta^2, \\ p\left(s_i=\bar{s},s_j=\underline{s}\right)=p\left(s_i=\underline{s},s_j=\bar{s}\right)=\beta(1-\beta), \\ p\left(s_i=\underline{s},s_j=\underline{s}\right)=\delta\beta^2+(1-\delta)(1-\beta)^2 \end{cases} \tag{2.2.6}$$

## 2．3 情報システムの私的利用におけるクールノ・ナッシュ均衡戦略

本節では、二つの企業が情報システムを私的に利用する$(\beta,\beta)$ゲームを解析する。我々が使用する戦略は、従来のクールノ・ナッシュ均衡戦略に準じて、「自分の得たシグナルから、相手が得るであろうシグナルを確率的に推定することにより、相手の平均戦略を想定し、自己の産出水準を決定する」戦略である。相手企業のシグナルに関する情報（確率分布）はベイズの定理を用いて得られるので、この戦略をベイズ均衡戦略と呼ぶ。

いま、企業$i$ の最適戦略を$q^*_{s_i}$と書けば、これはシグナル$s$の関数である（i.e., $q^*_{s_i}:\{\underline{s},\bar{s}\}\to R$）。ベイズ均衡戦略では、企業$i$ はシグナル$s_i=s'$（$s'\in\{\underline{s},\bar{s}\}$）を得たとすると、$s_i=s'$という前提のもとで、条件付き確率（2.2.5）を用いて企業$j$のシグナルを平均的に想定し、その平均戦略$E_{|s_i=s'}\left(q_{s_j}(s)\right)$（$E_{|s_i=s'}$は、$s_i=s'$の件付き確率で平均を取ることを意味し、$q_{s_j}(s)$は、企業$j$が得たシグナル$s$に依存する企業$j$の戦略である）に対して最適戦略$q^*_{s_i}(s')$を決定するであろう。よって、$q^*_{s_i}(s')$は、$s_i=s'$のときの反応関数を$R_{s_i=s'}(\cdot)$とすれば、

$$q^*_{s_i}(s')=R_{s_i=s'}\left(E_{|s_i=s'}\left(q_{s_j}(s)\right)\right)$$

と書ける。

さて、企業$j$の平均戦略$E_{|s_i=s'}\left(q_{s_j}(s)\right)$に対する企業$i$ の最大期待利潤$U_i^{\max}\left(E_{|s_i=s'}\left(q_{s_j}(s)\right)\right)$は、ゼロ情報ゲームのアナロジーから、次のように与えられる。

$$U_i^{\max}\left(E_{|s_i=s'}\left(q_{s_j}(s)\right)\right)=\max\left\{E_{|s_i=s'}\left(U_i^{(\beta,\beta)}\left(q_{s_i}(s'),q_{s_j}(s):a\right)\right);q_{s_i}(s')\geq 0\right\}$$

このとき、ベイズの定理を用いて、

$$E_{|s_i=s'}\left(\left(U_i^{(\beta,\beta)}\left(q_{s_i}(s'),q_{s_j}(s):a\right)\right)\right)=q_{s_i}(s')\cdot\left(E_{|s_i=s'}(a)-b\left(q_{s_i}(s')+E_{|s_i=s'}\left(q_{s_j}(s)\right)\right)-C\right)$$

と計算され、よって、$q^*_{s_i}(s')$の反応関数$R_{s_i=s'}(\cdot)$は、次のように求まる。

$$q^*_{s_i}(s')=R_{s_i=s'}\left(E_{|s_i=s'}\left(q_{s_j}(s)\right)\right)=\frac{E_{|s_i=s'}(a)-C}{2b}-\frac{1}{2}E_{|s_i=s'}\left(q_{s_j}(s)\right)。$$

反応関数の具体的な形が特定されたので、ベイズ均衡戦略における均衡点を求めることができる。この均衡点の組みは、クールノ・ナッシュ均衡に準じれば、「シグナルに依存する相手の戦略を想定し、それを前提として、自己の得たシグナルのもとで生産水準を決定し実行した結果、実際に観測される相手の戦略が、相手の得たシグナルに対応して想定通りであ

