数理解析研究所講究録
1015巻 1997年 194-199

複数の端末を持つサーバーの最適保全政策

鳥取大学工学部 *小柳 淳二 (KOYANAGI Junji)
鳥取大学工学部 河合 一 (KAWAI Hajime)

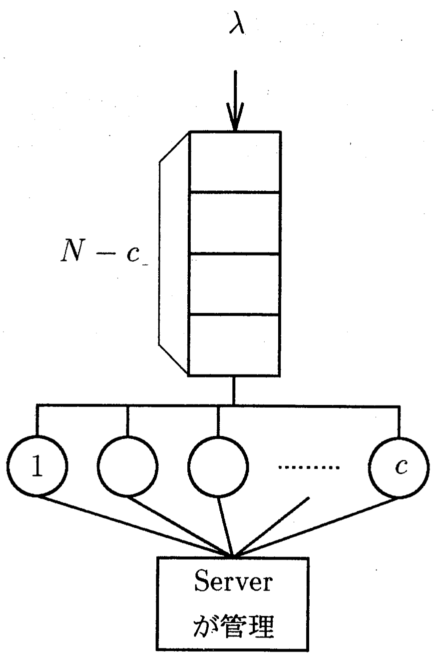
1 はじめに

ワークステーションなどは複数の端末からアクセスされ，1つのワークステーションのダウンが複数の端末の使用不可を意味することもある．本研究ではこのようなシステムに対し，保全や故障によって生じる利用者の損失を最小にするような保全政策について考察する．

2 モデル

一つのサーバーが c 個の端末によって利用されシステム全体の容量が $N(\geq c)$ のシステムを考える．サーバーは $s+2$ 個の状態 $0,\ldots,s+1$ を持ち，状態0は新品同様の状態を表し，$1,\ldots,s$ は劣化状態，$s+1$ は故障状態（c 個の端末全てが使用不能）を示すものとする．サーバーの状態が k で，系内人数が i 人の時，客が一人減る推移率は $\mu(i,k)$ とする．客の到着は到着率 λ のポアソン過程とし，サーバーの状態 k から l への状態推移は推移率 β_{kl} のマルコフ過程に従うとする．

本研究で扱うシステム



サーバーが $s+1$ に推移した時には，システムが故障し，システム内の客全てが失われ，ただちに事後保全を始める．システムの事後保全には分布関数 $H_2(x)$ に従う時間を要し，その間に到着する客も失われる．故障状態に推移する前に，予防保全を行うことができ，その場合，予防保全開始時にシステム内にいる客は失われ，システムの予防保全に分布関数 $H_1(x)$ に従う時間がか

かり，その間に到着する客も失われる．いずれの場合にもシステムは新品状態（状態 0）に戻り，システム内客数 0 の状態から再稼動する．これら以外にも，系内人数が N （満員）の時に到着した客も失われるものとする．

システムの保全により失われる客の総期待割引人数（割引因子 α）を最小化するように各時点で予防保全を行うかどうかを考える．

条件として以下の 3 つを考える．

条件 1 任意の j に対し $\sum_{l=j}^{s+1} \beta_{kl}$ は k に関して増加．

条件 2 すべての x に対し $\overline{H}_2(x) \geq \overline{H}_1(x)$ $(\overline{F}(x) \equiv 1 - F(x))$.

条件 3 $\mu(i,k)$ は k に関して減少し，i に関して増加する．

条件 1 は劣化の進行に伴い劣化の速度が上がることを示す．条件 2 は事後保全にかかる時間は予防保全に要する時間より確率的に大きいことを表す．条件 3 は劣化の程度が大きいほどサービス率が低下し，利用されている端末が多いほど処理の効率が上がることを示す．一様化および定式化に用いられる以下の記号を定義する．(Serfozo[3])

$$h_i = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \overline{H}_i(x) dx \quad (i = 1, 2), \quad \Gamma = \sum_{k=0}^{s+1} \sum_{l=0}^{s+1} \beta_{kl}, \quad \gamma_{kl} = \begin{cases} \Gamma - \sum_{m=0}^{s+1} \beta_{km} & (k = l) \\ \beta_{kl} & (k \neq l) \end{cases},$$

$$\mu = \max_{i,k} \ \mu(i,k) = \mu(c,0), \quad \Lambda = \lambda + \mu + \Gamma + \alpha.$$

