数理解析研究所講究録
1015巻 1997年 1-13

An Outer Approximation Method for a Concave Minimization Problem

大阪大学大学院工学研究科　山田 修司 (Syuuji Yamada)
弘前大学理学部情報科学学科　田中 環 (Tamaki Tanaka)

Abstract

大域的最適化において、凹最小化問題に対する外部近似法の適用はこれまでにも研究されてきたが、アルゴリズムを実行する上でいくつかの問題点がある。本報告では、これらの問題点に対しアルゴリズムの改善を提案する。

Key Words. 外部近似法、凹最小化問題、緩和問題、切除平面法、支持超平面法

1 序章

外部近似法は１９５９年に E.W.Cheney and A.A.Goldstein によって、または１９６０年に J.E.Kelley によって切除平面法 (cutting plane method) として、凸計画問題に対して導かれた。しかし、この方法においては無駄な反復が多いことが知られていた。そのため、１９６７年に A.F.Veinott.Jr によって新しいアルゴリズムとして支持超平面法 (supporting hyperplane method) が考案された。これらの解法は、大域的最適化問題に用いた場合、局所的最適解に陥らず、常に大域的最適解を得ることが保証される。

本報告では、大域的最適化において幅広く研究されている『凹最小化問題』を対象とし、その解法として切除平面法と支持超平面法に基づく外部近似法を取り扱うことにする。その際に、

- そのアルゴリズムから得られる近似解が実行可能解とならない場合がある
- そのアルゴリズムから得られる近似解は対象とする問題の最適値を正しく近似しているとは言えない
- そのアルゴリズムを実行する際に繰り返される反復において、無駄な反復が行なわれる場合がある

等の問題点が考えられる。本報告では、これらの問題点に対しての改善を提案することを目的とする。

まず、第２章では、研究対象とする凹最小化問題を定義し、凹最小化問題に対する外部近似法を説明した後に、切除平面法,支持超平面法に基づく従来の外部近似法を述べる。さらに、実際に外部近似法のアルゴリズムを実行するために、従来適用されいる停止条件も説明する。第３章では、外部近似法におけるいくつかの問題点を述べ、第４章でその問題点の改善について提案する。そして、第５章において、第４章で改善した外部近似法のアルゴリズムを具体的に与える。最後に、第６章で本報告の考察を述べる。

2 凹最小化問題に対する外部近似法

2.1 凹最小化問題に対する外部近似法

本報告では、以下で与える凹最小化問題 (P) を対象とする。

$$(P)\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & x \in D \\ \quad\text{where} & f : R^n \to R \text{ is concave on } R^n \text{ and} \\ & D \subset R^n \text{ is a compact, convex set.} \end{cases} \tag{1}$$

問題 (P) に対しては、最適解が必ず存在し、その問題 (P) の制約集合 D の端点から選べることが分る。本報告では凹最小化問題 (P) の制約集合 D は微分可能な凸関数 $g_i : R^n \to R$ $(i = 1, \ldots, m)$ で定義されているものとする。すなわち、$D := \{x \in R^n : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ である。さらに、便宜上 、$\mathrm{int}D = \{x \in R^n : \max_{i=1,\ldots,m} g_i(x) < 0\} \neq \emptyset$ を仮定する。ここで、関数 $g : R^n \to R$ を $g(x) := \max_{i=1,\ldots,m} g_i(x)$ と表すと、関数 $g : R^n \to R$ は凸関数となり、$D = \{x \in R^n : g(x) \leq 0\}$ となる。

上で与えられた最適解の存在性が保証されている凹最小化問題 (P) に対する外部近似法とは、

1. 大域的最適化問題の制約集合の外部に初期点を持ち、大域的最適化問題の最適解に到達する有限点列、あるいは
2. 大域的最適化問題の制約集合の外部に含まれ任意の集積点が大域的最適化問題の最適解である無限点列

を生成することにより最適解を求める解法であり、そのアルゴリズムは以下のように表される。

[外部近似法のアルゴリズム]

step 0		Choose polytope S_1 such that $S_1 \supset D$. Set $k \leftarrow 1$.
step k	I.	Solved the relaxed problem (Q_k) obtaining a solution $v^k \in \arg\min f(S_k)$.
	II.	If $v^k \in D$, then stop: v^k solves (P).
	III.	If $v^k \notin D$, construct a constraint affine function $h_k : R^n \to R$ satisfying conditions $h_k(x) \leq 0$ $(x \in D)$, $h_k(v^k) > 0$ and set $S_{k+1} := S_k \cap \{x \in R^n : h_k(x) \leq 0\}$.
	IV.	Set $k \leftarrow k + 1$ and go to step k.

