数理解析研究所講究録
1014巻 1997年 21-30

Stokes phenomena of holonomic systems

北大理・本多 尚文
(Naofumi HONDA)

本稿では、不確定特異点型の極大過剰決定系の、正則マイクロ関数解に関するStokes現象について述べようと思う。微分方程式論で知られるStokes現象は、形式巾級数解に漸近する角領域上の正則解を、漸近を保ちながら延長する時現れる障害であり、また、異なる角領域上の解を接続する問題と捉えられる。この問題を超局所的に考察する為には、最初に、形式巾級数解に相当する解層が必要である。

この様な解層を構成する為に以下の準備を行う。

§1. Sheaf $\mathcal{E}^{\mathbb{R},f-0}$

$Y\subset X$を複素多様体とその部分複素多様体とする。

T^*Xの局所座標系を$(z_1,\dots,z_n;\zeta_1,\dots,\zeta_n)$, $p=(0;dz_1)$

まず、$\mathcal{E}^{\mathbb{R},f}$の左、右両イデアル$I^{\mathbb{R},(-0)}$を次の様に定義する。

$$S^{(-0)}(\Omega) := \{P(z,\zeta)\in\mathcal{O}(\Omega)\,;\ \exists h>0,\ 1\geqq\exists\sigma>0,\ \exists C,\ \text{s.t.}\ |P(z,\zeta)|\leqq C e^{-h|\zeta|^{\sigma}}\}$$

$$S_p^{(-0)} := \varinjlim_{\Omega\ni p} S^{(-0)}(\Omega)$$

但し、Ωは、pの$\mathbb{R}^+$ conicな近傍を走るものとする。

片岡,青木両先生の Symbol Calculus に従い. $I^{(-0)}$ の点 p での stalk を,射 $S_p^{(-0)} \to \mathcal{E}_p^{\mathbb{R}f}$ の像 $\mathrm{Im}\, S_p^{(-0)}$ で定義する.

更に $\mathcal{E}^{\mathbb{R}f\text{-}0}$ を

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}f\text{-}0} := \frac{\mathcal{E}^{\mathbb{R}f}}{I^{\mathbb{R}(-0)}}$$

で定義する. $\mathcal{E}^{\mathbb{R}f\text{-}0}$ は $I^{\mathbb{R}(-0)}$ が $\mathcal{E}^{\mathbb{R}f}$ の両イデアルだから.明らかに環であり.更に.左.右 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}f}$ module である.また.$\mathcal{E}_X$ 上平坦である.

T^*X 上の $C^{\mathbb{R}f}_{Y|X}$ に対応する層,$C^{\mathbb{R}f\text{-}0}_{Y|X}$ は.

$$C^{\mathbb{R}f\text{-}0}_{Y|X} := \mathcal{E}^{\mathbb{R}f\text{-}0} \otimes_{\mathcal{E}^{\mathbb{R}f}} C^{\mathbb{R}f}_{Y|X}$$

で定義する.

$C^{\mathbb{R}f\text{-}0}_{Y|X}$ を導入する理由は.$C^{\mathbb{R}f\text{-}0}_{Y|X}$ で解を考える事は $C^{\mathbb{R}f}_{Y|X}$ の解を指数減少の解を省略して接続していく事に相当するからであり.これは常微分方程式における,異なる角領域上の解を同じ漸近展開を保ちながら接続する問題と同等と言えるからである.

実際 $C^{\mathbb{R}f}_{Y|X}$ 解は局所的な stokes 現象の為,複素構造を持つ.$\mathbb{C}$-Constructible sheaf とは一般にならないが.$C^{\mathbb{R}f\text{-}0}_{Y|X}$ 解は.再び $\mathbb{C}$-Constructible sheaf となる.

この事は.以下の章で多少の準備の後に示す.