るような戦略の組」となるはずである。すなわち、その均衡点を $\left(q_{s_i}^{(\beta,\beta)}(s'), q_{s_j}^{(\beta,\beta)}(s'')\right)$（$s',s'' \in \{\underline{s},\overline{s}\}$）とすれば、反応関数に対して次の式が成立する。

$$q_{s_1}^{(\beta,\beta)}(s') = R_{s_i=s'}\left(E_{|s_i=s'}\left(R_{s_j=s''}\left(E_{|s_j=s''}\left(q_{s_1}^{(\beta,\beta)}(s)\right)\right)\right)\right)$$

このとき、ゲームの対称性から、

$$q_{s_1}^{(\beta,\beta)}(\underline{s}) = q_{s_2}^{(\beta,\beta)}(\underline{s}) = q_{s_i}^{(\beta,\beta)}(\underline{s})、q_{s_1}^{(\beta,\beta)}(\overline{s}) = q_{s_2}^{(\beta,\beta)}(\overline{s}) = q_{s_i}^{(\beta,\beta)}(\overline{s})$$

と置いて連立方程式を解くと、$q_{s_i}^{(\beta,\beta)}(s')$（$s' \in \{\underline{s},\overline{s}\}$）は次のように求まる。

$$q_{s_i}^{(\beta,\beta)}(s') = \frac{E_{|s_i=s'}(a) - C}{3b} + B_{s_i}(s')$$

ここで、

$$B_{s_i}(\underline{s}) = \frac{p(s_j=\overline{s}|s_i=\underline{s})\left(E_{|s_i=\underline{s}}(a) - E_{|s_i=\overline{s}}(a)\right)}{3b\left(1+p(s_j=\underline{s}|s_i=\underline{s}) + p(s_j=\overline{s}|s_i=\overline{s})\right)}、$$

$$B_{s_i}(\overline{s}) = \frac{p(s_j=\underline{s}|s_i=\overline{s})\left(E_{|s_i=\overline{s}}(a) - E_{|s_i=\underline{s}}(a)\right)}{3b\left(1+p(s_j=\underline{s}|s_i=\underline{s}) + p(s_j=\overline{s}|s_i=\overline{s})\right)}。$$

さて、均衡戦略 $q_{s_i}^{(\beta,\beta)}(s')$ をシグナル $s$ の生起確率（2.2.4）で平均し、その平均生産量 $\underset{s}{E}\left(q_{s_i}^{(\beta,\beta)}(s)\right)$ を求めると、

$$\begin{aligned}\underset{s}{E}\left(q_{s_i}^{(\beta,\beta)}(s)\right) &= \frac{1}{3b}\sum_{s'\in\{\underline{s},\overline{s}\}} p(s_i=s')\cdot E_{|s_i=s'}(a) - \frac{C}{3b} + \sum_{s'\in\{\underline{s},\overline{s}\}} p(s_i=s')\cdot B_{s_i}(s') \\ &= \frac{E(a)-C}{3b} \qquad (\because \sum_{s'\in\{\underline{s},\overline{s}\}} p(s_i=s')\cdot B_{s_i}(s') = 0)\end{aligned}$$

すなわち、$(\beta,\beta)$ ゲームにおいても、その平均生産量はゼロ情報ゲームと等しいことが分かる。よって、2.1節と同様に、$(\beta,\beta)$ ゲームの期待利得とゼロ情報ゲームの期待利得を比べることで、情報システムによる情報獲得の価値を考察することができる。

均衡点 $\left(q_{s_i}^{(\beta,\beta)}(s'), q_{s_j}^{(\beta,\beta)}(s'')\right)$ に対して、シグナルの発生確率による期待利得 $\underset{s}{E}\left(U_i^{(\beta,\beta)}(a)\right)$ は、二つのシステム間の同時確立分布（2.2.6）を用いて、次のように求まる[3]。