さらに、切除平面法に基づく外部近似法においてstep k の III で生成するアフィン関数 $h_k : R^n \to R$ は

$$h_k(x) := \langle \nabla g_{i_k}(v^k), x - v^k \rangle + g(v^k) \tag{2}$$

と与える。ただし、$i_k \in L(v^k) := \{i : g_i(v^k) = g(v^k),\ i = 1, 2, \ldots, m\}$ とし、$\nabla g_{i_k}(v^k)$ は関数 $g_{i_k} : R^n \to R$ の v^k における勾配ベクトルを表す。

また、支持超平面法に基づく外部近似法においては、本報告の仮定から $\hat{x} \in \mathrm{int}D$ を選べることより、

$$h_k(x) := \langle \nabla g_{i_k}(y^k), x - y^k \rangle \tag{3}$$

と与えることができる。ただし、$y^k \in \mathrm{bd}D := D\backslash\mathrm{int}D$ s.t. $y^k \in]v^k, \hat{x}[$ とする。ここで、緩和問題 (Q_1) の制約集合 S_1 がアフィン関数 $p_j(x) := \langle a^j, x - y^j \rangle$ $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ で定義されているとする。ただし、$a^j \in R^n$, $y^j \in \mathrm{bd}D$. (このように集合 S_1 を定義できることは文献 [8] に記されている。) このとき、支持超平面法においては、緩和問題 (Q_k) の制約集合 S_k を生成する制約関数を次のように整理することができる。

$$\begin{cases} p_j(x) = \langle a^j, x - y^j \rangle, & j = 1, 2, \ldots, n+1, \\ p_{n+1+j}(x) = h_j(x) = \langle \nabla g_{i_j}(y^j), x - y^j \rangle, & j = 1, 2, \ldots k-1, \end{cases} \tag{4}$$

ただし、$i_j \in \{i : g_i(y^j) = g(y^j),\ i = 1, 2, \ldots, m\}$. これより、制約関数 $p_j : R^n \to R,\ j > n+1$ に対しても以下のように表すことができる。

$$p_j(x) = \langle a^j, x - y^j \rangle. \tag{5}$$

よって、緩和問題 (Q_k) の制約集合 S_k は以下のように表すことができる。

$$S_k = \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0\ j = 1, 2, \ldots, n+k\}. \tag{6}$$

2.2 従来のアルゴリズムの停止条件

実際に外部近似法のアルゴリズムを実行する上で、2.1 節で述べたアルゴリズムの step k の II のような停止条件では、step k を有限回反復しても停止しない場合がある。そこで、問題 (P) に対して外部近似法のアルゴリズムを用いた際に生成される点列は 2.1 節の 1. あるいは2. を満足していることから、以下のような停止条件を用いることで外部近似法のアルゴリズムは必ず step k の有限回の反復で停止させることができる。

If $g(v^k) < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, then stop: v^k is an approximate solution of (P).

3 従来のアルゴリズムの問題点

凹最小化問題 (P) に対する従来の外部近似法のアルゴリズムを実行するにあたって、以下の問題点が挙げられる。

I. 従来の外部近似法で得られる近似解は、問題 (P) の制約集合 D に含まれるとは限らない。

II. 停止条件 $g(v^k) < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ を用いている従来の外部近似法のアルゴリズムにより求まる近似値は、実際の問題 (P) の最適値にどのくらい近似しているのか、評価することができない。

III. 従来の外部近似法のアルゴリズムでは、緩和問題 (Q_k) の制約集合 S_k に対して余分な制約条件を生成してしまう場合がある。

3.1 問題点 I, II

2 章 2.2 節で述べた従来の外部近似法のアルゴリズムの停止条件は以下のようなものであった。

If $g(v^k) < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), then stop: v^k is an approximate solution of (P).

このような停止条件を用いた外部近似法のアルゴリズムで得られた近似解は、凹最小化問題 (P) の制約集合 D に含まれない場合がある。さらに、このような停止条件では、図 1 のようなことが起こる。

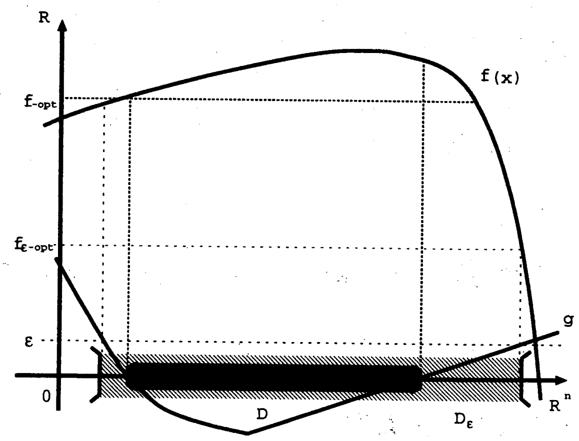

図 1: 従来の外部近似法のアルゴリズムの停止条件

すなわち、$D_\varepsilon := \{x \in R^n : g(x) < \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$) とすると、制約集合 D 上での目的関数 $f : R^n \to R$ の最適値 f_{opt} と、制約集合 D_ε 上での目的関数 $f : R^n \to R$ の最適値 $f_{\varepsilon-opt}$ との最適値の差が図 1 のように極端に大きい場合がある。つまり、2 章 2.2 節で述べた停止条件を用いた従来の外部近似法のアルゴリズムにより得られる近似値は、凹最小化問題 (P) の最適値を正しく近似しているとはいえない。

