数理解析研究所講究録
1015 巻 1997 年 50-61

A duality theorem in parametric associative shortest path problems

長崎大教養　丸山幸宏 (Yukihiro Maruyama)

1 序

最近 Maruyama は、道の長さ（評価）が各枝の長さの和に限らず結合法則を満たす様々な 2 項演算で定義された最短経路問題（associative shortest path problem）**(ASP)**：

$$\min_{p}[t_{1j}\circ t_{jk}\circ\cdots\circ t_{mN}]$$

の解法を与えた ([1], [2], [3])。ただし、$\{t_{ij}\}$ は各枝 (i,j) の長さであり、$\circ$ は結合法則を満たす 2 項演算である。

本論文では、上記問題 **(ASP)** で各枝の長さを 1 パラメータについての関数として変化させたとき、その問題の最適解（最短経路）がどのように変化するかを調べる。そこで、各枝にパラメータ x についての関数が与えられ、道の長さが関数族上の 2 項演算で定義された最短経路問題 (parametric shortest path problem) を考える。この問題を解くために不変埋没原理を用いて解く。さらに、1 つの 2 項演算で道の長さが定義された問題と、その演算とド・モルガン律で結ばれた他の 2 項演算で道の長さが定義された問題の間に成り立つ双対定理を導く。

2 パラメータ結合型最短経路問題

有向グラフ $G=(V,A)$, 始点 1, 終点 N が与えられているとする。また各枝 $(i,j)\in A$ には各々、関数 $f_{ij}:R^1\to R^1$ が与えられているとする。このとき頂点 1 から頂点 N への路 $(1,j,k,\ldots,m,N)$ にたいして

$$(f_{1j}\circ f_{jk}\circ\cdots\circ f_{mN})(x), \tag{1}$$

という評価を与える。ただし、$\circ:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}=\{f\mid f:R^1\to R^1,\ \text{mapping}\}$) は結合法則：$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h),\ f,g,h\in\mathcal{F}$ をみたす 2 項演算である。このとき、各 x において、頂点 1 から頂点 N へのすべての路のなかで (1) の値を最小にするような路を見つける問題をパラメータ結合型最短経路問題（parametrtic associative shortest path problem）と呼び、

$$\mathbf{PASP}=(\min,\{f_{ij}\},\mathcal{F}^*(S),\circ)$$

と表すことにする。ただし、以下の仮定を満たすものとする：仮定 1: 2 つの頂点間の路として、閉路は含まない; 仮定 2: 関数族 $\mathcal{F}^*(S)$ は 2 項演算 $\circ$ に関して半群であり ($\circ:\mathcal{F}^*(S)\times\mathcal{F}^*(S)\to\mathcal{F}^*(S)$), 各 $i,j\in V$ に対して $f_{ij}\in\mathcal{F}^*(S)$ とする。ただし、

$$\mathcal{F}^*(S)\subset\mathcal{F}(S)=\{f\mid f:S\to R^1,\ \text{mapping}\}$$

である; 仮定3: 関数族 $\mathcal{F}^*(S)$ は単位元をもつ: $f \circ I(\circ) = I(\circ) \circ f = f \ \forall f \in \mathcal{F}^*(S)$;
仮定4: $f, g \in \mathcal{F}^*(S) \Longrightarrow f \wedge g,\ f \vee g \in \mathcal{F}^*(S)$.

問題 **PASP** に対して部分問題群:

$$F_i(x) = \min_p [(f_{ij} \circ f_{jk} \circ \cdots \circ f_{mN})(x)], \quad p = (i, j, k, \ldots, m, N)$$

を定義しても再帰式 (関数方程式):

$$F_i(x) = \min_{j \in D(i)} [(f_{ij} \circ F_j)(x)], \quad i \neq N, \quad F_N(x) = I(\circ)(x). \tag{2}$$

$$D(i) = \{j \in V | (i, j) \in A\} \tag{3}$$

は一般には成り立たない。

そこで不変埋没原理を用いて問題 **PASP** を解く。与えられた問題を次のようなパラメータ $\lambda \in \mathcal{F}^*(S)$ を含む問題群に埋め込む:

$$F_i(\lambda(\cdot))(x) = \min_p [(\lambda \circ f_{ij} \circ f_{jk} \circ \cdots \circ f_{mN})(x)]. \tag{4}$$

このとき、次の再帰式 (関数方程式) が成り立つ:

定理 1

$$F_i(\lambda(\cdot))(x) = \min_{j \in D(i)} [F_j((\lambda \circ f_{ij})(\cdot))(x)], \quad i \neq N \tag{5}$$

$$F_N(\lambda(\cdot))(x) = \lambda(x). \tag{6}$$

再帰式 (5), (6) を解いて $F_i(\lambda(\cdot))(x)$ を求めると、$F_i(I(\circ)(\cdot))(x)$ の値が各 x における頂点 i から終点 N への最短経路の長さである。

