数理解析研究所講究録
1013 巻 1997 年 51-59



# 群上の RANDOM WALK と 非可換中心極限定理

名古屋大学多元数理科学
橋本行洋 (YUKIHIRO HASHIMOTO)

## 1. Introduction

非可換確率論 (量子確率論) では [独立性」の概念が様々に採りうる為, 種々の中心極限定理が研究され, 古典確率論では現れない新しい極限分布が見つかっている. 典型的には Voiculescu の自由独立性から得られる Wigner の半円則がある[19]. それらは通常, 扱う代数系の非可換性に由来していると考えられている. ここでは「非可換性」或いは「独立性」の極限分布への反映を見る一つの試みとして, 離散群に付随する Cayley グラフ上の random walk を考え, そのスペクトルのスケーリング極限を求める.

$G$ を $\{g_1, g_2, \ldots\}$ で生成される離散群とする. 簡単のため各 $g_i$ の位数は全て 2 または全て 3 以上とする. $\ell^1(G)$ は convolution

$$f * g(x) := \sum_{y \in G} f(y) g(y^{-1}x)$$

と involution $f(x) := \overline{f(x^{-1})}$ によって$*$-代数になる. この$*$-代数 $\ell^1(G)$ の非退化$*$-表現 $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ を一つとる. すると $\ell^1(G)$ の$\pi$による像の closure $C^*_\pi(G)$ は C$^*$-代数になる. $C^*_\pi(G)$ 上の線形関数$\phi$で$\phi(f^*f) \geq 0$, $\phi(e) = 1$($e$ は単位元) をみたすものを **state** と呼ぶ. このとき $(C^*_\pi(G), \phi)$ は C$^*$-確率空間と呼ばれ, $C^*_\pi(G)$ の元 $x$ を確率変数, $\phi(x)$ を $x$ の期待値と見做して「確率論」が展開される.

次に確率変数の列 $\{X_k\}$ を $C^*_\pi(G)$ の元

$$X_k = g_1 + g_1^{-1} + g_2 + g_2^{-1} + \cdots + g_k + g_k^{-1}$$

で与える. $\phi(X_k^m)$ を $m$ 次の **moment** と呼び, それに対応する一次元分布$\mu_k$が存在するとき$\mu_k$を state $\phi$の下での $X_k$の分布と呼ぶ. $X_k$は自己共役作用素なのでスペクトル分解

$$X_k = \int_{\mathbf{R}} \lambda dE_\lambda$$

され, 従って $m$ 次 moment とは,

$$\phi(X_k^m) = \int_{\mathbf{R}} \lambda^m \phi(dE_\lambda)$$

のことである. そして moment 列に適当な条件があれば, その moment 列を与える一次元分布$\mu_k$が一意的に存在し, 従って$\mu_k(d\lambda) = \phi(dE_\lambda)$ となる. つまり $X_k$のスペクトルをある特定の方向について調べていることになる.

さて問題にするのは, $X_k$を平均 0 分散 1 となるようにスケール変換しながら (それを $\overline{X}_k$と書く) $k \to \infty$ としたときの分布$\mu$である. これを中心極限分布と呼ぶ. 極限分布$\mu$の moment $M_m$は

$$M_m = \lim_{n\to\infty} \phi(\overline{X}_n^m) = \int_{\mathbf{R}} x^m d\mu(x)$$

により与えられる. そしてこの $M_m$を組み合わせ論的に記述することが本稿の目論みである.

## 2. Random walks associated with a regular representation

ここでは群 $G$ の正則表現に付随した C*-確率空間での中心極限定理を議論する. この場合 state $\phi$は, 任意の $g \in G$ に対し

$$\phi(g) = 1 \quad (g = \text{単位元のとき}), \qquad = 0 \quad (g \neq \text{単位元のとき})$$

として与えられる. $\phi$に関する $X_k$の正規化$\overline{X}_k$は

$$\begin{aligned} \overline{X}_n &= \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(g_1 + g_1^{-1} + \cdots + g_n + g_n^{-1}\right) \\ ( \quad &= \frac{1}{\sqrt{n}}(g_1 + \cdots + g_n), \qquad g_i\text{の位数が全て 2 のとき}) \end{aligned}$$

となる. これは群 $G$ の Cayley グラフ上の等方的な random walk を考えることに他ならない. 以下に典型的な例を挙げる.

(1) $G$ を free Abel 群にすると $\{\overline{X}_k\}$ の極限分布は Gauss 分布

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

となる.