3.2 問題点 III

次のような例について考える

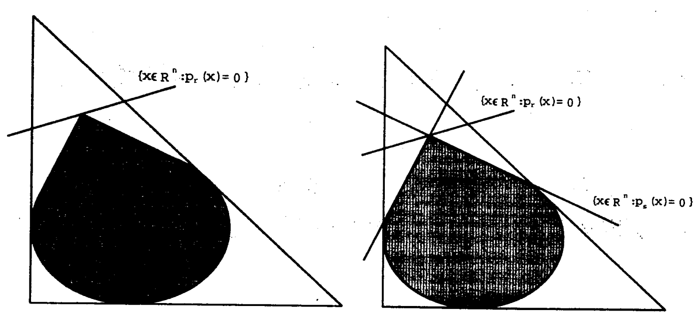

図 2: 余分な制約条件の生成する例

図 2 のようにある反復 r 回目で制約関数 $p_r : R^n \to R$ を生成した場合、その後の反復 s 回目で制約関数 $p_s : R^n \to R$ が生成されると次の反復 $s+1$ では制約集合 S_{s+1} に対して、制約関数 $p_r : R^n \to R$ はもはや必要がない。すなわち、

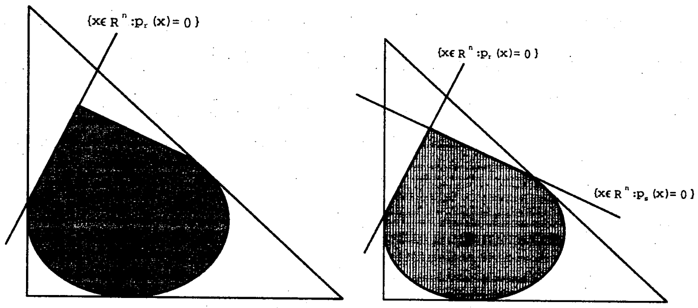

図 3: 余分な制約条件を生成しない例

$$\begin{aligned} S_s &= \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n+s\} \\ &= \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n+s \text{ and } j \neq r\} \end{aligned} \tag{7}$$

となる。しかし、図 3 のように反復 r 回目で制約関数 $p_r : R^n \to R$ を生成した場合、反復 s 回目 $(s > r)$ で生成される制約集合 S_s に対しても必要となる。すなわち、

$$\begin{aligned} S_s &= \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n+s\} \\ &\neq \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n+s \text{ and } j \neq r\} \end{aligned} \tag{8}$$

となる。このことから、図 2 のように制約関数 $p_r : R^n \to R$ を生成した場合については、step r の実行が無駄であったと考えられる。

4 従来の外部近似法のアルゴリズムの問題点の改善

本章では、切除平面法, 支持超平面法に対して、3 章の問題点 I, II の改善を行ない、さらに、支持超平面法に対しては、3 章の問題点 III の改善も行なう。

4.1 問題点 I, II の改善

本節では、切除平面法, 支持超平面法に基づく外部近似法のアルゴリズムに対して、それぞれ停止条件の改善を行なう。本節で改善する停止条件を用いることにより、切除平面法, 支持超平面法に基づく外部近似法から得られる近似値は準凹計画問題 (P) の最適値と ε 誤差 $(\varepsilon > 0)$ で求めることができる。さらにその近似解は問題 (P) の制約集合 D にも含まれる。つまり、その近似解は実行可能解であることが保証される。その改善を説明する上で、以下を満足する $\hat{x}$ が存在することが必要条件となる。

$$\hat{x} \in \mathrm{int}D \text{ and } g(\hat{x}) < 0. \tag{9}$$

本報告では凹最小化問題 (P) の制約集合 D に対して $\mathrm{int}D \neq \emptyset$ を仮定していたので、$\hat{x} \in \mathrm{int}D$ を選ぶことができる。また、$\mathrm{int}D = \{x \in R^n : g(x) < 0\}$ も仮定しているので、$g(\hat{x}) < 0$ となる。

4.1.1 切除平面法に対する改善

問題 (P) に対して切除平面法に基づく外部近似法を用いた際に生成される点列は 2.1 節で記した 1. あるいは 2. を満足している。

ここでは、まず 2. を満足するような点列が生成される場合について問題点 I, II の改善を行なう。この場合、生成される点列は無限点列 $\{v^k\}_{k=1}^{\infty}$ となり、その任意の集積点 $\bar{v}$ は問題 (P) の制約集合 D に含まれる。ここで、任意の集積点 $\bar{v} \in D$ に対して収束する部分点列を $\{v^{k_q}\}_{q=1}^{\infty} \subset \{v^k\}_{k=1}^{\infty}$ とする。このとき、点列 $\{v^k\}_{k=1}^{\infty}$ は制約集合 D の外部に含まれることから、任意の $q \in \{1, 2, \ldots\}$ に対して $v^{k_q} \notin D$ なので、$g(v^{k_q}) > 0$ となる。このことから、$\lambda_{k_q} = \frac{g(v^{k_q})}{g(v^{k_q}) - g(\hat{x})}$ とすれば、次が成立する。

$$\forall v^{k_q},\ q = 1, 2, \ldots,\ (1 - \lambda_{k_q})g(v^{k_q}) + \lambda_{k_q} g(\hat{x}) = 0. \tag{10}$$