注意 1
最短経路の求め方は以下の通りである:

$$\begin{aligned} F_i(\lambda(\cdot))(x) &= \min_{j \in D(i)} F_j((\lambda \circ f_{ij})(\cdot))(x) \\ &\equiv F_{\pi_x(i;\lambda)}((\lambda \circ f_{i\pi_x(i;\lambda)})(\cdot))(x) \end{aligned}$$

$$\hat{j}(x) = \pi_x(i; I(\circ)), \quad \hat{k}(x) = \pi_x(\hat{j}; f_{i\hat{j}}), \quad \ldots, \quad N = \hat{p}(x) = \pi_x(\hat{o}; f_{i\hat{j}} \circ f_{\hat{j}\hat{k}} \circ \cdots \circ f_{\hat{n}\hat{o}})$$

とおく。このとき

$$(i, \hat{j}(x), \hat{k}(x), \ldots, \hat{n}(x), \hat{o}(x), \hat{p}(x))$$

が頂点 i から N への最短経路となる。

注意 2
一般の 2 項演算で定義された問題においては再帰式 (2), (3) は成立しないが、単調非減少性:

$$f,\ g_1,\ g_2 \in \mathcal{F}^*(S), \quad g_1 \leq g_2 \quad \Longrightarrow \quad f \circ g_1 \leq f \circ g_2$$

を満たす演算で定義された問題にたいしては、再帰式 (2), (3) が成りたつ。

実際、単調非減少性を満たす演算に対して

$$F_i(\lambda(\cdot))(x) = (\lambda \circ F_i)(x) \tag{7}$$

という関係式が成り立つ。従って (5) より

$$(\lambda \circ F_i)(x) = \min_{j \in D(i)} [\{(\lambda \circ f_{ij}) \circ F_j\}(x)]$$

を得る。そこで、上式の λ に単位元 $I(\circ)(\cdot)$ を代入すると再帰式 (2) が導かれる。

3 双対問題

ここで問題 **PASP** における 2 項演算 $\circ$ から次のように 2 項演算 $\bullet$ を定義する：

$$\begin{aligned}(f \bullet g)(x) &= 1 - [(1-f) \circ (1-g)](x) \\ &= (\overline{\overline{f} \circ \overline{g}})(x) \quad (\overline{f}(x) = 1 - f(x)).\end{aligned}$$

例えば、

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} f(x) \vee g(x), \\ f(x) + g(x) - f(x) \times g(x), \\ \dfrac{f(x)g(x)}{1 + (1 - f(x))(1 - g(x))}, \end{cases}$$

という 2 項演算から、それぞれ

$$(f \bullet g)(x) = \begin{cases} f(x) \wedge g(x), \\ f(x) \times g(x), \\ \dfrac{f(x) + g(x)}{1 + f(x)g(x)}, \end{cases}$$

という 2 項演算が定義される。

2 項演算 $\bullet$ と 2 項演算 $\circ$ との間には次のような関係がある：

1： 2 項演算 $\circ$ が結合法則を満たせば $\bullet$ も満たし、さらに逆も成り立つ；

2：(ド・モルガン律) $(f \circ g)(x) = (\overline{\overline{f} \bullet \overline{g}})(x) \quad x \in S$；

3：$(\circ, \mathcal{F}^*(S))$: 半群 $\iff$ $(\bullet, \overline{\mathcal{F}^*(S)})$: 半群, $\overline{\mathcal{F}^*(S)} = 1 - \mathcal{F}^*(S)$；

4：$I(\circ)(x) = 1 - I(\bullet)(x) \quad x \in S$；

5：$F(f, g) = f \circ g$, $G(\overline{f}, \overline{g}) = \overline{f} \bullet \overline{g}$ とおく。ただし、$f \in \mathcal{F}^*(S)$ $\overline{f} \in \overline{\mathcal{F}^*(S)}$ とする。このとき $F(f, \cdot)$ が $\mathcal{F}^*(S)$ 上単調非減少であるための必要十分条件は $G(\overline{f}, \cdot)$ が $\overline{\mathcal{F}^*(S)}$ 上単調非減少になることである。

ここで問題 **PASP** と同じ有向グラフおよび始点, 終点が与えられているが、各枝には $1-f_{ij}(x)=\overline{f}_{ij}(x)$ という関数が与えられているネットワークを考える。また頂点 1 から頂点 N への路の評価は

$$(\overline{f}_{1j}\bullet\overline{f}_{jk}\bullet\cdots\bullet\overline{f}_{mN})(x) \tag{8}$$

とし、すべての路のなかで (8) の値が最大であるものを見つける問題を双対（パラメータ結合型最短経路）問題と呼び、

$$\textbf{DPASP}=(\mathrm{Max},\{\overline{f}_{ij}\},\overline{\mathcal{F}^*(S)},\bullet)$$

と表すことにする。この問題をとくためには **PASP** 同様、パラメータ $\mu\in\overline{\mathcal{F}^*(S)}$ を含む問題群：

$$G_i(\mu(\cdot))(x)=\underset{p}{Max}[(\mu\bullet\overline{f}_{ij}\bullet\overline{f}_{jk}\bullet\cdots\bullet\overline{f}_{mN})(x)] \tag{9}$$

に埋め込み、再起式（関数方程式）:

$$G_i(\mu(\cdot))(x) = \underset{j\in D(i)}{Max}\left[G_j((\mu\bullet\overline{f}_{ij})(\cdot))(x)\right],\quad i\neq N \tag{10}$$

$$G_N(\mu(\cdot))(x) = \mu(x). \tag{11}$$

の解を求め、μ に $\bullet$ の単位元 $I(\bullet)\in\overline{\mathcal{F}^*(S)}$ を代入すれば双対問題の最長経路が求まる。