§2. $\mathcal{C}^{\mathbb{R}f}_{Y|X}$, $\mathcal{C}^{\mathbb{R}f\text{-}0}_{Y|X}$ の解

$\Lambda \subset \dot{T}^*X$ を $\mathbb{C}^*$ Conic ラグランジアン多様体, $\sigma \geqq 1$ を有理数とする.
$E \subset \Lambda$ を $\mathbb{C}^*$ Conic 部分多様体とする時, E の fiber に沿った
euler vector field より誘導される射

$$\theta_E : T^*E \to \mathbb{C}$$

が定義される. うめ込み $E \hookrightarrow \Lambda$ より誘導される射

$$T^*E \xleftarrow{\rho_E} E \underset{\Lambda}{\times} T^*\Lambda \xrightarrow{\tilde{\omega}} T^*\Lambda$$

と合成して,

$$\theta_{\rho_E} : E \underset{\Lambda}{\times} T^*\Lambda \xrightarrow{\rho_E} T^*E \xrightarrow{\theta_E} E \times \mathbb{C}$$

を得る.

$p \in E$ の近傍で定義された holonomic $\mathcal{E}_X$ module $\mathcal{M}$ に対して
Λ に沿った不確定特異点度 σ の filteration $Fr^{(\sigma)}_\Lambda(\mathcal{M})$ を
とる。$Fr^{(\sigma)}_\Lambda(\mathcal{M})$ に対して,

$$Gr^{(\sigma)}_\Lambda(\mathcal{M}) = \Big(\bigoplus_k Fr^{(\sigma),k+1}_\Lambda(\mathcal{M}) / Fr^{(\sigma),k}_\Lambda(\mathcal{M})\Big) \underset{\pi^{-1}\mathcal{O}_\Lambda}{\otimes} \mathcal{O}_{T^*\Lambda}$$

$$\Sigma^{(\sigma)}_\Lambda(\mathcal{M}) = \operatorname{Supp}\big(Gr^{(\sigma)}_\Lambda(\mathcal{M})\big)$$

と定義する. 一般に $\Sigma^{(\sigma)}_\Lambda(\mathcal{M}) \subsetneq T^*_\Lambda\Lambda$ となる様な σ
は, 有限個の点しかないので, その様な点の組全体

$$(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\ell) \qquad (\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_\ell > 1)$$

を $\mathcal{M}$ の(すべての)不確定特異点度と呼ぶ.

最後に $\tilde{\Sigma}^{(\sigma)}_\Lambda(\mathcal{M})$ を $\Sigma^{(\sigma)}_\Lambda(\mathcal{M})$ の射 θ_{ρ_E} による像とする.

さて、Λ, $\Lambda_0 \subset \overset{\circ}{T}{}^*X$ を互いに clean intersect する2つの Lagrangian 部分多様体とし、$E = \Lambda \cap \Lambda_0$ とおく。

$\mathcal{M}$ を holonomic system で $\mathrm{supp}(\mathcal{M}) \subset \Lambda$ を満たすものとし、$\mathcal{N}$ を Λ_0 に沿って simple な holonomic system とする。

定理：

次の2つの条件 $(C.1.\sigma)$, $(C.2.\sigma)$

$(C.1.\sigma)$ $\quad \overline{\Sigma_\Lambda^{(\sigma)}(\mathcal{M}) \setminus (E \times \{0\})} \cap (E \times \{0\}) = \emptyset$

$(C.2.\sigma)$ $\quad G_\Lambda^{(\sigma)}(\mathcal{M})$ は free $\mathcal{O}_\Lambda$ module となる様な $\mathcal{M}$ の Filteration $F_\Lambda^{(\sigma)}(\mathcal{M})$ が存在する。

が $\mathcal{M}$ の不確定特異点度の組 $(\sigma_\ell, \sigma_{\ell-1}, \cdots, \sigma_1)$ のすべての σ_i について成立するものとする。

① $R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}, f}}(\mathcal{M}^{\mathbb{R}f}, \mathcal{N}^{\mathbb{R}f\text{-}0})$ は $\mathrm{Codim}_{\Lambda_0}(E)$ 以外のコホモロジーは全て消滅し、複素 Constructible sheaf となる。

② $R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}, f}}(\mathcal{M}^{\mathbb{R}f}, \mathcal{N}^{\mathbb{R}f})$ は同様に $\mathrm{Codim}_{\Lambda_0}(E)$ のみにコホモロジーが残り、それは一般に複素 Constructible sheaf でなく、実 Constructible sheaf となる。その micro support は $\bigcup_{\sigma_i} \tilde{\Sigma}_\Lambda^{(\sigma_i)}(\mathcal{M})$ と実超平面との交わりで評価される（この部分の詳細省略 □）