また、明らかに$\lambda_{k_q} \in]0, 1[$ $(q = 1, 2, \ldots)$ となる。ここで、制約関数 $g : R^n \to R$ は凸関数なので、

$$g((1 - \lambda_{k_q})v^{k_q} + \lambda_{k_q}\hat{x}) \leq (1 - \lambda_{k_q})g(v^{k_q}) + \lambda_{k_q} g(\hat{x}) = 0 \tag{11}$$

を満足する。よって、$y^{k_q} := (1 - \lambda_{k_q})v^{k_q} + \lambda_{k_q}\hat{x}$ とすると、$y^{k_q} \in D$ $(q = 1, 2, \ldots)$ となる (図 4)。さらに、$v^{k_q} \to \bar{v}$ as $q \to \infty$ かつ制約関数 $g : R^n \to R$ は連続関数なので $g(v^{k_q}) \to g(\bar{v}) = 0$ as $q \to \infty$ となる。このことより、$\lambda_{k_q} \to 0$ as $q \to \infty$ となり、凹最小化問題 (P) の目的関数 $f : R^n \to R$ が連続関数であることから、次が成立する。

$$y^{k_q} \to \bar{v} \text{ and } f(y^{k_q}) \to f(\bar{v}) \text{ as } q \to \infty,\ f(y^{k_q}) \geq f(\bar{v})\ q \in \{1, 2, \ldots\}. \tag{12}$$

ここで、

$$M_{k_q} := \min\{f(y^{k_i}) : i = 1, 2, \ldots, q\}, \tag{13}$$

とすると、

$$M_{k_1} \geq M_{k_2} \geq \cdots \geq M_{k_q} \geq \cdots \geq f(\bar{v}) \text{ and } M_{k_q} \to f(\bar{v}) \text{ as } q \to \infty. \tag{14}$$

また、明らかに

$$f(v^{k_1}) \leq f(v^{k_2}) \leq \cdots \leq f(v^{k_q}) \leq \cdots \leq f(\bar{v}) \text{ and } f(v^{k_q}) \to f(\bar{v}) \text{ as } q \to \infty. \tag{15}$$

従って、(14), (15) より切除平面法に基づく外部近似法のアルゴリズムの停止条件を以下のように改善することができる。

If $M_k - f(v^k) < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, then stop.

次に 2.1 節の 1. を満足する点列が生成される場合について考える。この場合、ある t 回目の反復で v^t は問題 (P) の最適解となり、制約集合 D に含まれる。さらに、v^t は凸多面体 S_t の頂点でもあることから、$v^t \in \mathrm{bd}D$ となる。このことから $v^t = y^t$ となり、

$$f(v^1) \leq f(v^2) \leq \cdots f(v^t) = \min f(D) = M_t \leq \cdots \leq M_2 \leq M_1 \tag{16}$$

となる。よって、2.1 節の 1. を満足する有限点列が生成される場合においても上で記したような停止条件を用いることができる。

このような停止条件で得られた近似値 $f(v^k)$, M_k に対して、

$$\begin{aligned} &f(v^k) \leq f(\bar{v}) \leq M_k < f(v^k) + \varepsilon\ (\varepsilon > 0), \\ &M_k - \varepsilon < f(v^k) \leq f(\bar{v}) \leq M_k\ (\varepsilon > 0). \end{aligned} \tag{17}$$

となることが分る。ここで、$\hat{y} \in \arg\min\{f(y^i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$ であるような $\hat{y} \in D$ に対して $f(\hat{y}) = M_k$ が成立するので、このような $\hat{y} \in D$ を切除平面法に基づく外部近似法の近似解とすることにより問題点 I, II を改善することができる。

If $M_k - f(v^k) < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, then stop: $\hat{y} \in \arg\min\{f(y^i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$ is an approximate solution of (P).

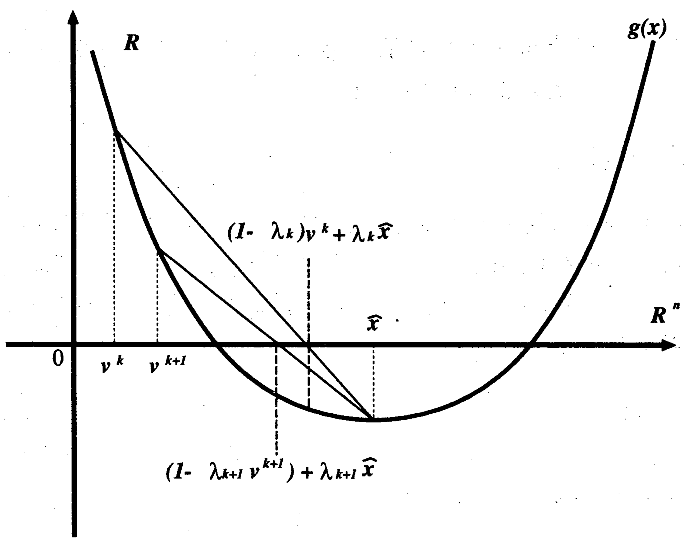

図 4: 切除平面法に対する問題点I, II の改善

4.1.2 支持超平面法に対する改善

4.1.1 節と同様に、問題 (P) に対して支持超平面法に基づく外部近似法を用いた際に生成される点列は 2.1 節で記した 1. あるいは 2. を満足している。