$$\begin{aligned}\underset{s}{E}\left(U_i^{(\beta,\beta)}(a)\right) = &\sum_{s',s''\in\{\underline{s},\overline{s}\},a'\in\{\underline{a},\overline{a}\}} p(s_i=s')\cdot q_{s_i}^{(\beta,\beta)}(s')\cdot \\ &\left(p(a=a'|s_i=s')\cdot a' - b\left(q_{s_i}^{(\beta,\beta)}(s') + p(s_j=s''|s_i=s')\cdot q_{s_j}^{(\beta,\beta)}(s'')\right) - C\right) \\ = &\frac{1}{9b}\left(\left(\delta\beta+(1-\delta)(1-\beta)\right)\cdot\left(\frac{(1-\beta)(1-\delta)\cdot\overline{a}+\delta\beta\cdot\underline{a}}{\delta\beta+(1-\beta)(1-\delta)} - C\right)^2\right. \\ &\left. +\left((1-\delta)\beta+\delta(1-\beta)\right)\left(\frac{(1-\delta)\beta\cdot\overline{a}+\delta(1-\beta)\cdot\underline{a}}{\delta(1-\beta)+(1-\delta)\beta} - C\right)^2\right)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{9b}\cdot\beta(1-\beta)\cdot\frac{\{(\delta(1-\delta))(2\beta-1)\cdot(\bar{a}-\underline{a})\}^2}{(\delta(1-\beta)+(1-\delta)\beta)^2\cdot(\delta\beta+(1-\beta)(1-\delta))^2}\cdot$$

$$\frac{\{(2\beta^2-(7-10\delta)\beta+5(1-\delta))\cdot[\delta\beta]+\beta(1-\beta)\}\cdot(1-[\delta\beta])\cdot[\delta\beta]}{\{2(\beta^2-2(1-\delta)\beta+(1-\delta))\cdot[\delta\beta]+\beta(1-\beta)\}^2} \quad (2.3.1)$$

$$(\therefore\ \ [\delta\beta]=\delta+(1-2\delta)\beta)$$

式(2.3.1)の結果からつぎの定理が示せる[3]。

**定理2-2** $\lim_{\beta\to\frac{1}{2}} \underset{s}{E}\left(U_i^{(\beta,\beta)}(a)\right)=E\left(U_i^{(0,0)}(a)\right)$ (2.3.2) $\underset{s}{E}\left(U_i^{(\beta,\beta)}(a)\right)\geq E\left(U_i^{(0,0)}(a)\right)$ (2.3.3)

$$\lim_{\beta\to 1} \underset{s}{E}\left(U_i^{(\beta,\beta)}(a)\right)=E\left(U_i^{(1,1)}(a)\right) \quad (2.3.4)$$

また、次の不等式

$$E\left((a-C)^2\right)-\underset{s}{E}\left(\left(E_{|s_i=s}(a)-C\right)^2\right)<p\left(s_j=\underline{s},s_i=\bar{s}\right)\cdot\left(E_{|s_i=\bar{s}}(a)-E_{|s_i=\underline{s}}(a)\right)^2\cdot D$$

が成立するときの$\beta$において、

$$\underset{s}{E}\left(U_i^{(\beta,\beta)}(a)\right)>E\left(U_i^{(1,1)}(a)\right) \quad (2.3.5)$$

ここで、

$$D=\frac{4+p\left(s_j=\underline{s}\middle|s_i=\underline{s}\right)+p\left(s_j=\bar{s}\middle|s_i=\bar{s}\right)}{1+p\left(s_j=\underline{s}\middle|s_i=\underline{s}\right)+p\left(s_j=\bar{s}\middle|s_i=\bar{s}\right)}$$

定理2-2の（2.3.2）～（2.3.4）式は、情報システムからの情報獲得による利得の増加を表すものとして適当である。しかし、不等式（2.3.5）式は、情報の精度が不完全であるにもかかわらず、その期待利得が完全情報の場合の期待利得を上回るという不自然な状況を示しているように思われる。一般に、ナッシュ均衡はパレート最適解を与えるとは限らないので、企業は情報システムをそれぞれ独自に使用するとはいえ、市場を介して相関を持つと考えられる情報システムを利用することで、ある種の情報の付加価値のようなものが発生し、完全情報ゲームにおけるナッシュ均衡点の利得を上回ったということは考えられる。すなわち、我々は未来を完全に予測できたことによって、期待利得という意味では何等ギャンブル的な要素が入り込むことがなくなり、大きく損もしないが大きく儲かることもないという状況に甘んじてしまう。逆に言えば、情報が不完全な方が期待利得という点では大きく儲かる可能性が存在するのは、有り得ることだと思われる。ここで、システム間の相関は同時確率分布（2.2.6）式で与えられる。よって、この相関からもたらされる情報の付加価値を情報量として数量的に把握し、不等式（2.3.5）が示す意味を情報理論の立場から再度検討することが本稿の主な内容である。