4 双対定理

前節で述べた 2 項演算 $\circ$ と $\bullet$ の関係 1 ～5 から、問題 **PASP** と 双対問題 **DPASP** の間には次のような関係が成立する。

定理 2 (双対定理) 各 $i\in V$ に対して

$$F_i(\lambda(\cdot))(x)+G_i(\overline{\lambda}(\cdot))(x)=1\quad x\in S,\quad \overline{\lambda}(x)=1-\lambda(x) \tag{12}$$

であり、さらに

(主問題 **PASP** の最短経路) = (双対問題 **DPASP** の最長経路)

という関係が成立する。

注意 3

関係式 (12) を用いれば、主問題 か双対問題 のどちらか一方の再帰式（関数方程式）の解 ($F_i(\lambda(\cdot))(x)$ か $G_i(\overline{\lambda}(\cdot))(x)$) がもとまれば、他方も求まる。また (12) で$\lambda=I(\circ)$ とおけば関係式：

$$F_i(x)+G_i(x)=1\quad x\in S, \tag{13}$$

を得る。2 項演算 $\circ$ が $\mathcal{F}^*(S)$ 上単調非減少である場合は、注意 2 および 2 項演算 $\circ$ と $\bullet$ の関係 5 より、主問題、双対問題共にパラメータを含まない関数方程式 (2), (3) をとけば

その解 ($F_i(x)$ か $G_i(x)$) がもとまる。したがってこの場合は、その解 ($F_i(x)$ か $G_i(x)$) のいずれか一方が求まれば、関係式 (13) を用いて他方も求まる。

以下、具体例を述べる。

例 1 ($\circ = \vee$ と $\bullet = \wedge$)
主問題 **PASP** として、半群 $(\mathcal{F}^*(S), \circ)$ 及び単位元が次で定義された問題を考える：

$$(f \circ g)(x) = f(x) \vee g(x), \quad \mathcal{F}^*(S) = \{f \mid f : S \to [a, b]\}, \quad I(\circ)(x) \equiv b.$$

この時 $F(f, g) = f \circ g$ は g について $\mathcal{F}^*(S)$ 上単調非減少なので、注意 2 で述べたように **PASP** を解くためには次のパラメータのない関数方程式を用いればよい：

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \min_{j \in D(i)} [f_{ij}(x) \vee F_j(x)], \\ F_N(x) &= I(\circ)(x) \equiv b. \end{aligned}$$

一方、上記問題に対して双対問題 **DPASP** は、半群 $(\overline{\mathcal{F}^*(S)}, \bullet)$ 及び単位元が次で定義された問題である：

$$(f \bullet g)(x) = f(x) \wedge g(x), \quad \overline{\mathcal{F}^*(S)} = \{f \mid f : S \to [1-a, 1-b]\}, \quad I(\bullet)(x) \equiv 1 - b.$$

2 項演算 $\circ$ と 2 項演算 $\bullet$ の関係 5 で述べたように、$G(f, g) = f \bullet g$ も g について $\overline{\mathcal{F}^*(S)}$ 上単調非減少になるので、この双対問題 **DPASP** を解くためには主問題と同様に次のパラメータのない関数方程式を用いればよいことがわかる：

$$\begin{aligned} G_i(x) &= \mathop{Max}_{j \in D(i)} \left[\overline{f}_{ij}(x) \wedge G_j(x)\right], \\ G_N(x) &= I(\bullet)(x) \equiv 1 - b. \end{aligned}$$

例 2 ($f \circ g = f + g - fg$と $f \bullet g = fg$)
主問題 **PASP** として、半群 $(\mathcal{F}^*(S), \circ)$ 及び単位元が次で定義された問題を考える：

$$(f \circ g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x), \quad \mathcal{F}^*(S) = \{f \in \mathcal{F}(S) \mid f \geq 1 \text{ or } f \leq 1\}, \quad I(\circ)(x) \equiv 0.$$

この問題では $F(f, g) = f \circ g$ が g について $\mathcal{F}^*(S)$ 上単調非減少とは限らないので、パラメータのない関数方程式が成立しない。そこで次のパラメータを含む関数方程式を解かなければならない：

$$\begin{aligned} F_i(\lambda(\cdot))(x) &= \min_{j \in D(i)} [F_j((\lambda + f_{ij} - \lambda f_{ij})(\cdot))(x)], \\ F_N(\lambda(\cdot))(x) &= \lambda(x). \end{aligned}$$

この問題に対する双対問題 **DPASP** は、半群 $(\overline{\mathcal{F}^*(S)}, \bullet)$ 及び単位元が次で定義された問題である：

$$(f \bullet g)(x) = f(x)g(x), \quad \overline{\mathcal{F}^*(S)} = \{f \in \mathcal{F}(\mathcal{S}) \mid f \geq 0 \text{ or } f \leq 0\}, \quad I(\bullet)(x) \equiv 1.$$

双対問題も主問題と同じ理由から次のパラメータを含む関数方程式を解かなければならない：

$$\begin{aligned} G_i(\overline{\lambda}(\cdot))(x) &= \underset{j\in D(i)}{Max}\left[G_j((\overline{\lambda}\times\overline{f}_{ij})(\cdot))(x)\right], \\ G_N(\overline{\lambda}(\cdot))(x) &= \overline{\lambda}(x). \end{aligned}$$