(2) $G$ を free 群 $F_\infty$にすると $\{\overline{X}_k\}$ の極限分布は Wigner の半円分布

$$\frac{1}{2\pi}\chi_{[-2,2]}(x)\sqrt{4-x^2}dx$$

となる. (この 2 例については[15] に詳細な解説がある.)

(3) $G$ が無限対称群 $\mathfrak{S}_\infty$のとき生成元を $\{(12), (23), (34), \ldots\}$ にとると Gauss 分布が, $\{(12), (13), (14), \ldots\}$ にとると半円分布が現れる[2][7].

次に一般的な結果について述べる[7]. 以下では重要な仮定

**Assumption 2.1.** $G$ は $\{g_1, g_2, \ldots\}$ によって ***minimal*** に生成される (つまり $\{g_i\}$ のどんな真部分集合も $G$ を生成しない)

を置く. この仮定は, 単位元から出発して再び戻ってくる "closed walk "

$$g_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots g_{i_m}^{\epsilon_m} = e, \qquad \epsilon_i = \pm 1$$

において, 各 $g_i$ は 2 回以上ずつ現れることを意味する.（例えば $g_1$ が 1 回だけ現れたなら上の等式から $g_1$ が他の生成元によって生成されることになり minimal という仮定に反する.）このことから以下を得る.

**Theorem 2.2.**

(1) $M_{2m+1} = 0, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$

(2) $M_{2m} \leq \frac{1}{2^m} \# Pal_G(2m, m).$

ここで $Pal_G(2m, m)$ は

$$\begin{aligned} Pal_G(2m,m) \;&:=\; \{(g_{i_1}^{\epsilon_1}, \ldots, g_{i_{2m}}^{\epsilon_{2m}}) \mid \\ &\qquad g_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots g_{i_{2m}}^{\epsilon_{2m}} = e,\ \#\{g_{i_p}\} = m\}/\mathfrak{S}_\infty \end{aligned}$$

であり, また $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$ は

$$\sigma(g_{i_1}^{\epsilon_1}, \ldots, g_{i_{2m}}^{\epsilon_{2m}}) = (g_{\sigma(i_1)}^{\epsilon_1}, \ldots, g_{\sigma(i_{2m})}^{\epsilon_{2m}})$$

によって作用させる. (1) より分布は常に原点対称となる. また (2) より $2m$ 次 moment は長さ $2m$ で $m$ 種類の生成元の pair（pair partition）で記述される closed walk の "パターン" の個数のみによって与えられる. それは closed walk のうちある $g_{i_p}$ が 3 回以上現れるものは, 組合せの数が分母の order よりも下がってしまうため極限においては moment に寄与しなくなるのである.

極限分布の moment はいつも存在する訳ではないが, 例えば次が成り立つ.

**Theorem 2.3.** $g_1, g_2, \ldots$ が ***symmetric***（つまり $g_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots g_{i_m}^{\epsilon_m} = e$ ならば $g_{\sigma(i_1)}^{\epsilon_1} \cdots g_{\sigma(i_m)}^{\epsilon_m} = e$ が任意の置換 $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ で成り立つ）ならば 全ての *moment* が存在し, 偶数次の *moment* は

$$M_{2m} = \frac{1}{2^m} \# Pal_G(2m, m)$$

で与えられる.

また free 群の普遍性と生成元を生成元に写す群の準同型が closed walk を closed walk に写すこと, そして Gauss 分布の moment が pair partition の上限を与えることから次を得る.

**Theorem 2.4.** *minimal* に生成された群 $G$ について

$$\frac{(2m)!}{(m+1)!m!} \leq M_{2m} \leq \frac{(2m)!}{2^m m!}$$

が成り立つ.

標語的にいえば,

$$\text{Wigner 半円則の } m \text{ 次 moment} \leq M_m \leq \text{Gauss 分布の } m \text{ 次 moment}$$

となり minimal に生成された群に付随した moment は free 群と Abel 群の典型的な 2 例に挟まれている. この結果から容易に一般の可換群に付随する極限分布は常に Gauss 分布になることが導かれる. また Biane[2] による無限対称群上の極限分布についての証明を一般化することで次を得た.

**Proposition 2.5.** $N^{(k)}$を $\{(f_{i_1}f_{i_2}\cdots f_{i_l})^{kl+1} |\ l \in \mathrm{N}\}$ で生成される *free* 群 $F_\infty$の正規部分群とする. このとき $F_\infty/N^{(k)}$に付随する極限分布は *Wigner* の半円分布になる.