以上の前提を踏まえて、次章より、エントロピー、相互エントロピーなどの情報量を導入した議論を行うが、その前にこの節の最後として、情報システムの私的利用のもう一つのケ

ースである$(\beta,0)$（$(0,\beta)$）ゲームに関する結果を示しておこう[3]。

**定理 2-3**　次の関係式が成立する。

（1）$\underset{s}{E}\left(q_{s_1}^{(\beta,0)}(s)\right)=q_1^{(0,\beta)}=\underset{s}{E}\left(q_{s_2}^{(0,\beta)}(s)\right)=q_2^{(\beta,0)}=q_i^{(0,0)}\quad(i=1,2)$　(2.3.6)

（2）$\lim_{\beta\to1}\underset{s}{E}\left(U_1^{(\beta,0)}(a)\right)=E\left(U_1^{(1,0)}(a)\right)$　(2.3.7)　　$\underset{s}{E}\left(U_2^{(\beta,0)}(a)\right)=E\left(U_2^{(0,0)}(a)\right)$　(2.3.8)

$\lim_{\beta\to1}\underset{s}{E}\left(U_2^{(0,\beta)}(a)\right)=E\left(U_2^{(0,1)}(a)\right)$　(2.3.9)　　$\underset{s}{E}\left(U_1^{(0,\beta)}(a)\right)=E\left(U_1^{(0,0)}(a)\right)$　(2.3.10)

（3）
$$E\left(U_1^{(0,0)}(a)\right)\le\underset{s}{E}\left(U_1^{(\beta,0)}(a)\right)\le E\left(U_1^{(1,0)}(a)\right)\tag{2.3.11}$$
$$E\left(U_2^{(0,0)}(a)\right)\le\underset{s}{E}\left(U_2^{(0,\beta)}(a)\right)\le E\left(U_2^{(0,1)}(a)\right)\tag{2.3.12}$$

定理 2-3 の結果は、情報システムから得られる情報の価値を示すものとして、自然な結果といえる。$(\beta,\beta)$ゲームと異なり、期待利得の最大値は、情報システムの予測が完全であるときにおいて与えられている。$(\beta,0)$（$(0,\beta)$）ゲームでは、片方の企業だけが情報システムを利用するので、二つの企業の間はあくまで独立な関係が保たれており、よって、そこには$(\beta,\beta)$ゲームにおいて生じていると思われる「システムを通した相関」というものは発生していない。それゆえ、獲得した情報に応じて利得は増加し、その最大値は完全な情報に対応するという説明が当てはまる。逆に、この定理からも、$(\beta,\beta)$ゲームにおいては、システム間の何らかの相関がその期待利得に影響を及ぼしていると考えられるのである。

## 3．相互エントロピーを用いた情報システムの評価

本節では、我々は、企業が情報システムを通して市場から獲得する情報や、情報システムを通して二つの企業間に生じる相関を相互エントロピーを用いて定量的に解析できることを示す。

確率変数$X$、$Y$の値を、それぞれ$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$、$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$、その生起確率分布を、$P=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$、$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_m\}$とすると、確率変数$X$、$Y$のエントロピー$S(X)$、$S(Y)$は、

$$S(X)\equiv-\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i、\qquad S(Y)\equiv-\sum_{i=1}^{m}q_i\log q_i\tag{3.1}$$

と与えられる。次に、$X$、$Y$の合成系$X\otimes Y=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),\cdots,(x_n,y_m)\}$と、その同時確立分布（結合確率分布）$\Phi=\{r_{11},r_{12},\cdots,r_{nm}\}$を考える。ここで、$\Phi$は次の条件を満たしている。