条件 1 より以下の補題が成立する．(Stoyan [1])

補題 1

増加列 a_l に対し，$\sum_{l=0}^{s+1} \gamma_{kl} a_l$ は k に関して増加．□

また条件 2 より $h_2 \geq h_1$ である．

3 マルコフ決定過程による定式化

状態 (i,k) に対し

$V(i,k)$ ：状態 (i,k) に推移したときからの最適コスト，

$W(i,k)$ ：状態 (i,k) に推移したとき，稼働を続けることを選択した場合の最適コスト，

$A(i)$ ：状態 (i,k) に推移したとき，予防保全を選択した時点からの最適コスト

を定義する．

これらを用いて次の最適性方程式を得る. (Walrand[2], Ross[4])

$$W(i,k)=\frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{l=k}^{s+1}\gamma_{kl}V(i,l)+\lambda V(i+1,k)+\mu(i,k)V(i-1,k)+(\mu-\mu(i,k))V(i,k)\Big]$$

$(0\le k\le N)$, (ただし $V(-1,k)\equiv V(0,k)$, $V(N+1,k)\equiv V(N,k)+1$ とする.)

$$A(i)=i+\lambda h_1+(1-\alpha h_1)V(0,0),$$

$$V(i,k)=\min[A(i),\ W(i,k)]\ \ (0\le k\le s),\quad V(i,s+1)=i+\lambda h_2+(1-\alpha h_2)V(0,0).$$

逐次近似法

$V^0(i,k)=0$ として以下の繰り返し計算の極限として $V(i,k)$ と $W(i,k)$ の値が求められる.

$$W^{n+1}(i,k)=\frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{l=0}^{s+1}\gamma_{kl}V^n(i,l)+\lambda V^n(i+1,k)+\mu(i,k)V^n(i-1,k)+(\mu-\mu(i,k))V^n(i,k)\Big]$$

$$A^{n+1}(i)=i+\lambda h_1+(1-\alpha h_1)V^n(0,0),$$

$$V^{n+1}(i,k)=\min[A^n(i),\ W^n(i,k)]\ \ (0\le k\le s),\quad V^{n+1}(i,s+1)=i+\lambda h_2+(1-\alpha h_2)V^n(0,0).$$

帰納法により $V(i,k)$ と $W(i,k)$ について以下の性質を証明することができる.

補題 2

1. $V(i,k)$ と $W(i,k)$ は i,k について単調増加,
2. $W(i+1,k)-W(i,k)\le 1-\alpha/\Lambda$,
3. $V(i+1,k)-V(i,k)\le 1$. □

$W(i,k)$ と $V(i,k)$ の i に関する増大性の証明

$$W^{n+1}(i,k)=\frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{l=0}^{s+1}\gamma_{kl}V^n(i,l)+\lambda V^n(i+1,k)+\mu(i,k)V^n(i-1,k)+(\mu-\mu(i,k))V^n(i,k)\Big]$$

第 1 項, 第 2 項は帰納法の仮定より i に関して増大. 第 3 項, 第 4 項を合わせて以下の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}&\mu(i+1,k)V^n(i,k)+(\mu-\mu(i+1,k))V^n(i+1,k)-\mu(i,k)V^n(i-1,k)-(\mu-\mu(i,k))V^n(i,k)\\&\ge\mu(i+1,k)V^n(i,k)+(\mu-\mu(i+1,k))V^n(i,k)-\mu(i,k)V^n(i,k)-(\mu-\mu(i,k))V^n(i,k)\\&=0\end{aligned}$$

$W^{n+1}(i,k)$ と $A^{n+1}(i)$ が i について増大であるから, $V^{n+1}(i,k)$ も i について増大となる.