$R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}, f}}(\mathcal{M}^{\mathbb{R}f}, \mathcal{N}^{\mathbb{R}f})$ が複素構造を持たないことが、まさしく Stokes 現象なわけで、古典的な接続によって出来た sheaf が $R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}f}}(\mathcal{M}^{\mathbb{R}f}, \mathcal{N}^{\mathbb{R}f\text{-}0})$ と解釈出来る。

この2つの解層には、標準射

$$RHom_{\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}f}}(\mathcal{M}^{\mathbb{R}f}, \mathcal{N}^{\mathbb{R}f}) \longrightarrow RHom_{\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}f}}(\mathcal{M}^{\mathbb{R}f}, \mathcal{N}^{\mathbb{R}f\text{-}0})$$

が存在する. よって、この2つの解層及び射が超局所解析における Stokes 現象の舞台になる訳である. 上の射はコホモロジー間の全射となっている事に注意する.

§3. 例

§2 を踏まえて、次の定義を導入する. まず

$X = \mathbb{C},\ Y = \{0\},\ \Lambda = \mathring{T}^*_Y X \simeq \mathbb{C}^*_\zeta$.

$\{\Lambda_\alpha\}$ を Λ の $\mathbb{R}^+$ Conic な Stratification とし,

$$U(\Lambda_\alpha) = \bigcup_{\Lambda_\alpha \subset \overline{\Lambda_\beta}} \Lambda_\beta$$

と置く. $\forall\alpha$ に対して, $U(\Lambda_\alpha)$ は単連結と仮定する.

2つの Categories

$\mathcal{C}(\{\Lambda_\alpha\}) := \{$ $\{\Lambda_\alpha\}$ を Stratification として持つ $\mathbb{R}$-Constructible sheaf の cat.

$\mathcal{C}^{st}(\{\Lambda_\alpha\}) := \begin{cases} ob(\mathcal{C}^{st}(\{\Lambda_\alpha\})) = ob(\mathcal{C}(\{\Lambda_\alpha\})) \\ Hom_{\mathcal{C}^{st}(\{\Lambda_\alpha\})}(F, G) = \bigoplus_\alpha Hom_{\mathbb{C}}(F_{U(\Lambda_\alpha)}, G_{U(\Lambda_\alpha)}) \end{cases}$

とする.

次の単純な事実が成立する.

補題: 次の $C(\{\Lambda_\alpha\})$ における図式

$$\begin{tikzcd} \phi : F \arrow[r] & G \arrow[r] & 0 \\ & G \arrow[u, "id_G"'] \arrow[ul, dotted, "\phi_{st}"] & \end{tikzcd}$$

もし. G が $\mathbb{C}$-Constructible なら. id_G のリフト ϕ_{st} が $C^{st}(\{\Lambda_\alpha\})$ に存在する. ($C(\{\Lambda_\alpha\})$ ではない) □

そこで. 上の様な ϕ_{st} を 組 $F \to G$ のリフトのストークス写像と呼ぶ.
また. ϕ_{st} を $C(\{\Lambda_\alpha\})$ の中から取れる場合. 組 $F \to G$ は "Stokes 現象を持たない" と定義する.

さて. t-equation (常微分方程式論で Stokes 現象の例として良く考えられている) の超局所バージョンで. 上の意味で Stokes 現象を持つ例を考えてみよう.

<u>Ex</u>

$$\tilde{L}_n = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{C}) \quad , \quad \omega_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$$

$f_{i,\lambda}(\zeta) = \exp(\lambda \omega_n^i \zeta^{\frac{1}{n}})$ とし. L_n を $\tilde{L}_n$ で定義された局所系.
$\mathcal{L}_n = C^{\mathbb{R}}_{T|X} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} L_n$ とおく.