$$\sum_{i=1}^{n}r_{ij}=q_j、\qquad \sum_{j=1}^{m}r_{ij}=p_i\tag{3.2}$$

このとき、$X$、$Y$の相互エントロピー$I(X,Y;\Phi)$は、次で定義される。

$$I(X,Y;\Phi)\equiv\sum_{i,j=1}^{n,m}r_{ij}\log\frac{r_{ij}}{p_iq_j}\tag{3.3}$$

$$= S(X) + S(Y) - S(X \otimes Y) \tag{3.4}$$

ここで、$S(X \otimes Y) = -\sum_{i,j} r_{ij} \log r_{ij}$。また、条件（3.2）を満たす$P$と$Q$の同時確立分布$\Phi$は、ただ一つとは限らないので、相互エントロピーは$\Phi$の与えかたに依存し$I(X,Y;\Phi)$と書ける。エントロピー$S(X)$は確率分布$P$の情報量を表わし、相互エントロピー$I(X,Y;\Phi)$は分布$P$に含まれる分布$Q$の（あるいは、分布$Q$に含まれる分布$P$の）情報量である。

さて、相互エントロピーは$(X,P)$を入力系、$(Y,Q)$を出力系として、その間の伝送システムを表現するチャネル$\Lambda^*$という概念を用いても定式化できる。チャネル$\Lambda^*$は入力状態$P$から出力状態$Q$への推移確率行列$(p(j|i))$（i.e., $q_j = \sum_{i=1}^{n} p(j|i) p_i$）で表わされ、このとき入力状態$P$とチャネル$\Lambda^*$に関する相互エントロピー$I(P;\Lambda^*)$は次で与えられる。

$$I(P;\Lambda^*) = \sum_{i,j=1}^{n,m} p(j|i) p_i \log \frac{p(j|i) p_i}{p_i q_j} \tag{3.5}$$

この相互エントロピーは、入力状態$P$の情報量がチャネル$\Lambda^*$を通してどれだけ正確に出力状態$Q$に伝送されるかを示す情報量である。

ここで、チャネル表現の相互エントロピーを用いると、細江の情報システムのモデルを情報理論の観点から解釈することができる。いま、入力系を市場の需要を表わす確率変数$a$とその生起確率分布$p(a)$の組$(a, p(a))$、出力系を企業が受け取るシグナル$s$とその確率分布$p(s)$の組$(s, p(s))$とすれば、チャネルにはシグナル発生の条件付き確率分布（2.2.1）が対応し、精度$\beta$の条件付き確率分布$p_\beta(s|a)$を$\Lambda_\beta^*$と書けば、下図のような対応関係が成立する。

| 市場 | → | 情報システム | → | 企業 |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | $p_\beta(s\|a)$ | | $s$ |
| ⇕ | | ⇕ | | ⇕ |
| 入力系 | → | チャネル | → | 出力系 |
| $(a, p(a))$ | | $\Lambda_\beta^*$ | | $(s, p(s))$ |

すなわち、入力状態$p(a)$のチャネル$\Lambda_\beta^*$に関する相互エントロピー$I(p(a);\Lambda_\beta^*)$は、

$$I(p(a);\Lambda_\beta^*) = \sum_{i,j=1}^{2} p_\beta(s_j|a_i) p(a_i) \log \frac{p_\beta(s_j|a_i) p(a_i)}{p(a_i) p(s_j)}$$

と与えられ、これは、企業が市場の持つ情報量$S(a)$のうち、情報システム$\Lambda_\beta^*$を通して$I(p(a);\Lambda_\beta^*)$の情報量を獲得できることを示している。

我々は、ベイズの定理を用いて、市場とシステム、あるいはシステム間同士の同時確立分布などを求めることができるので、以下の三つの相互エントロピーを計算することができる。ただし、相互エントロピーの表記は、何と何の相互エントロピーかということを分かり易くするために確率変数による表記を使用する。また、これらの相互エントロピーは情報システムの精度$\beta$に依存するので、精度$\beta$を添え字として明記する。

（i）システム$s_i$と確立変数$a$の相互エントロピー；

$$I_\beta(a,s_i)=S(a)+S_\beta(s_i)-S_\beta(a\otimes s_i)$$

各企業が情報システムを通して、市場から獲得する情報量。（$I_\beta(a,s_1)=I_\beta(a,s_2)$）

（ii）システム$s_1$と$s_2$の相互エントロピー；

$$I_\beta(s_1,s_2)=S(s_1)_\beta+S(s_2)_\beta-S(s_1\otimes s_2)_\beta$$

二つのシステム間で共有される情報量（システム間の相関を表す）。

（iii）システムの合成系$s_1\otimes s_2$と確立変数$a$の相互エントロピー；

$$I_\beta(a,s_1\otimes s_2)=S(a)+S_\beta(s_1\otimes s_2)-S_\beta(a\otimes s_1\otimes s_2)$$