主問題において関数族 $\mathcal{F}^*(S)$ を

$$\mathcal{F}^*(S)=\{f\in\mathcal{F}(S)\mid f\le 1\}$$

と限定すると $F(f,g)=f\circ g$ は g について $\mathcal{F}^*(S)$ 上単調非減少 になるので、パラメータのない関数方程式：

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \min_{j\in D(i)}\left[f_{ij}(x)+F_j(x)-f_{ij}(x)F_j(x)\right], \\ F_N(x) &= I(\circ)(x)\equiv 0 \end{aligned}$$

を解けば主問題は解ける。また双対問題もパラメータのない関数方程式：

$$\begin{aligned} G_i(x) &= \underset{j\in D(i)}{Max}\left[\overline{f}_{ij}(x)\times G_j(x)\right], \\ G_N(x) &= I(\bullet)(x)\equiv 1 \end{aligned}$$

を解けば、その解が求まる。

例 3 $\left(f\circ g=\dfrac{fg}{1+(1-f)(1-g)}\right.$ と $\left.f\bullet g=\dfrac{f+g}{1+fg}\right)$

主問題 **PASP** として、半群 $(\mathcal{F}^*(S),\circ)$ 及び単位元が次で定義された問題を考える：

$$(f\circ g)(x)=\frac{f(x)g(x)}{1+(1-f(x))(1-g(x))},\ \mathcal{F}^*(S)=\{f\in\mathcal{F}(S)\mid 0\le f\le 1 \text{ or } f\le 0\},\ I(\circ)(x)\equiv 1.$$

例 2 同様、$F(f,g)=f\circ g$ が g について $\mathcal{F}^*(S)$ 上単調非減少とは限らないので、この問題の解を求めるためには、パラメータを含む関数方程式：

$$\begin{aligned} F_i(\lambda(\cdot))(x) &= \min_{j\in D(i)}\left[F_j\left(\left(\frac{\lambda f_{ij}}{(1-\lambda)(1-f_{ij})}\right)(\cdot)\right)(x)\right], \\ F_N(\lambda(\cdot))(x) &= \lambda(x) \end{aligned}$$

を解かなければならない。

この問題に対する双対問題 **DPASP** は、半群 $(\overline{\mathcal{F}^*(S)},\bullet)$ 及び単位元が次で定義された問題である：

$$(f\bullet g)(x)=\frac{f(x)+g(x)}{1+f(x)g(x)},\ \overline{\mathcal{F}^*(S)}=\{f\in\mathcal{F}(S)\mid 0\le f\le 1 \text{ or } f\ge 1\},\ I(\bullet)(x)\equiv 0.$$

また、双対問題もその解を求めるためには、パラメータを含む関数方程式：

$$\begin{aligned} G_i(\overline{\lambda}(\cdot))(x) &= \underset{j\in D(i)}{Max}\left[G_j\left(\left(\frac{\overline{\lambda}+\overline{f}_{ij}}{1+\overline{\lambda}\overline{f}_{ij}}\right)(\cdot)\right)(x)\right], \\ G_N(\overline{\lambda}(\cdot))(x) &= \overline{\lambda}(x) \end{aligned}$$

を解かなければならない。

一方、主問題において関数族 $\mathcal{F}^*(S)$ を

$$\mathcal{F}^*(S) = \{f \in \mathcal{F}(S) \mid \ 0 \leq f \leq 1\}$$

と限定すると $F(f,g) = f \circ g$ は g について $\mathcal{F}^*(S)$ 上単調非減少 になるので、パラメータのない関数方程式：

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \min_{j \in D(i)} \left[\frac{f_{ij}(x)F_j(x)}{1+(1-f_{ij}(x))(1-F_j(x))} \right], \\ F_N(x) &= I(\circ)(x) \equiv 1 \end{aligned}$$

を解けば主問題は解ける。また双対問題もパラメータのない関数方程式：

$$\begin{aligned} G_i(x) &= \mathop{Max}_{j \in D(i)} \left[\frac{\overline{f}_{ij}(x) + G_j(x)}{1+\overline{f}_{ij}(x)G_j(x)} \right], \\ G_N(x) &= I(\bullet)(x) \equiv 0 \end{aligned}$$

を解けば、その解が求まる。

例 4　図 1 のようなネットワーク上で、主問題 **PASP** として、半群 $(\mathcal{F}^*(S), \circ)$ が次で定義された問題を考える：

$$(f \circ g)(x) = f(x) \vee g(x), \quad \mathcal{F}^*(S) = \{f \mid f : [0,1] \to [0,10]\}.$$

このとき双対問題 **DPASP** は、各枝の長さは図 2 のようであり、半群 $(\overline{\mathcal{F}^*(S)}, \bullet)$ が次で定義された問題 になる：

$$(f \bullet g)(x) = f(x) \wedge g(x), \quad \overline{\mathcal{F}^*(S)} = \{f \mid f : [0,1] \to [-9,1]\}.$$