しかし, 一般に具体的な群が与えられたときその群に付随する moment を, 従って極限分布を計算することは組合せ論的な難しい問題である.

**Remark** 実は minimal 生成の仮定は pair partition のみが moment に寄与するようにつけた仮定であり, 従って minimal の仮定はもっと一般化した仮定に置き換えて論じることができる. 実際, 以上の結果は一般の C*-確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ へも拡張が可能である[1].

$\{a_j\} \in \mathcal{A}$ が state $\phi$ に関して **singleton condition** を満たすとは, 積 $a_{j_1}^{\epsilon_1}\cdots a_{j_m}^{\epsilon_m}$において ($a^\epsilon = a$ または $a^*$) ある $a_{j_s}$が $\phi(a_{j_s}) = 0$ でしかも 1 度しか現れないならば

$$\phi(a_{j_1}^{\epsilon_1}\cdots a_{j_m}^{\epsilon_m}) = 0$$

となることをいう. そしてこの条件の下では群に於いて minimal を仮定したときと全く同じ議論が行えるのである.

## 3. Anisotoropic random walks on free groups

前節とは違い, ここでは群 $G$ として $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ で生成される free 群 $F_n$のみを考え, 以下の 2 種の state における中心極限定理を議論する.

(i) $g \in F_\infty$に対し $\varphi_a(g) = a^{|g|}\quad (0 \leq a \leq 1)$, ここで $|g|$ は $g$を生成元 $\{g_i\}$ で表示したときの最短の長さを表わす (簡約表示での長さ. 例えば $g = aa^{-1}ab^{10}b^{-1}a^9b^3b^4 = ab^9a^9d^7$に対し $|g| = 1+9+9+7$). これは Haagerup 関数と呼ばれ $C_\pi^*(F_\infty)$ 上の state になる[6].

(ii) $g \in F_n$に対し $\psi_n(g) = (1 + \frac{n-1}{n}|g|)/(\sqrt{2n-1})^{|g|}$. これは free 群の主系列表現の 1 つを与え $C_\pi^*(F_n)$ 上の state になる[4].

確率変数 $X_k$の$\varphi_a, \psi_n$に関する正規化を $Y_k, Z_k$とする $(k \leq n)$：

$$Y_k := \frac{X_k - 2ak}{\sqrt{2k(1-a^2)}},$$

$$Z_k := \frac{X_k - 2k\frac{\sqrt{2n-1}}{n}}{\sqrt{2k\left(1 - \frac{2(2n-1)}{n^2} + \frac{3n-2}{n(2n-1)}\right)}}.$$

これらは tree 上の非等方的な random walk を考えることに相当する．正則表現の場合には pair partition を与える積のみが moment に寄与したが，この 2 例では pair partition 以外の積も moment に寄与する．その為，非対称な分布が現れる．（後の Remark 参照.）

各々moment を具体的に計算することで次の結果を得た[8].

**Theorem 3.1.** *$Y_k$の state $\varphi_a$下での極限分布を$\mu_{a,k}$とする．$k \to \infty$ で $a \approx A(2k)^\alpha$とする．*

(i) $\alpha < -1/2$ ならば $d\mu_{a,k}$は *Wigner* の半円分布に弱収束する：

$$\lim_{k\to\infty} d\mu_{a,k}(x) = \frac{1}{2\pi}\chi_{[-2,2]}(x)\sqrt{4-x^2}dx.$$

(ii) $\alpha = -1/2$ のとき $0 \leq A \leq 1$ ならば $d\mu_{a,k}$はパラメータ $A$ つきの分布$\mu_A$に弱収束する (*Figure A*)：

$$\lim_{k\to\infty} d\mu_{a,k}(x) = d\mu_A = \frac{1}{2\pi}\chi_{[-2-A,2-A]}(x)\frac{\sqrt{(2+A+x)(2-A-x)}}{1-Ax}dx.$$

特に (ii) は次の点で興味深い.

(1) $\mu_0$は Wigner 半円則となり Voiculescu の free entropy を maximize する $\mathbf{R}$ 上の分布として特徴づけられ，また$\mu_1$も free entropy を maximize する $\mathbf{R}_+$上の分布（Ullman 分布の一種）として特徴づけられる[9].