システムの合成系が市場から獲得する情報量（市場から獲得する２企業全体としての情報量）。

**定理 3-1** [3]

（１）　$0=I_{\beta=\frac{1}{2}}(a,s_i)<I_{\frac{1}{2}<\beta<1}(a,s_i)<I_{\beta=1}(a,s_i)=S(a)$

（２）　$0=I_{\beta=\frac{1}{2}}(s_1,s_2)<I_{\frac{1}{2}<\beta<1}(s_1,s_2)<I_{\beta=1}(s_1,s_2)=S(a)$

（３）　$0=I_{\beta=\frac{1}{2}}(a,s_1\otimes s_2)<I_{\frac{1}{2}<\beta<1}(a,s_1\otimes s_2)<I_{\beta=1}(a,s_1\otimes s_2)=S(a)$

ここで、$\frac{1}{2}\leq\beta\leq1$の範囲で$I_\beta(\cdot,\cdot)$は連続な単調増加関数である。

（１）の関係式は、$\beta=\frac{1}{2}$（ゼロ情報）のとき、企業がシステムを通して市場から獲得できる情報量はゼロであり、$\beta$の精度が上がるに連れて獲得出来る情報量は増加し、$\beta=1$（完全情報）において、市場の持つ情報量$S(a)$を全て獲得することを表している。すなわち、細江により（2.2.1）式で与えられた情報システムのメカニズムは、情報理論の観点からも非常に自然なものということができる。

（２）は、$(\beta,\beta)$ゲームにおける二つのシステム間の相関の変化を表している。（１）と同様に、ゼロ情報においては、その相互エントロピーはゼロであり、完全情報では、二つのシステムが共有する情報量は市場のエントロピーに等しい。これは、$(1,1)$ゲームでは、各企業が個々に市場調査を行っても、お互いにその予測が完全であるということから、共有情報（公開情報）として、$a$に対する正確な情報を共有していることに対応する。（２）は、$(0,0)\to(\beta,\beta)\to(1,1)$というシステムの精度の変化に対応する２企業間の相関の強さを表すものとして、妥当な関係式といえよう。

最後に、関係式（３）は、$(\beta,\beta)$ゲームにおいて二つのシステムの合成系を考えたとき、

企業側全体として、市場からどれだけの情報量をシステムの精度に応じて獲得しているかということを表している。その結果は、（1）、（2）と同じであり、これもまた自然な結果である。

定理 3-1 の結果を弁図で表現すれば、$\beta=\frac{1}{2}$では、三つのエントロピー$S(a)$、$S(s_1)$、$S(s_2)$の重なる部分はゼロであり、$\beta=1$では、この三つが完全に重なる。ゼロ情報ゲームから、完全情報ゲームへ変化するにつれて、市場とシステムの相関が強くなっていく様子が、その重なる部分が増加していくことによって表されるのである。

さらに、上記三つの相互エントロピーの関係を示すものとして、次の定理が成立する[3]。

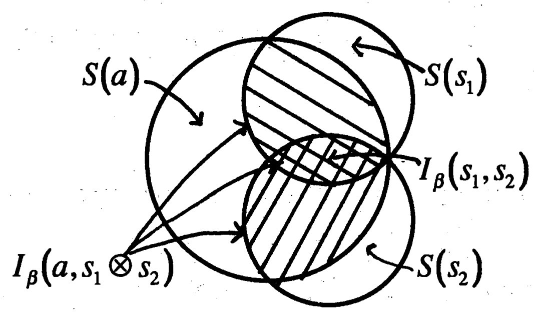
**定理 3-2**　$\delta=\frac{1}{2}$のケースにおいて、次の関係式が成立。

$$I_\beta(s_1,s_2)\le I_\beta(a,s)\le I_\beta(a,s_1\otimes s_2)\qquad (\tfrac{1}{2}\le\beta\le 1)$$