例 1 で述べたようにこれらの問題はパラメータのない関数方程式をとけば最短路長、最長路長がもとまる。**PASP** の最短路長 $F_1(x)$, **DPASP** の最長路長 $G_1(x)$ は次のようである：

$$F_1(x) = \begin{cases} 4+x, & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 6-2x, & \text{for } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad G_1(x) = \begin{cases} -3-x, & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 2x-5, & \text{for } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

従って、確かに $F_1(x) + G_1(x) = 1 \quad x \in S$ が成り立ち、さらに主問題の最短経路および双対問題の最長経路は

$$(1,2,5,7) \ \text{ or } \ \begin{array}{ll} (1,3,6,7), & \text{for } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ (1,3,5,7), & \text{for } \ \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ (1,2,4,7); & \text{for } \ \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{array}$$

である。

例 5　図 3 のようなネットワーク上で、主問題 **PASP** として、半群 $(\mathcal{F}^*(S), \circ)$ が次で定義された問題を考える：

$$(f \circ g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x), \quad \mathcal{F}^*(S) = \{f \mid f : [0,1] \to R^1, \quad f \geq 1 \ \text{ or } \ f \leq 1\}.$$

このとき双対問題 **DPASP** は、各枝の長さは図 4 のようであり、半群 $(\overline{\mathcal{F}^*(S)}, \bullet)$ が次で定義された問題 になる：

$$(f \bullet g)(x) = f(x) \times g(x), \quad \overline{\mathcal{F}^*(S)} = \{f \mid f : [0,1] \to R^1, \quad f \geq 0 \ \text{ or } \ f \leq 0\}.$$

例 2 で述べたようにこれらの問題を解くためにはパラメータを含む関数方程式を解かなければならない。主問題 **PASP** より双対問題 **DPASP** のほうが明らかに計算しやすいのでその再帰式 (5), (6) を解いて $G_1(\overline{\lambda}(\cdot))(x)$ を求めると

$$G_1(\overline{\lambda}(\cdot))(x) = \begin{cases} \overline{\lambda}(x)(x+1)(2x+1)\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right), & \text{for } \overline{\lambda} \leq 0 \\ \overline{\lambda}(x)(x+1)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)(x+2), & \text{for } \overline{\lambda} \geq 0 \end{cases}$$

従って、1 から 7 への最長路長は

$$G_1(I(\bullet)(\cdot))(x) = G_1(1)(x) = (x+1)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)(x+2).$$

である。そこで、双対定理における (12) 式から主問題の解 $F_1(I(\cdot))(x)$ が求まる：

$$\begin{aligned} F_1(I(\cdot)) &= 1 - G_1(\overline{I(\circ)}(\cdot))(x) = 1 - G_1((1 - I(\circ))(\cdot))(x) = 1 - G_1(I(\bullet)(\cdot))(x) \\ &= 1 - (x+1)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right)(x+2) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{11}{6}x^2 - 2x + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

また、主問題の最短経路および双対問題の最長経路は $(1,2,4,7)$ である。

例 6　図 5 のようなネットワーク上で、主問題 **PASP** として、半群 $(\mathcal{F}^*(S), \circ)$ が次で定義された問題を考える：

$$(f \circ g)(x) = f(x)g(x)/(1-f(x))(1-g(x)), \ \mathcal{F}^*(S) = \{f \mid f : [0,1] \to R^1, \ 0 \leq f \leq 1 \ \text{or} \ f \leq 0\}.$$

このとき双対問題 **DPASP** は、各枝の長さは図 6 のようであり、半群 $(\overline{\mathcal{F}^*(S)}, \bullet)$ が次で定義された問題 になる：

$$(f \bullet g)(x) = (f(x)+g(x))/(1+f(x)g(x)), \ \overline{\mathcal{F}^*(S)} = \{f \mid f : [0,1] \to R^1, \ 0 \leq f \leq 1 \ \text{or} \ f \geq 1\}.$$

例 3 で述べたようにこれらの問題を解くためにはパラメータを含む関数方程式を解かなければならない。例 5 同様、再帰式 (5), (6) を解いて $G_1(\overline{\lambda}(\cdot))(x)$ を求めると

$$\begin{aligned} \overline{\lambda} &= 1 - \lambda \geq 1 \ \text{ の場合：} \\ G(\overline{\lambda}(\cdot))(x) &= \begin{cases} \dfrac{(-x^2+4x+3)\overline{\lambda}(x) - x^3 + x^2 + 3x + 3}{(-x^3+x^2+3x+3)\overline{\lambda}(x) - x^2 + 4x + 3}, & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \dfrac{(3x^2+4x+2)\overline{\lambda}(x) + x^3 + 2x^2 + 4x + 2}{(x^3+2x^2+4x+2)\overline{\lambda}(x) + 3x^2 + 4x + 2}, & \text{for } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \\ 0 &\leq \overline{\lambda} = 1 - \lambda \leq 1 \ \text{ の場合：} \\ G(\overline{\lambda}(\cdot))(x) &= \frac{(-x^2+2x+2)\overline{\lambda}(x) - x^3 + 2x + 2}{(-x^3+2x+2)\overline{\lambda}(x) - x^2 + 2x + 2} \end{aligned}$$