(2) (ii) の 1-パラメータ分布はまた free poisson 則に現れる分布$\pi_\beta$と

$$\begin{aligned} \pi_\beta &= \beta S^*\mu_{\sqrt{\beta}} + (1-\beta)\delta_0 \\ & \quad S(x) = \frac{1-x}{\sqrt{\beta}}, \qquad \beta = A^2 \end{aligned}$$

なる関係がある[3].

Theorem3.1の証明と殆んど並行して $Z_k$に関する結果を得る.

**Theorem 3.2.** $Z_k$ $(k \leq n)$ の *state* $\psi_n$下での極限分布を$\nu_{n,k}$とする．$k \to \infty$ で $n \approx B^2 k^\beta$ とする．

(i) $\beta > 1$ ならば $d\nu_{n,k}$は *Wigner* の半円分布に弱収束する：

$$\lim_{k\to\infty} d\nu_{n,k}(x) = \frac{1}{2\pi}\chi_{[-2,2]}(x)\sqrt{4-x^2}dx.$$

(ii) $\beta = 1$ のとき $B > 1$ ならば $d\nu_{n,k}$はパラメータ $B$つきの分布$\nu_B$に弱収束する (*Figure B*)：

$$\lim_{k\to\infty} d\nu_{n,k}(x) = \frac{1}{2\pi}\chi_{[-2-\frac{2}{B},2-\frac{2}{B}]}(x)\frac{(B^2-1)\sqrt{(2+\frac{2}{B}+x)(2-\frac{2}{B}-x)}}{(B-\frac{1}{B}-x)^2}dx.$$

特に (ii) において $B \searrow 1$ とすると$\delta_0$が現れ, $B \to \infty$ とすると Wigner 半円則が現れる．

証明の概略は次のようなものである．

まず$\varphi_a(Y_k^l)$ を厳密に展開する．

(1) $Y_k^l$を展開して現れる, 簡約表示して長さ $r$の項の個数を $N(l,r)$ とする．特に $N(0,0) = 1$, $l < r$ または $r < 0$ のとき $N(l,r) = 0$ とする．

(2) 多項式

$$f_l(w) = \sum_{r=0}^{l} N(l,r)w^r.$$

を考えると定義から$\varphi_a(X_k^l) = f_l(a)$ となる．

(3) $\{N(l,r)\}$ は漸化式

$$N(l,r) = (2k-1)\ N(l-1,r-1) + N(l-1,r+1)$$

を満たし, $N(1,1) = 2k$, $N(1,0) = 0$ である．

(4) $S, D : \mathbf{C}[w] \to \mathbf{C}[w]$ を

$$D[1] = 0,\ D[w^l] = w^{l-1},\ S[w^l] = w^{l+1}$$

なる線型作用素とする．すると

$$f_l(w) = \frac{2k}{2k-1}[(2k-1)S + D]^l[1] \quad (l > 0),$$
$$f_0(w) = 1$$

と書ける．

(5) ここで “非可換の 2 項展開公式” を準備する．

**Lemma 3.3.** $u, v \in \mathbf{C}$ について

$$[uS+vD]^l[1] = \sum_{\substack{p+q=l\\ p\geq q}} C_{p,q} u^p v^q w^{p-q}.$$

但し,

$$C_{p,q} = \binom{p+q}{p} - \binom{p+q}{p+1}$$

であり *Catalan* 数と呼ばれる.

この公式を使うことにより, 厳密な展開式

$$\phi_a(Y_k^m) = \frac{2k}{2k-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2k(1-a^2)}}\right)^m \sum_{l=1}^m \binom{m}{l}(-2ka)^{m-l} \sum_{\substack{p+q=l\\ p\geq q}} C_{p,q}(2k-1)^p a^{p-q} - \frac{1}{2k-1}\left(\frac{-2ka}{\sqrt{2k(1-a^2)}}\right)^m$$

を得る. そしてこの式から$\alpha \leq -1/2$ が必要であることが分かる.