かつ、

$$I_\beta(s_1,s_2)=2I_\beta(a,s)-I_\beta(a,s_1\otimes s_2)$$

定理 3-2 の関係式から、市場とシステムの合成系の間の情報量の相関を弁図で表すと、下の図のようになる。




$(\beta,\beta)$ゲームでは、各企業は個々の情報システムを通して市場から$I_\beta(a,s)$の情報を獲得するが、その合成系$s_1\otimes s_2$を考えれば、企業側全体としては市場から$I_\beta(a,s_1\otimes s_2)$（$\ge I_\beta(a,s)$）の情報を獲得している。このとき、二つの企業が共有する情報量$I_\beta(s_1,s_2)$は、$I(a,s_1\otimes s_2)$に完全に含まれており、各企業は相手が得た情報量のうち、$I_\beta(s_1,s_2)$の分だけ同じ情報を互いに共有していることが分かる。すなわち、システム間の相互関連によって、共有できる市場からの情報が、システム間の相互エントロピー$I_\beta(s_1,s_2)$で表されている。

$(\beta,0)$（$(0,\beta)$）ゲームにおいては、企業$i$ が獲得できる情報量は$I_\beta(a,s_i)$だけであるから、この相互エントロピー$I_\beta(s_1,s_2)$は二つの企業がシステムを私的利用することによって生まれる市場からの情報の付加価値だと考えることができる。

以上の結果から、我々は、$(\beta,\beta)$ゲームで成立した期待利得関数に関する不等式

$$\underset{s}{E}\left(U_i^{(\beta,\beta)}(a)\right)>\underset{s}{E}\left(U_i^{(1,1)}(a)\right)\qquad (*)$$

をうまく説明できたであろうか？

確かに、$(\beta,\beta)$ゲームでは、情報量$I_\beta(a,s)$に加え、システム間で$I_\beta(s_1,s_2)$の情報を共有するといった付加価値が生じ、よって、不完全情報下における期待利得が完全情報下のそれを上回るという結果に何らかの影響を及ぼしていると考えることはできる。しかし、今回の結果からは、相互情報量によって、不等式（＊）が成立する$\beta$の範囲を特徴付けることはできていない。本稿では、我々は、細江のモデルに直接相互エントロピーを適用し、計算したが、期待利得と情報量の関係をより厳密に議論するためにはモデルの設定の段階から利得関数の中などに情報理論的な視点を取り入れることが必要と思われる。

（**備考**：2 節において、$(\beta,\beta)$ゲームの期待利得を計算する際に我々は、システム間の同時確立分布を (2.2.6) 式を用いて計算したが、細江のオリジナルの論文では同時確立分布が独立なものとして、

$$p(s_j=\underline{s},s_i=\overline{s})=p(s_j=\underline{s})\cdot p(s_i=\overline{s})、\ p(s_j=\overline{s},s_i=\underline{s})=p(s_j=\overline{s})\cdot p(s_i=\underline{s})$$

と与えられて計算される[2]。このような設定を行っても、期待利得の評価は我々の定理 2-2 と似たような評価を与えるが、相互エントロピーをこの設定に適用するとシステム間の相関は 0 になってしまう。よって、情報理論の観点からすれば、システム間の同時確立分布は (2.2.6) 式で与えられる方がより自然であり、そのとき、各企業と市場の間に存在する相互関連が相互エントロピーを用いて整合的に説明されると言うことができよう。）

**参考文献**

[1] J. von Neumann & O. Morgensten ;"Theory of Games and Economic Behavior", Princeton University Press, 1944, 1947(2nd ed), 1953(3rd ed).

[2] 細江守紀;"寡占市場における情報獲得と情報シェアリング", 経済学研究(九州大学), 第 53 巻第 1-2 号, 127-145 (1987).

[3] T.Matsuoka & M.Ohya ;"Information gain and mutual entropy on game theory", preprint.

[4] R. Gibbons ;"Game Theory for Applied Economists", Princeton University Press, 1992.

[5] 酒井泰弘 ;"複占市場における情報の役割－需要不確実性のケース－", 筑波大学経済学論集, 第 13 号, 1-29 (1984).

[6] 酒井泰弘 ;"シュタッケルベルグ均衡とクールノー均衡－情報構造変化の厚生効果－", 筑波大学経済学論集, 第 15 号, 1-31 (1985).