となる。従って、1 から 7 への最長路長は

$$G_1(I(\bullet)(\cdot))(x) = G_1(0)(x) = \frac{-x^3+2x+2}{-x^2+2x+2}$$

である。そこで、双対定理における (12) 式から主問題の解 $F_1(I(\circ)(\cdot))(x)$ が求まる：

$$\begin{aligned} F_1(I(\circ)(\cdot)) &= \;= 1 - G_1(I(\bullet)(\cdot))(x) = 1 - G_1(0)(x) \\ &= 1 - \frac{-x^3+2x+2}{-x^2+2x+2} = \frac{x^3-x^2}{-x^2+2x+2}. \end{aligned}$$

また、主問題の最短経路および双対問題の最長経路は $(1,2,4,7)$ である。

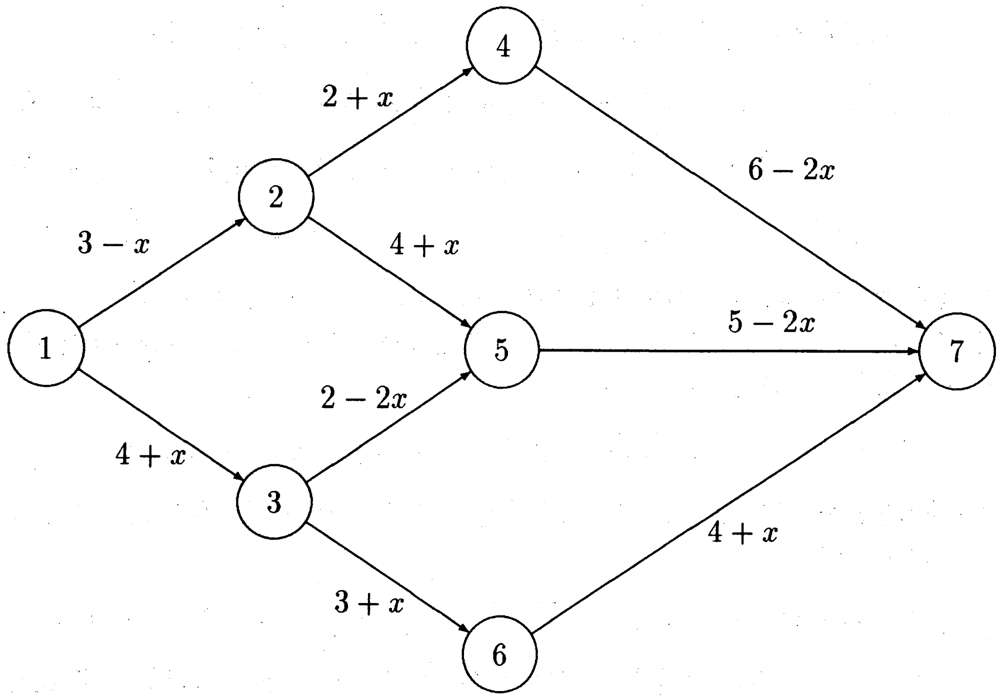

図 1: 主問題：$f \circ g = f \vee g, \quad f_{ij} : [0,1] \to [0,10]$