まず 2. を満足するような点列が生成される場合について問題点 I, II の改善を行なう。この場合、生成される点列は無限点列 $\{v^k\}_{k=1}^{\infty}$ となり、その任意の集積点 $\bar{v}$ は問題 (P) の制約集合 D に含まれる。ここで、任意の集積点 $\bar{v} \in D$ に対して収束する部分点列を $\{v^{k_q}\}_{q=1}^{\infty} \subset \{v^k\}_{k=1}^{\infty}$ とする。支持超平面法に基づく外部近似法では、各 step k において $y^k \in]v^k, \hat{x}[$ を満足する $y^k \in \mathrm{bd}D$ を選んでいる。ここで、点列 $\{v^{k_q}\}_{q=1}^{\infty}$ に対する点列 $\{y^{k_q}\}_{q=1}^{\infty}$ に対して次の定理が成立する。

定理 4.1 $v^{k_q} \to \bar{v}$ as $q \to \infty$ ならば、$y^{k_q} \to \bar{v}$ as $q \to \infty$

ここで、定理 4.1 より 4.1.1 節と同様に

$$M_{k_q} := \min\{f(y^{k_i}) : i = 1, 2, \ldots, q\} \tag{18}$$

とすることにより、支持超平面法に基づく外部近似法のアルゴリズムの停止条件を以下のように改善することができる。

If $M_k - f(v^k) < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, then stop: $\hat{y} \in \arg\min\{f(y^i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$ is an approximate solution of (P).

支持超平面法に基づく外部近似法のアルゴリズムより、2.1 節の 1. を満足する有限点列が生成される場合においても、4.1.1 節と同様に上で記された停止条件を用いることができる。

4.2 問題点 III の改善

本節では、支持超平面法において、3 章の問題点 III に対する改善を行なう。そこで、まず問題点 III を改善する十分条件を与え、次に問題点 III を改善するアルゴリズムを説明する。

4.2.1 問題点 III を改善する十分条件

2.1 節の (6) より、緩和問題 (Q_k) の制約集合 S_k はアフィン関数 $p_j : R^n \to R$ $(j = 1, 2, \ldots, n+k)$ を用いて、次のように表されていた。

$$S_k = \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n+k\}. \tag{19}$$

ここでは、最初にいくつかの定義を与え、次に任意の $v \in R^n \backslash D$ に対してある凸多面体を与える。そして、最後に緩和問題 (Q_{k+1}) の制約集合 S_{k+1} に対して制約条件 $p_{j_0} \leq 0$ (ただし、$j_0 \in \{1, 2, \ldots, n+k\}$) が本質的制約 (essential) であるための十分条件を説明する。

最初に以下の定義を与える。

定義 4.1 [**redundant**]

A constraint $p_{j_0} \leq 0$ *(* $j_0 \in \{1, 2, \ldots, n+k\}$ *) is said to be redundant for* S_k *if the removal of it does not change set* S_k*, i.e.,*

$$\begin{aligned} S_k &= \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n+k\} \\ &= \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n+k \text{ and } j \neq j_0\} \end{aligned} \tag{20}$$

さらに、緩和問題 (Q_k) の制約集合 S_k を生成するのに必要な制約条件 $p_j(x) \leq 0$ の定義を与える。

定義 4.2 [**essentiality**]

A constraint $p_{j_0} \leq 0$ *(* $j_0 \in \{1, 2, \ldots, n+k\}$ *) is said to be an essential constraint for* S_k *if the removal of it change set* S_k*, i.e.,*

$$\begin{aligned} S_k &= \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n+k\} \\ &\neq \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n+k \text{ and } j \neq j_0\} \end{aligned} \tag{21}$$

制約集合 S_k に対して本質的制約条件の添字集合を J_k と表す。すなわち、

$$\forall j_0 \in J_k,\ S_k \neq \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n+k \text{ and } j \neq j_0\} \tag{22}$$

さらに、direction, extreme direction について定義を与える。

定義 4.3 [**direction, distinct, extreme direction**]

Let X *be a nonempty, closed convex set in* R^n*. A nonzero vector* d *in* R^n *is called a direction of* X *if for each* $x \in X$*,* $x + \lambda d \in X$ *for all* $\lambda \geq 0$*. Two directions* d_1 *and* d_2 *of* X *are called distinct if* $d_1 \neq \alpha d_2$ *for any* $\alpha > 0$*. A direction* d *of* X *is called an extreme direction if it cannot be written as a positive linear combination of two distinct directions, that is, if* $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ *for* $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$*, then* $d_1 = \alpha d_2$ *for some* $\alpha > 0$*.*

extreme direction については、次のことに注意する。

注意 4.1 *Let X be a nonempty, closed convex set in R^n. If a nonzero vector d in R^n is an extreme direction of X, then, for all $\lambda > 0$, λd is an extreme direction of X.*

