

時間に依存するディリクレ形式の族と対応する マルコフ過程について

熊本大学工学部 大島洋一 (Yōichi OSHIMA)

1 序

$R^1 \times R^d$ 上のほとんど至るところ正の関数 $\rho(s, x)$ と対称な関数族 $(a_{ij}(s, x))$ で $0 < \lambda(T) \leq \Lambda(T) < \infty$ なる数が存在して

$$\lambda(T)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(s, x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(T)|\xi|^2, \forall s \in [0, T], \xi = (\xi_i) \in R^d$$

を満足するものに対して、次のような作用素

$$\mathcal{G}^{\rho,s}u(s, x) = \sum_{i,j=1}^d \frac{1}{\rho^2(s, x)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^2(s, x)a_{ij}(s, x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad (1)$$

$$\hat{\mathcal{G}}^{\rho,s}v(s, x) = \sum_{i,j=1}^d \frac{1}{\rho^2(s, x)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^2(s, x)a_{ij}(s, x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \log \rho}{\partial s} v \quad (2)$$

を考える。 $m_s(dx) = \rho^2(s, x)dx$, $d\nu^\rho(s, x) = m_s(dx)ds$ とおくと、形式的に

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\rho(u, v) &\equiv -\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \mathcal{G}^{\rho,s}u, v\right)_{\nu^\rho} = -\left(u, -\frac{\partial u}{\partial s} + \hat{\mathcal{G}}^{\rho,s}v\right)_{\nu^\rho} \\ &= -\int_{R^1} \left(\frac{\partial u}{\partial s}, v(s, \cdot)\right)_{m_s} ds + \int_{R^1} E^{\rho,s}(u(s, \cdot), v(s, \cdot)) ds, \end{aligned} \quad (3)$$

と書ける、但し

$$E^{\rho,s}(\phi, \psi) = \sum_{i,j=1}^d \int_{R^d} \rho^2(s, x)a_{ij}(s, x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx, \quad \phi, \psi \in C_0^\infty(R^d). \quad (4)$$

マルコフ過程の組 $\mathbf{M}^\rho = (X_t, P_{(s,x)}^\rho)$, $\hat{\mathbf{M}}^\rho = (\hat{X}_t, \hat{P}_{(s,x)}^\rho)$ があって、その推移確率の組 $p^\rho(s, x; t, dy)$, $\hat{p}^\rho(t, y; s, dx)$ が $(\mathcal{G}^{(s)}, \hat{\mathcal{G}}^{(s)})$ に対応する、即ち

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} p^\rho(s, x; t, \psi) &= -\mathcal{G}^{\rho,s}p^\rho(s, x; t, \psi), \quad \lim_{s \uparrow t} p^\rho(s, x; t, \psi) = \psi(x), a.e. \\ \frac{\partial}{\partial s} \hat{p}^\rho(t, y; s, \varphi) &= \hat{\mathcal{G}}^{\rho,s}\hat{p}^\rho(t, y; s, \varphi), \quad \lim_{t \downarrow s} \hat{p}^\rho(t, y; s, \varphi) = \varphi(y) a.e. \end{aligned}$$

を満足するものを $(\mathcal{G}^{\rho,s}, \hat{\mathcal{G}}^{\rho,s})$ (または $E^{\rho,s}$) に対応するマルコフ過程という。

この報告の目的は、 $E^{\rho,s}$ に対応する拡散過程の存在およびその保存性あるいは再帰性について調べる事である。

2 M^ρ の構成

まず $\rho = 1$ と仮定する。このとき、 $E^{\rho,s}$ の代わりに $E^{(s)}$ と書く。詳しくいえば、 $(E^{(s)}, F)$ を $(E^{(s)}, C_0^\infty(R^d))$ の閉包として決まる $L^2(R^d)$ 上のディリクレ形式とすると、 $F = H_0^1(R^d)$ は Sobolev 空間である。 $E = E^{(0)}$, $m = m^{(0)}$ とし $\|\varphi\|_F^2 = E(\varphi, \varphi) + \|\varphi\|_H^2$ を F のノルム、 $F \subset H = H' \subset F'$ と考える、ただし $H = L^2(m)$: $Z = R^1 \times X$, $d\nu = ds \times dm$ とし、 $\mathcal{H} = L^2(Z; \nu)$, $\mathcal{F} = L^2(R^1 \rightarrow F)$, $\mathcal{F}' = L^2(R^1 \rightarrow F')$ および $\mathcal{W} = \{u \in \mathcal{F} : \frac{\partial u}{\partial s} \in \mathcal{F}'\}$ とおく、ここに $\partial u / \partial s$ は u を R^1 から F' への写像と考えた超関数微分である。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) &= \int_{R^1} E^{(s)}(u(s, \cdot), v(s, \cdot)) ds, \quad u, v \in \mathcal{F}, \\ \mathcal{E}(u, v) &= \begin{cases} -\int_{R^1} \left(\frac{\partial u}{\partial s}(s, \cdot), v(s, \cdot) \right) ds + \mathcal{A}(u, v), & u \in \mathcal{W}, v \in \mathcal{F} \\ \int_{R^1} \left(\frac{\partial v}{\partial s}(s, \cdot), u(s, \cdot) \right) ds + \mathcal{A}(u, v), & u \in \mathcal{V}, v \in \mathcal{W} \end{cases} \end{aligned}$$