$W(i,k)$ と $V(i,k)$ の k に関する増大性の証明

$$W^{n+1}(i,k)=\frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{l=0}^{s+1}\gamma_{kl}V^n(i,l)+\lambda V^n(i+1,k)+\mu(i,k)V^n(i-1,k)+(\mu-\mu(i,k))V^n(i,k)\Big]$$

第 1 項の k に関する増大性は補題 1 から得られる．第 2 項は帰納法の仮定より k に関して増大．第 3 項，第 4 項を合わせて以下の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\mu(i,k+1)V^n(i-1,k+1)+(\mu-\mu(i,k+1))V^n(i,k+1)\\
&\quad-\mu(i,k)V^n(i-1,k)-(\mu-\mu(i,k))V^n(i,k)\\
&\geq \mu(i,k+1)V^n(i-1,k+1)+(\mu-\mu(i,k+1))V^n(i,k+1)\\
&\quad-\mu(i,k)V^n(i-1,k+1)-(\mu-\mu(i,k))V^n(i,k+1)\\
&=(\mu(i,k+1)-\mu(i,k))(V^n(i-1,k+1)-V^n(i,k+1))\\
&\geq 0 \ (\text{条件 3 より } \mu(i,k) \text{ は } k \text{ に関して減少})
\end{aligned}$$

$A^{n+1}(i)$ は k に関して定数であり，$W^{n+1}(i,k)$ が k について増大であるから，$V^{n+1}(i,k)$ は k について増大．

$W(i+1,k)-W(i,k)\leq 1-\alpha/\Lambda$ と $V(i+1,k)-V(i,k)\leq 1$ の証明

$$\begin{aligned}
&W^{n+1}(i+1,k)-W^{n+1}(i,k)\\
&\leq \frac{1}{\Lambda}\Big[\Gamma+\lambda+\mu(i+1,k)V^n(i,k)-\mu(i,k)V^n(i-1,k)\\
&\quad+(\mu-\mu(i+1,k))V^n(i+1,k)-(\mu-\mu(i,k))V^n(i,k)\Big]\\
&\leq \frac{1}{\Lambda}\Big[\Gamma+\lambda+\mu+\mu(i,k)-\mu(i+1,k)\Big]\leq 1-\alpha/\Lambda,
\end{aligned}$$

$V^{n+1}(i+1,k)-V^n(i,k)\leq 1$ は

$$\min\{x,y\}-\min\{a,b\}\leq \max\{x-a,y-b\}$$

より導出される．

これらの補題から次の最適政策の構造が得られる．

最適政策の構造

定理 1

状態 (j,k) で予防保全が最適ならば 状態 (i,l) $(i\leq j,\ l\geq k)$ においても予防保全が最適である．
□

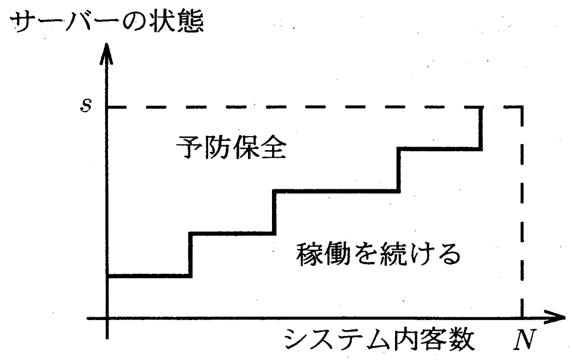
証明

状態 (j,k) で予防保全が最適であるから，$W(j,k)\geq A(j)$ が成立．ここで，

$$W(i,l)\geq i-j+W(j,l)\geq i-j+W(j,k)\geq i-j+A(j)=A(i)$$

である．(最初の不等号は補題 2.2 から，2 番目の不等号は 補題 2.1 から成り立つ) よって $(i\leq j,\ l\geq k)$ においては予防保全が最適である． □

定理 1により最適政策は，次図に示されるような構造をしていることがわかる．



また次の定理が成り立つ.