次に、任意の $v \in R^n \backslash D$ に対して、以下の命題の結果からある凸多面体 $T(v, \alpha)$ $(\alpha > 0)$ を考えることにする。ここで、本報告の仮定から $\hat{x} \in \mathrm{int} D$ を選べることより、任意の $v \in R^n \backslash D$ に対して $\exists y^v \in \mathrm{bd} D$ s.t. $y^v \in]v, \hat{x}[$ となる。

命題 4.1 $\forall z \in \partial g(y^v),\ \langle v - y^v, z \rangle > 0.$

命題 4.1 より定数 $\alpha > 0$ に対して、

$$H(v, \alpha) := \{x \in R^n : \langle v - y^v, x \rangle = \alpha\} \tag{23}$$

とすると、

$$\forall v \in R^n \backslash D,\ z \in \partial g(y^v),\ \exists \mu_z > 0 \text{ s.t. } \mu_z z \in H(v, \alpha). \tag{24}$$

明らかに、任意の $z \in \partial g(y^v)$ に対して $\mu_z > 0$ は一意である。ここで、任意の $v \in R^n \backslash D$ に対して次の集合を定義する。

$$U(v) := \{x \in R^n : x = \sum_{i \in L(y^v)} \lambda_i \nabla g_i(y^v), \lambda_i \geq 0,\ i \in L(y^v)\}, \tag{25}$$

where $y^v \in \mathrm{bd} D \cap]v, \hat{x}[$ and $L(y^k) := \{i : g_i(y^k) = g(y^k),\ i = 1, \ldots, m\}$. さらに、

$$T(v, \alpha) := H(v, \alpha) \cap U(v) \tag{26}$$

とすると、以下の命題より $T(v, \alpha)$ が凸多面体であることが分る (図 5)。

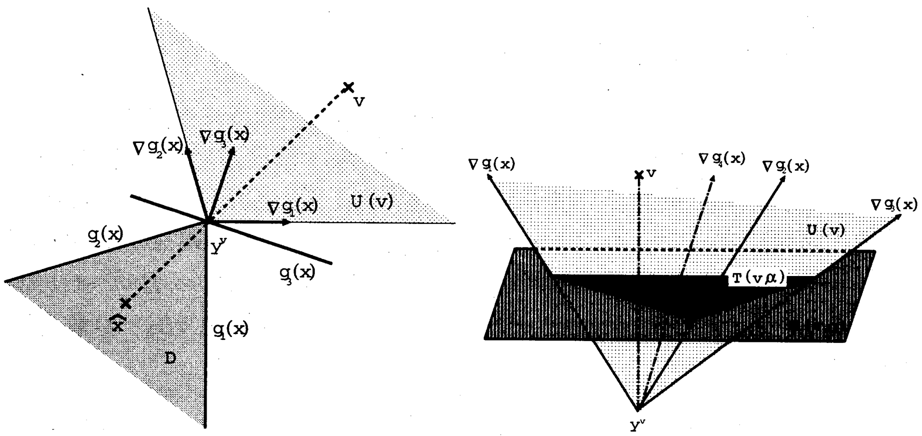

図 5: $U(v)$ と $T(v, \alpha)$

命題 4.2 任意の $v \in R^n \backslash D$ に対して、

$$T(v, \alpha) = \{z \in R^n : z = \textstyle\sum_{i \in L(y^v)} \zeta_i \mu_{\nabla g_i(y^v)} \nabla g_i(y^v),\ \sum_{i \in L(y^v)} \zeta_i = 1,\ \zeta_i \geq 0,\ i \in L(y^v)\}. \tag{27}$$

ただし、$\mu_{\nabla g_i(y^v)} > 0$ は (24) より定まる。

以上のことより、step k において集合 S_k に対して本質的制約条件 $p_{j_0} \leq 0$ (すなわち、$j_0 \in J_k$) が新しく生成される集合 S_{k+1} に対しても本質的制約条件であるための十分条件を次の定理で示す。

定理 4.2 問題 (P) の制約集合 D に対して $\mathrm{int}D = \{x \in R^n : g(x) < 0\} \neq \emptyset$ を仮定し、さらに以下の条件 **(a), (b)** が満たされているとする。

(a) $j_0 \in J_k$.