とおく。このとき、 $\alpha > 0$ と $f \in \mathcal{H}$ に対して、 \mathcal{H} 上の resolvents $G_\alpha f \in \mathcal{W}$, $\hat{G}_\alpha f \in \mathcal{W}$ で

$$\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, v) = \mathcal{E}_\alpha(v, \hat{G}_\alpha f) = (f, v)_\nu, \quad \forall v \in \mathcal{F} \quad (5)$$

を満たすものが唯一つ決まる ([LM])。さらに [P] により、容量の概念が導入出来、次の事がいえる。

定理 1 ([O1]) Z 上の拡散過程の組 $M = (Z_t, P_{(s,x)})$ と $\hat{M} = (\hat{Z}_t, \hat{P}_{(s,x)})$ で、その resolvents $R_\alpha f$, $\hat{R}_\alpha f$ がそれぞれ、 $G_\alpha f$, $\hat{G}_\alpha f$ の q.c. modifications となるものがある。さらに $Z_t = (\tau(t), X_t) \in R^1 \times R^d$ および $\hat{Z}_t = (\hat{\tau}(t), \hat{X}_t) \in R^1 \times R^d$ と分解するとき、 $\tau(t)$, $\hat{\tau}(t)$ はそれぞれ、右、左への一様運動である。

定理 1 で決まる拡散過程に対し、対称なディリクレ形式の場合と類似の確率解析が展開出来る。右連続、 $A_0 = 0$, $|A_t| < \infty$, $t < \zeta$, $A_t = A_\zeta$, $t \geq \zeta$ なる確率過程 A_t が加法的汎関数とは、 $A_{s+t}(\omega) = A_s(\omega) + A_t(\theta_s(\omega))$ を満たすことである。 A_t のエネルギー $e(A)$ を

$$e(A) = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^2 E_\nu \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} A_t^2 dt \right)$$

により定義する。加法的汎関数 A_t が、 $E_z(A_t) = 0$ q.e. を満たすときマルチンゲール加法的汎関数とよぶ。このとき次の福島分解がいえる：

任意の擬連続な $u \in \mathcal{W}$ に対して、エネルギー有限のマルチンゲール加法的汎関数 $M_t^{[u]}$ とエネルギー零の連続加法的汎関数 $N_t^{[u]}$ が存在して

$$u(Z_t) - u(Z_0) = M_t^{[u]} + N_t^{[u]} \quad (6)$$

と一意的に書ける。

次に、非負で a.e. に正の関数 $\rho(s, x)$ の場合を考える。関数 u で、任意の区間 $[0, T]$ に対してある関数 $u^T \in \mathcal{W}$ が存在して $u(s, \cdot) = u^T(s, \cdot)$, $\forall s \in [0, T]$ が成り立つものの全体を \mathcal{W}^T と書く。 ρ に対して次の仮定をする。任意の $0 < T < \infty$ に対して、

$$\rho \in \mathcal{W}^T, \quad \frac{\partial \rho}{\partial s} \in L_+^2([0, T] \times X; \nu) \quad (7)$$

を満たすとする。 ρ は (適当な version をとり) 擬連続としてよい。このとき、拡散過程 M^ρ, \hat{M}^ρ はそれぞれ M, \hat{M} からずれの変換で得られる。即ち、

$$L_t = \exp\left(M_t^{[\rho]} - \frac{1}{2}\langle M^{[\rho]} \rangle_t\right), \quad \hat{L}_t = \exp\left(\hat{M}_t^{[\rho]} - \frac{1}{2}\langle \hat{M}^{[\rho]} \rangle_t\right) \quad (8)$$

とおき、 $\Lambda \in \sigma(Z_s; s \leq t)$, $\hat{\Lambda} \in \sigma(\hat{Z}_s; s \leq t)$ に対して

$$P_{(s,x)}^\rho(\Lambda) = E_{(s,x)}(L_t : \Lambda, t < \tau_G), \quad \hat{P}_{(s,x)}^\rho(\hat{\Lambda}) = \hat{E}_{(s,x)}(\hat{L}_t \exp(-\hat{B}_t) : \hat{\Lambda}, t < \hat{\tau}(G)) \quad (9)$$

とおく、ここに $G = \{(s, x) : 0 < \rho(s, x) < \infty\}$, $\hat{B}_t = \int_0^t \partial \rho / \partial s(\hat{Z}_s) ds$ である。また $G_n = \{(s, x) : \frac{1}{n} < \rho(s, x) < n\}$ とおく。 $M^\rho = (Z_t, P_{(s,x)}^\rho)$ および $\hat{M}^\rho = (\hat{Z}_t, \hat{P}_{(s,x)}^\rho)$ の Resolvents をそれぞれ V_α および \hat{V}_α と書く、即ち、

$$\begin{aligned} V_\alpha f(s, x) &= E_{(s,x)}^\rho \left(\int_0^{\tau_G} e^{-\alpha t} f(Z_t) dt \right) \\ \hat{V}_\alpha f(t, y) &= \hat{E}_{(t,y)}^\rho \left(\int_0^{\tau_G} e^{-\alpha s} f(\hat{Z}_s) ds \right). \end{aligned}$$