定理 2 (i,k) $(i \geq 1)$ に対し

$$\gamma_{k\,s+1}\lambda(h_2 - h_1) + \lambda - \alpha h_1 \lambda \leq \alpha i + \mu(i,k)$$

が成立すれば稼動を続けるのが最適である.

証明

$i \geq 1$ に対して

$$W(i,k) = \frac{1}{\Lambda}\Big[\sum_{l=0}^{s+1} \gamma_{kl} V(i,l) + \lambda V(i+1,k) + \mu(i,k)V(i-1,k) + (\mu - \mu(i,k))V(i,k)\Big]$$

$$\leq \frac{1}{\Lambda}\Big[(\Gamma - \gamma_{k\,s+1})A(i) + \gamma_{k\,s+1}V(i,s+1) + \lambda + \lambda A(i) - \mu(i,k) + \mu A(i)\Big]$$

$$\leq A(i) + \frac{1}{\Lambda}\Big[\gamma_{k\,s+1}\lambda(h_2 - h_1) + \lambda - \alpha h_1 \lambda - (\alpha i + \mu(i,k))\Big]$$

となることから, k に対し

$$\gamma_{k\,s+1}\lambda(h_2 - h_1) + \lambda - \alpha h_1 \lambda \leq \alpha i + \mu(i,k)$$

が成立する i においては $W(i,k) \leq A(i)$ すなわち, 稼動を続けるのが最適決定であることがわかる. □

数値例

$\lambda = 7.0, \alpha = 1.0, N = c = 6$ の場合で, $H_1(x)$, $H_2(x)$ には一定分布（3 時間後, 5 時間後に保全完了）を仮定し, 数値計算を行った.

$\mu(i,k)$							
	$k=0$	1	2	3	4	5	6
$i=1$	11.0	10.5	10.0	9.0	8.0	5.5	5.0
2	12.0	11.5	11.0	10.0	8.0	5.5	5.0
3	13.0	12.5	12.0	10.0	9.0	5.5	5.0
4	14.0	12.5	12.0	11.0	9.0	5.5	5.0
5	16.0	13.5	13.0	11.0	10.0	5.5	5.0
6	18.0	14.5	14.0	11.5	11.0	5.5	5.0

サーバーの状態推移は k から $k+1$ か $s+1$ にのみ推移する場合を考える.

	$\beta_{k\,k+1}$	$\beta_{k\,s+1}$
$k=0$	0.1	0.4
1	0.1	0.5
2	0.1	1.2
3	0.2	1.2
4	0.3	1.3
5	0.4	1.3
6		1.8

最適政策 (1 が保全, 2 が稼動)							
6	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	2
4	1	1	2	2	2	2	2
3	1	2	2	2	2	2	2
2	1	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2	2
$k=0$	2	2	2	2	2	2	2
	$i=0$	1	2	3	4	5	6

定理 2 より $k=1$ のとき $i \geq 3$ に対しては最適決定は稼動を続けるになる.

参考文献

[1] D. Stoyan, *Comparison methods for queues and other stochastic models*, John Wiley & Sons, 1983.

[2] J. Walrand, *An Introduction to Queueing Networks*, Prentice–Hall, 1988.

[3] R. F. Serfozo, " An Equivalence Between Continuous and Discrete Time Markov Decision Process", *Operations Research*, Vol. 27, No. 3, pp. 616–620, 1979.

[4] S. M. Ross, *Applied Probability Models with Optimization and Its applications*, Academic Press, 1979.

[5] 小柳淳二, 河合 一, サービス率が減少する待ち行列システムの最適保全政策, 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会アブストラクト集, 1994.