(b) $\mu_{a^{j_0}} a^{j_0}$ は $T(v^{j_0}, \alpha)$ $(\alpha > 0)$ の端点。ただし、(5) より $p_{j_0}(x) = \langle a^{j_0}, x - y^{j_0} \rangle$ かつ $a^{j_0} \in \partial g(y^{j_0})$ となる。さらに、$\mu_{a^{j_0}} > 0$ は (24) より定まる。

このとき、制約条件 $p_{j_0}(x) \leq 0$ は S_{k+1} に対して *essential* となる。

4.2.2 問題点 III を改善するアルゴリズム

ここでは、各ステップ k において $\mu_{\nabla g_i(y^k)} \nabla g_i(y^k)$ が凸多面体 $T(v^k, \alpha)$ の端点となる $\nabla g_i(y^k)$ $(i \in L(y^k))$ を求めるアルゴリズムを説明する。ただし、$\mu_{\nabla g_i(y^k)} > 0$ は (24) より定まる。このとき、緩和問題 (Q_k) の最適解 v^k と問題 (P) を分離する関数 $h_k : R^n \to R$ $(p_{n+k+1} : R^n \to R)$ を以下のように与える。

$$h_k(x) = \langle \nabla g_i(y^k), x - y^k \rangle. \tag{28}$$

各ステップ k において上のように関数 $h_k : R^n \to R$ を与えることにより、 定理 4.2 から問題点 III を改善できることが分る。

まず、凸多面体 $T(v^k, \alpha)$ $(\alpha > 0)$ の端点を得るために、次の問題 (E_k) を考える。

$$(E_k) \begin{cases} \text{minimize} & f(x), \\ \text{subject to} & x \in T(v^k, \alpha), \end{cases} \tag{29}$$

ただし、$f : R^n \to R$ is a strictly concave function. 問題 (E_k) の制約集合 $T(v^k, \alpha)$ は凸多面体なので、コンパクト集合となる。また、問題 (E_k) の目的関数は連続関数なので,問題 (E_k) の最適解は必ず存在する。さらに、問題 (E_k) の目的関数は凹関数なので、問題 (E_k) は凹最小化問題になっている。よって、制約集合 $T(v^k, \alpha)$ の端点かつ 問題 (E_k) の最適解であるものが必ず存在する。次の定理では、目的関数 $f : R^n \to R$ が strictly concave function であることより、制約集合 $T(v^k, \alpha)$ の端点以外では問題 (E_k) の最適解が存在しないことを示す。

定理 4.3 $e \in T(v^k, \alpha)$ を問題 (E_k) の最適解とする。このとき、$e \in T(v^k, \alpha)$ は制約集合 $T(v^k, \alpha)$ の *extreme point.*

さらに、問題 (E_k) の制約集合 $T(v^k, \alpha)$ の任意の extreme point $e \in T(v^k, \alpha)$ に対して、定理 4.2 より $e \in \{\mu_{\nabla g_i(y^k)} \nabla g_i(y^k) : i \in L(y^k)\}$ が成立する。よって、定理 4.3 より、以下の問題 $(\bar{E}_k)$ は問題 (E_k) と等価である。

$$(\bar{E}_k) \begin{cases} \text{minimize} & f(x), \\ \text{subject to} & x \in \{\mu_{\nabla g_i(y^k)} \nabla g_i(y^k) : i \in L(y^k)\}, \end{cases} \tag{30}$$

ただし、 $f : R^n \to R$ is a strictly concave function and $\mu_{\nabla g_i(y^k)} = \frac{\alpha}{\langle v^k - y^k, \nabla g_i(y^k)\rangle}$, $i \in L(y^k)$. 問題 $(\bar{E}_k)$ の最適解を$\mu_{\nabla g_{i_k}(y^k)} \nabla g_{i_k}(y^k)$ とする。このとき、 緩和問題 (Q_k) の制約集合 S_k より緩和問題 (Q_{k+1}) の制約集合 S_{k+1} を生成する制約関数$h_k : R^n \to R$ を次のように生成する。

$$h_k(x) = \langle \nabla g_{i_k}(y^k), x - y^k \rangle. \tag{31}$$

このとき、制約条件 $h_k(x) \leq 0$ は任意の制約集合 $S_{k'}$ $(k' > k)$ に対して本質的制約条件となる。

最後に、以下の命題において、具体的な strictly concave function を与え, 問題点 III を改善するアルゴリズムを述べる。

命題 4.3 次の関数 $f : R^n \to R$ は R^n 上で *strictly concave function* となる。

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2. \tag{32}$$

[アルゴリズム E (問題点 III を改善するアルゴリズム)]

I. $|L(y^k)| \leq 2$ のとき、任意に選ぶ。

II. $|L(y^k)| > 2$ のとき、

i. 任意の $i \in L(y^k)$ に対して、以下のような$\mu_{\nabla g_i(y^k)}$ を計算する。

$$\mu_{\nabla g_i(y^k)} := \frac{\alpha}{\langle v^k - y^k, \nabla g_i(y^k)\rangle}. \tag{33}$$

ii. 以下の問題 $(\hat{E}_k)$ の最適解$\mu_{\nabla g_{i_k}(y^k)} \nabla g_{i_k}(y^k)$ を求め、$\nabla g_{i_k}(y^k)$ より制約関数 $h_k : R^n \to R$ を生成する。

$$(\hat{E}_k) \begin{cases} \text{minimize} & f(x) = -\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2, \\ \text{subject to} & x \in \{\mu_{\nabla g_i(y^k)} \nabla g_i(y^k) : i \in L(y^k)\}. \end{cases} \tag{34}$$

5 改善されたアルゴリズム

5.1 問題点 I, II を改善した切除平面法

本報告では 切除平面法に対しては問題点 I, II を改善し、アルゴリズムは以下のようになる。

[改善された切除平面法のアルゴリズム :]

step 0 問題 (P) の制約集合 D を含むような凸多面体 S_1 を生成する。さらに、$\hat{x} \in \mathrm{int}D$ を決定する。$k \leftarrow 1$ and go to step k.

step k $v^k \in \arg\min\{f(v) : v \in V(S_k)\}$ を選ぶ。

I. 以下のようにして制約集合 D の内点 y^k を生成する。

$$y^k := (1 - \lambda_k) v^k + \lambda_k \hat{x},$$

where $\lambda_k := \frac{g(v^k)}{g(v^k)-g(\hat{x})}$.