局所的な切断 $u = \begin{pmatrix} f_{0,\lambda}(D) \\ f_{1,\lambda}(D) \\ \vdots \\ f_{n-1,\lambda}(D) \end{pmatrix}$ は. $\mathcal{L}_n$ の大域切断に延長されるから. それも同じ記号 u で書くとすると.

$$\mathcal{L}_{n,\lambda} := r^{-1} r_* (\mathcal{E}_X u) \qquad (r : \mathring{T}^*_Y X \to Y)$$

なる $\mathcal{E}$ moduleが定義されるが、これは holonomic $\mathcal{E}_X$ module である。実際

$$\mathcal{L}_{n,\lambda} = \frac{\mathcal{E}_X}{\mathcal{E}_X\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(\Theta + \frac{n+k}{n}\right) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^n D\right)},$$

(ここで $\Theta = zD$)

そこで、超局所版 t-equation は、

$$\mathcal{M}_n = \frac{\mathcal{E}_X}{\mathcal{E}_X\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(\Theta + \frac{n+1+k}{n+1}\right) - \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n D\right)}$$

で定義される。$\mathcal{L}_{n,\lambda}$ と $\mathcal{M}_n$ は形は似ているが、Stokes現象の意味で全く違う。$\mathcal{L}_{n,\lambda}$ は、$f_{i,\lambda}(D)$ という、指数部のみから構成された解を持つ、基準的な system である。

ここで、

$$F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}\left(\mathcal{M}_n,\ \mathcal{L}_{n,\frac{n}{n+1}}^{\mathbb{R}\text{-}f}\right)$$

$$G = R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}\left(\mathcal{M}_n,\ \mathcal{L}_{n,\frac{n}{n+1}}^{\mathbb{R}\text{-}f\text{-}0}\right)$$

とおく。もちろん、F と G は degree 0 に集中した sheaf であり、F は $\mathbb{R}$-constructible、G は $\mathbb{C}$-constructible であり

$$F \to G \to 0$$

は全射。

更に、$\mathcal{E}^\infty$での解層

$$F^\infty = R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}_n, \mathcal{O}_{n,\frac{n}{n+1}}^{\mathbb{R}})$$

は、$\mathbb{C}$-Constructibleである。

$$\begin{tikzcd} F^\infty & \\ F \arrow[u, hook] \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[ul, dashed] \arrow[l, dashed, bend right] & 0 \end{tikzcd}$$

F^∞とGはlocal systemだから、それぞれの特性多項式を計算すると、(結構これが大変だったりするのだけで、結果のみ)

F^∞は $\ell^\infty(\lambda) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{n-1} (\lambda^n - \omega_{n+1}^k)$

Gは、$\ell^{f\text{-}0}(\lambda) = (\lambda^n + (-1)^n \omega_{n+1})$

ここで、組 $F \to G \to 0$ がStokes現象を持たないとすると、GからF^∞への単射が存在する事になるが、$\ell^\infty(\lambda)$と$\ell^{f\text{-}0}(\lambda)$は共通根がないから不可能である。組 $F \to G \to 0$ は必ずStokes現象を持つ。Stokes mapは $C^{st}(\mathbb{A}_{\alpha\beta})$ のみに存在する。ちなみに、Fは

$$\mathring{\pi}(SS(F)) = \begin{cases} \mathbb{R}_S^- & (n=2) \\ \mathbb{R}_S^- \cup \mathbb{R}_S^+ & (n \geq 3) \end{cases}$$

$(\pi : T^*\mathring{T}^*_{\log}X \to \mathring{T}^*_{\log}X)$

であり、複素構造を持たない。

§4 加群自身の Stokes 現象.

§2から $L^{f-0} := RHom_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C^{\mathbb{R}.f-0}_{Y|X})$ は $\mathbb{C}$-Constructible であるので. 確定特異点型の holonomic $\mathcal{E}_X$ module $ST(\mathcal{M})$で.

$$RHom_{\mathcal{E}_X}(ST(\mathcal{M}), C^{\mathbb{R}.f}_{Y|X}) = L^{f-0}$$

を満たすものが $\dot{T}^*_YX$ の近傍で唯一存在する.