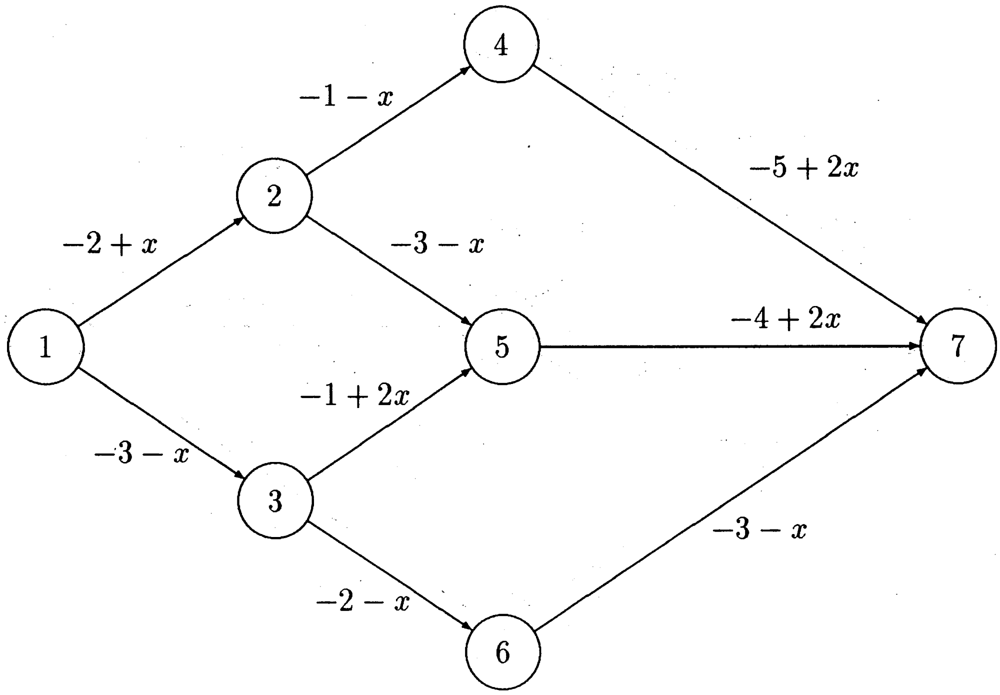

図 2: 双対問題：$f \bullet g = f \wedge g$,　$\overline{f}_{ij} : [0,1] \to [-9,1]$

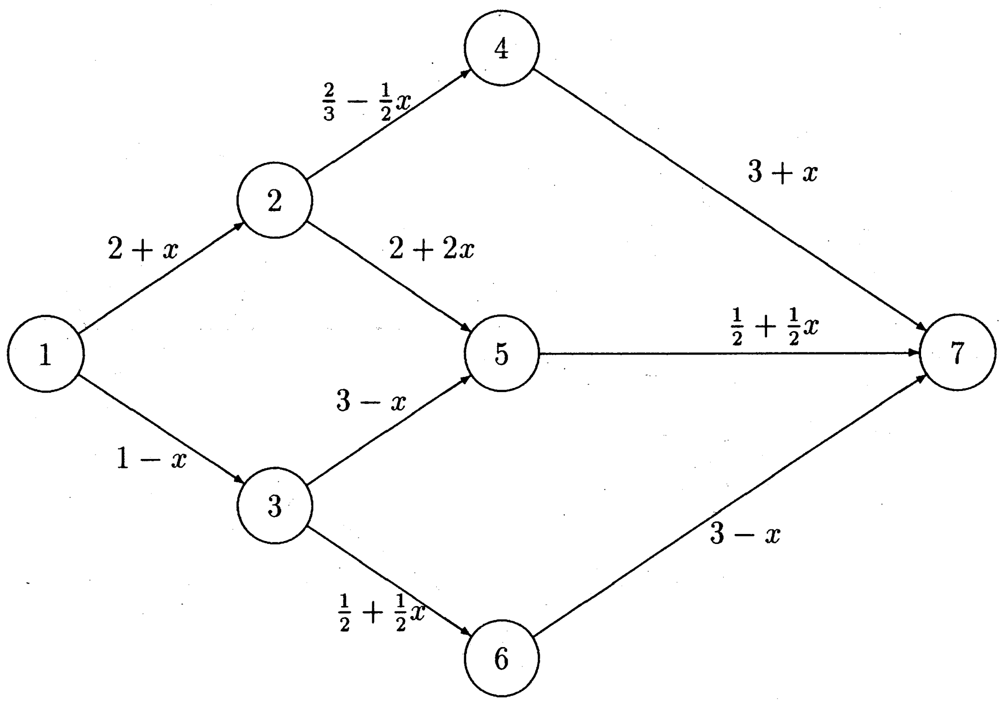

図 3: 主問題：$f \circ g = f + g - fg$,　$f_{ij} : [0,1] \to R^1$,　$f_{ij} \geq 1$ or $f_{ij} \leq 1$

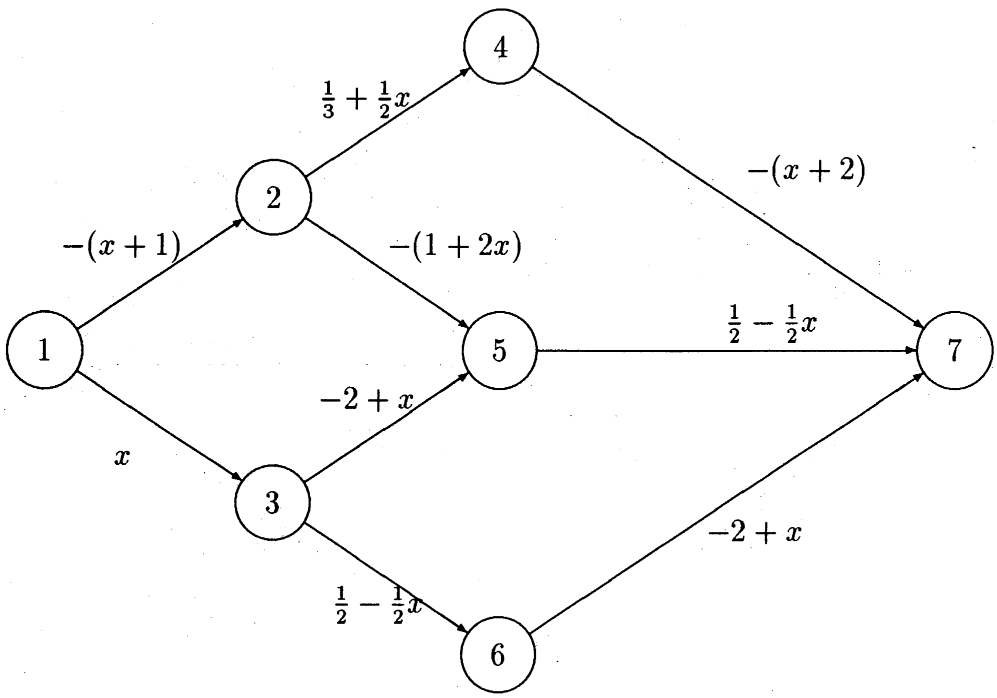

図 4: 双対問題：$f \bullet g = fg$, $\overline{f}_{ij} : [0,1] \to R^1$, $\overline{f}_{ij} \geq 0$ or $\overline{f}_{ij} \leq 0$