(6) $\alpha = -1/2$ の場合, $a = A/\sqrt{2k}$と置いて次のように分布の Fourier 変換が計算される：

$$\int_{\mathbf{R}} e^{itx} d\mu_{a,k}(x) = \frac{2k}{2k-1} e^{-\frac{itA}{\sqrt{1-a^2}}} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}\left(\frac{it}{\sqrt{2k(1-a^2)}}\right)^m \sum_{\substack{p+q=m\\ p\geq q}} C_{p,q}(2k-1)^p \left(\frac{A}{\sqrt{2k}}\right)^{p-q} - \frac{1}{2k-1}\exp\left(-\frac{itA}{2k\sqrt{1-a^2}}\right).$$

(7) ここで $k \to \infty$ とすると極限分布の Fourier 変換が

$$\int_{\mathbf{R}} e^{itx} d\mu_A(x) = e^{-itA}\sum_{m=0}^\infty \frac{(it)^m}{m!} \sum_{\substack{p+q=m\\ p\geq q}} C_{p,q} A^{p-q} = \sum_{r=0}^\infty (iA)^r \left(J_r(2t) + J_{r+2}(2t)\right)$$

と Bessel 関数の級数で与えられ, Fourier 逆変換をして Theorem3.1を得る.

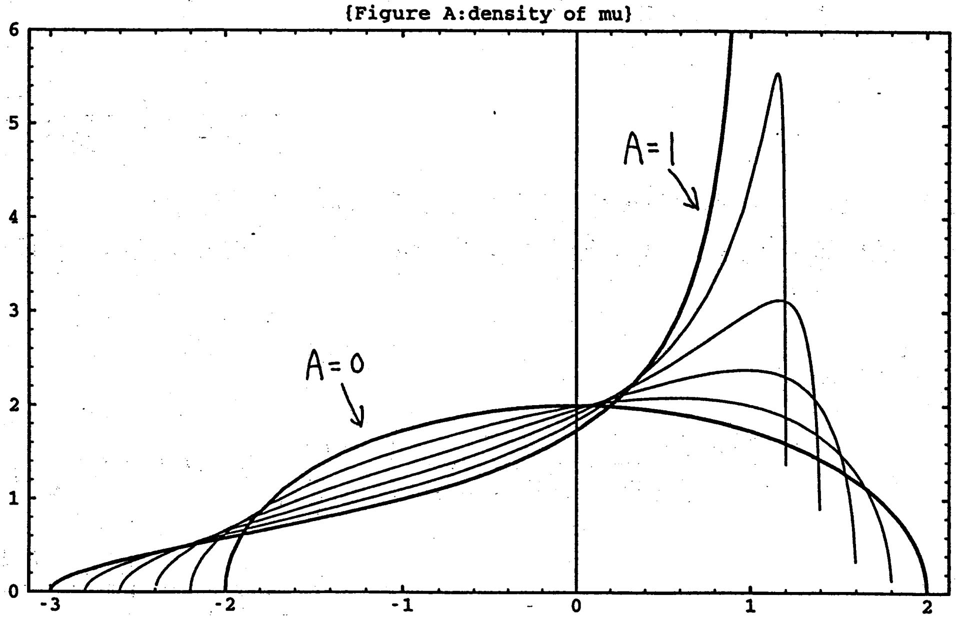
$\psi_n$の場合には, 多項式

$$h_l(w) = \sum_{r=0}^l N(l,r)\left(1 + \frac{n-1}{n} r\right) w^r = \left[1 + \frac{n-1}{n} w \frac{d}{dw}\right] f_l(w)$$

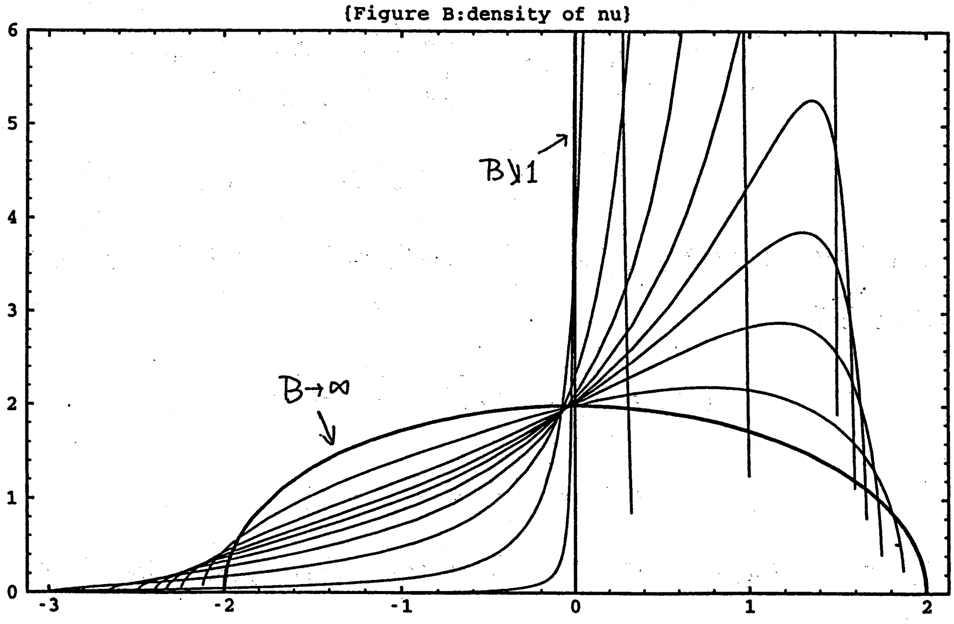
を考えると定義から$\psi_n(X_k^l) = h_l(1/\sqrt{2n-1})$ となり, Theorem3.1と殆んど同様に証明できる.