このST(m)は. K-Kの結果である

"任意の holonomic module $\mathcal{M}$に対して. R.S holonomic $\mathcal{E}_X$ module $\mathcal{M}_{reg}$ が存在し, $\mathcal{E}^{\infty}_X \underset{\mathcal{E}_X}{\otimes} \mathcal{M} \simeq \mathcal{E}^{\infty}_X \underset{\mathcal{E}_X}{\otimes} \mathcal{M}_{reg}$ を満たす"

と言う主張に現れる $\mathcal{M}_{reg}$ と一般に異なる.

(当然だが. $\mathcal{M}$自身が R.S ならすべて一致する)

つまり $ST(\mathcal{M})$ は $\mathcal{M}_{reg}$で失なわれた情報を含んでいる.

実際 §3の例で. $\mathcal{M}_{reg}$に対応する $\ell^{\infty}(\lambda)$ は $k=1$の情報を失っているが. $ST(\mathcal{M})$に対応する $\ell^{f-0}(\lambda)$は その部分の情報をまさしく持っている.

この最後の章では. $ST(\mathcal{M})$と$\mathcal{M}$の関係を調べ. そこにも Stokes現象と同様の事が発生する事を簡単に述べる.

以下. $L^f := RHom_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, C^{\mathbb{R}.f}_{Y|X})$ とする.

$Hom_{\mathbb{C}}(L^{f-0}, L^{f-0})$ は 恒等射 id を含むが. この恒等射は. $\dot{T}^*_YX$ 全体で定義された $\mathcal{E}^{\mathbb{R}.f-0}$ 射 ϕ^{f-0}

$$\phi^{f-0} : \mathcal{M}^{\mathbb{R}.f-0} \to ST(\mathcal{M})^{\mathbb{R}.f-0} \to 0 \quad (\text{全射})$$

を誘導する.

非常に粗く言うと、$\mathcal{E}^{\mathbb{R},f-0}$で考える限り、ちょうど指数部を含まない漸近展開の部分を$ST(\mathcal{M})$が記述している状況を現している。

さて$\mathcal{E}^{\mathbb{R},f-0}$射$\phi^{f-0}$を$\mathcal{E}^{\mathbb{R},f}$射で実現する事を考える。

1つのstrata Δ_αを取り、Δ_α上の組$L^f \to L^{f-0} \to 0$に対するstokes map ϕ_αを取る。このϕ_αは

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}om_{\mathbb{C}}(L^{f-0}, L^f)|_{\Delta_\alpha} &\to L^f \otimes (L^{f-0})^*|_{\Delta_\alpha} \\
&\downarrow \\
&\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}}(\mathcal{M}^{\mathbb{R},f}, C^{\mathbb{R},f}_{T|X}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{H}om^{\mathbb{R},f}_{\mathcal{E}_X}(C^{\mathbb{R},f}_{T|X}, ST(\mathcal{M})^{\mathbb{R},f})|_{\Delta_\alpha} \\
&\downarrow \\
&\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X^{\mathbb{R},f}}(\mathcal{M}^{\mathbb{R},f}, ST(\mathcal{M})^{\mathbb{R},f})|_{\Delta_\alpha}
\end{aligned}
$$

より、各角領域Δ_α上、

$$
(\#)\qquad
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M}^{\mathbb{R},f} & \xrightarrow{\phi_\alpha} & ST(\mathcal{M})^{\mathbb{R},f} & \to & 0 \\
\downarrow & \circlearrowright & \downarrow & & \\
\mathcal{M}^{\mathbb{R},f-0} & \xrightarrow{\phi^{f-0}} & ST(\mathcal{M})^{\mathbb{R},f-0} & \to & 0
\end{array}
$$

を可換とする様なϕ_αを誘導する。以下の事が証明出来る。（ϕ^{f-0}自身は$\mathring{T}^*_Y X$全体に存在する事に注意）

<u>定理</u>　ϕ^{f-0}は各角領域Δ_α上$\mathcal{E}^{\mathbb{R},f}$射$\phi_\alpha$で実現出来る。

$\mathring{T}^*_Y X$上全体で$\mathcal{E}_X$射ϕで(#)を満たすものが存在する事と、組$L^f \to L^{f-0} \to 0$がstokes現象を持たない事は同値である。 ☒

最後に、$ST(\mathcal{M})$が代数的に$\mathcal{M}$から求められると良いのであるが、まだ、十分に示せていないので今回は省略する。