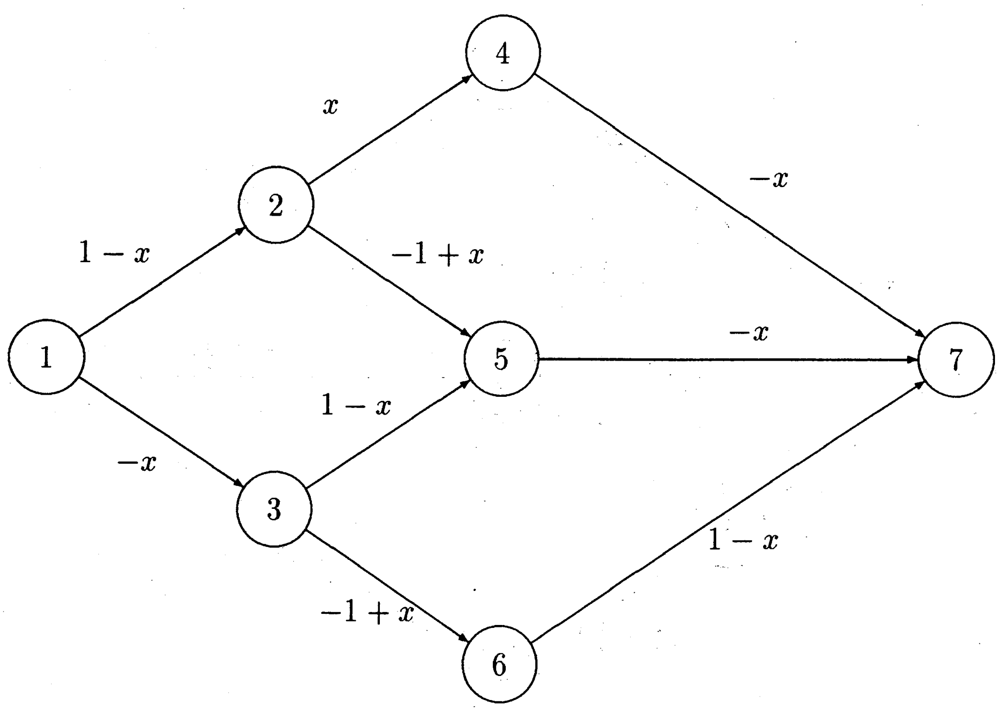

図 5: 主問題：$f \circ g = \frac{fg}{1+(1-f)(1-g)}$, $f_{ij} : [0,1] \to R^1$, $0 \leq f_{ij} \leq 1$ or $f_{ij} \leq 0$

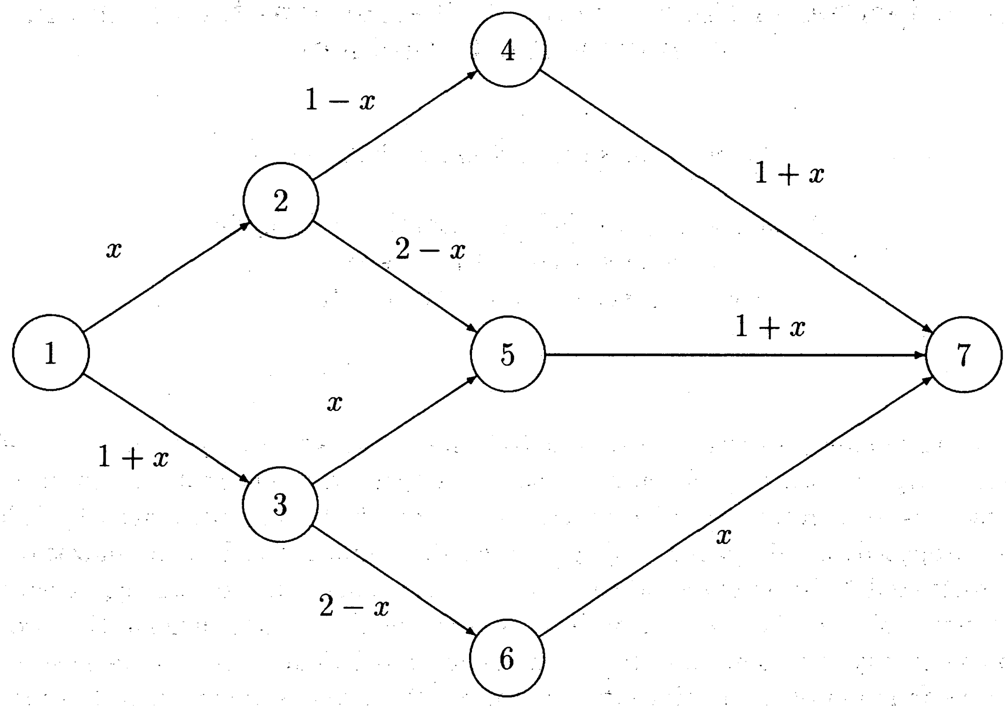

図 6: 双対問題：$f \bullet g = (f+g)/(1+fg)$, $\overline{f}_{ij} : [0,1] \to R^1$, $0 \leq \overline{f}_{ij} \leq 1$ or $\overline{f}_{ij} \geq 1$

参考文献

[1] Y.Maruyama: Shortest and longest path problems, Optimization, 38(1996), 287-299.

[2] Y.Maruyama: On associative shortest path problems, Bull. Inform. Cybernet., 29(1997), 67-81.

[3] Y.Maruyama: Associative shortest and longest path problems, under consideration.