**Remark** 最近 Haagerup state の持つ性質を注意深く観察することで, 新しい独立性の概念が見つかった[1]. 正則表現に於いては pair partition のみが moment に寄与し, いわゆる singleton を含んだ積の期待値は初めから消えていた. しかし Haagerup state の場合には cancelation を妨げるような singleton (例えば $g_1g_2g_1^{-1}$での $g_2$といったもの) が本質的な役割を持ち, pair partition (実際には non-crossing pair partition) と cancelation を妨げる singleton とからなる積が moment に寄与してくる. 従って奇数の長さを持った積も moment に寄与することになり, 奇数次の moment が消えずに残るのである. これはこれまで非可換確率論で見つかっているどの独立性の概念とも異質であり, 全く新しいタイプの独立性の現れである.

{Figure A:density of mu}




{Figure B:density of nu}



## References


1. L. Accardi, Y. Hashimoto, N. Obata, in preparation.
2. P. Biane, *Permutation model for semi-circular systems and quantum random walks,* Pacif. J. Math. **171**, 373-387, 1995.
3. M. Bożejko, M. Leinert, R. Speicher, *Convolution and limit theorems for conditionally free random variables,* preprint, 1991.
4. A. Figà-Talamanca and M. Picardello, *Harmonic Analysis on Free Groups,* Lecture notes in pure and applied mathematics **87**, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.
5. N. Giri and W. von Waldenfels, *An algebraic version of the central limit theorem,* Z. Wahr. Verw. Gebiete, **42**, 129-134, 1978.
6. U. Haagerup, *An example of a non nuclear $C^*$-algebra which has the metric approximation property,* Invent. Math. **50**, 279-293, 1979.
7. Y. Hashimoto, *A combinatorial approach to limit distributions of random walks : on discrete groups,* submitted, 1996.
8. ———, *Deformations of the semi-circle law derived from random walks on free groups,* submitted, 1997.
9. F. Hiai and D. Petz, *Maximizing free entropy,* preprint, 1996.
10. 洞 彰人, 量子確率論とグラフのスペクトル解析について, 量子確率解析とその周辺, 数理解析研究講究録 **957**, p109-121, 1996.
11. H. Kesten, *Symmetric random walks on groups,* Trans. Amer. Math. Soc. **92**, 336-359, 1959.
12. M. Magnus, A. Karrass, D. Soliter, *Combinatorial Group Theory 2nd rev. ed.,* Dove, New York, 1976.
13. P. Meyer, *Quantum Probability for Probabilists,* Lecture Notes in Mathematics **1538**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
14. N. Muraki, *A new example of noncommutative "de Moivre-Laplace theorem",* Watanabe, S. (et al.), *Probability Theory and Mathematical Statistics: Proceedings of the Seventh Japan-Russia Symposium,* 353-362, Tokyo, World Scientific, 1995.
15. 尾畑 伸明, 量子確率論への招待, 多元数理フォーラム **2**, 1-19, 名古屋大学, 1996.
16. P. M. Soardi, *Potential theory on infinite networks,* Lecture Notes in Mathematics **1590**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
17. R. Speicher, *A new example of 'independence' and 'white noise',* Prob. Th. Rel. Fields, **84**, 141-159, 1990.
18. D. V. Voiculescu, *Limit laws for random matrices and free products,* Invent. math. **104**, 201-220, 1991.
19. D. V. Voiculescu, K. J. Dykema, A. Nica, *Free random variables,* CRM Monograph Series **1**, AMS, 1992.
20. W. von Waldenfels, *An algebraic central limit theorem in the anti-commuting case,* Z. Wahr. Verw. Gebiete, **42**, 135-140, 1978.
21. W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups—A survey on selected topics,* Bull. London Math. Soc. **26**, 1-60, 1994.