II. a) If $M_k - f(v^k) < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, then stop: $\hat{y} \in \arg\min\{f(y^i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$ is an approximate solution of (P).
ただし、$M_k := \min\{f(y^i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$.

b) $|M_k - f(v^k)| \geq \varepsilon$ ならば、

i. アフィン関数 $h_k : R^n \to R$ を次のように生成する。

$$h_k(x) := \langle p^k, x - v^k \rangle + g(v^k)$$

where $p^k = \nabla g_{i_k}(v^k)$ and $i_k \in \{i : g_i(v^k) = g(v^k),\ i = 1, 2, \ldots, m\}$.

ii. 緩和問題 (Q_{k+1}) の制約集合 S_{k+1} を以下のように生成する。

$$S_{k+1} := S_k \cap \{x \in R^n : \ h_k(x) \leq 0\}.$$

$k \leftarrow k+1$ and go to step k.

5.2 問題点 I, II, III を改善した支持超平面法

本報告では に支持超平面法対しては問題点 I, II を改善し、さらに問題点 III も改善することができた。

[改善された支持超平面法のアルゴリズム:]

step 0 問題 (P) の制約集合 D を含むような凸多面体 S_1 を生成する。さらに、$\hat{x} \in \mathrm{int}D$ を決定する。$k \leftarrow 1$ and go to step k.

step k $v^k \in \arg\min\{f(v) : \ v \in V(S_k)\}$ を選ぶ。

I. $y^k \in \mathrm{bd}D$ s.t.$y^k \in]v^k, \hat{x}[$ を求める。

II. a) If $M_k - f(v^k) < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, then stop: $\hat{y} \in \arg\min\{f(y^i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$ is an approximate solution of (P).
ただし、$M_k := \min\{f(y^i) : i = 1, 2, \ldots, k\}$.

b) $|M_k - f(v^k)| \geq \varepsilon$ ならば、

i. アルゴリズム $\hat{E}_k$ より $\nabla g_{i_k}(y^k)$ を求め、アフィン関数 $h_k : R^n \to R$ を次のように生成する。

$$h_k(x) := \langle \nabla g_{i_k}(y^k), x - y^k \rangle.$$

ii. 緩和問題 (Q_{k+1}) の制約集合 S_{k+1} を以下のように生成する。

$$S_{k+1} := S_k \cap \{x \in R^n : \ h_k(x) \leq 0\}.$$

$k \leftarrow k+1$ and go to step k.

6 考察

本報告より、次の二つの結果が導かれた。

1. 従来の外部近似法では、制約集合の外部においてのみ、最適解に収束する点列を生成していたのに対し、本報告では制約集合上においても最適解に収束する点列を生成する方法を導くことができた。この結果、3 章の問題点 I, II を改善することができた。

2. 切除平面法より余分な制約条件を生成することの少ない支持超平面法に対して、3 章の問題点 III を改善することができた。この結果、余分な制約条件を生成することのないアルゴリズムを導くことができた。

参考文献

[1] M.S.Bazaraa, H.D.Sherali and C.M.Shetty, *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms, 2nd ed., John Wiley, New York, 1993.*

[2] E.W.Cheney and A.A.Goldstein, *Newton's Method of Convex Programming and Tchebycheff Approximation, Numer. Math., 1, pp.253–268, 1959.*

[3] R.Horst and H.Tuy, *Global Optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1990.*

[4] R.Horst and P.M.Pardalos, *Handbook of Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.*

[5] J.E.Kelley Jr, *The Cutting-Plane Method for Solving Convex Programs, J.SIAM. 8, pp.703–712, 1960.*

[6] T.Kuno, Y.Yajima and H.Konno, *An Outer Approximation Method for Minimizing the Product of Several Convex Functions on a Convex Set, Journal of Global Optimization 3, pp.325–335, 1993.*

[7] G.L.Nemhauser, A.H.G.R.Kan and M.J.Todd, *Optimization ; Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol.1, Elsevier Science Publishers, B.V, 1989.*

[8] T.V.Thieu, B.T.Tam and V.T.Ban, *An Outer Approximation Method for Globally Minimizing a Concave Function over a Compact Convex Set, Acta Mathematica Vietnamica 8, pp.21–40, 1983.*

[9] A.F.Veinott Jr, *The Supporting Hyperplane Method for Unimodal Programming, Operations Research, 15, pp.147–152, 1967.*