M^ρ, \hat{M}^ρ の G_n での Part process の Resolvents $V_\alpha^n, \hat{V}_\alpha^n$ を同様に定義する。この時次の定理が
いえる。

定理 2 (7) の条件を満たす関数 ρ に対して、 M^ρ および \hat{M}^ρ は $d\nu^\rho = \rho^2 d\nu$ に関して dual である。さらに、 $f \in \mathcal{H}$ と、ある G_n の外で 0 となる $v \in \mathcal{F}$ に対して、

$$\mathcal{E}_\alpha^\rho(V_\alpha^n f, v) = \mathcal{E}_\alpha^\rho(v, \hat{V}_\alpha^n f) = (f, v)_{\nu^\rho}, \quad (10)$$

をみたす、ただし、 $\mathcal{E}_\alpha^\rho = \mathcal{E}^\rho + (\cdot, \cdot)_{\nu^\rho}$ 。

3 保存性及び再帰性

M^ρ が保存的とは、任意の $s < t$ に対して $p^\rho(s, x; t, 1) = 1$ a.e. となる事である。また、 M^ρ が、弱い意味 [強い意味] で再帰的とは、任意の空でない相対コンパクトな開集合 C に対して、 $P_{(s,x)}^\rho(\sigma_C < \infty) = 1$ [$P_{(s,x)}^\rho(\int_0^\infty I_C(X_{\tau(t)}) dt = \infty) = 1$] が a.e. で成り立つ事と定義する。時間的に一様な場合は 2 つの意味の再帰性は一致するが今の場合は一般に一致しない。 $\hat{A}_t = \int_0^t I_C(\hat{X}_s) ds$ にたいして

$$\hat{W}_\alpha^{\beta, C} f(s, x) = \hat{E}_{(s,x)}^\rho \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t - \beta \hat{A}_t} f(Z_t) dt \right)$$

とし、 $\hat{V}_\alpha^C = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \hat{W}_\alpha^{\beta, C}$ とおくと $\hat{V}_\alpha = \hat{V}_\alpha^G, \hat{V}_\alpha^n = \hat{V}_\alpha^{G_n}$ である。このとき、次の結果がいえる ([O2])

定理 3 任意の非負有界で Z 内にコンパクトな台をもつ関数 ν^ρ -可積分関数 f に対して $v = \hat{V}_\alpha f$, $v = \hat{W}_0^{\beta, C} f$ または $v = \hat{V}_0^C f$ に対して $u_n \rightarrow 1$ かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(u_n, v) = 0 \quad (11)$$

を満たす $u_n \in \mathcal{F}$ があれば M^ρ はそれぞれ、保存的、強い意味で再帰的または弱い意味で再帰的である。

定理3で、 $v = \hat{V}_\alpha^n f$ とし、 $\xi_n \in C_0^\infty(0, \infty)$ で $0 \leq \xi_n \leq 1$, $\xi_n(t) = 1$ ($\frac{2}{n} \leq t \leq \frac{n}{2}$), $\xi_n(t) = 0$ ($t \leq \frac{1}{n}$ または $t \geq n$), $|\xi_n'(t)| \leq Cn$ ($\frac{1}{n} < t < \frac{2}{n}$) および $|\xi_n'(t)| \leq \frac{C}{n}$ ($\frac{n}{2} < t < n$) をみたす関数 ξ に対して $u_n = x_n(\rho)$ とおき

$$\int_{G_n} v^2 \rho^2 d\nu \leq \int_Z f^2 \rho^2 d\nu, \quad \int_{G_n} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(s, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \rho^2(s, x) d\nu \leq \int_Z f^2 \rho^2 d\nu$$

を使えば次の事がいえる ([OS]).

定理4 殆ど至るところ正の関数 ρ が、任意の $0 < T < \infty$ に対して、(7) を満足すれば、 M^ρ は保存的である。

次に再帰性について考える。 $\hat{p}^{\beta, C}$ を $\hat{W}_\alpha^{\beta, C}$ に対応する推移確率とすると、定理3で $u_n(s, x) = \xi_n(s)\varphi_n(x)$ なる関数列を考える事により、その結果は次の様に言い変える事が出来る： $T_n \rightarrow \infty$ $\varphi_n \rightarrow 1$ があり、ある $\beta > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{(\varphi_n, \hat{p}^{\beta, C}(T_n, \cdot; g))_{m_{T_n}} + \int_0^{T_n} E^{(t)}(\varphi_n, \hat{p}^{\beta, C}(T_n, \cdot; g)) dt\} = 0$$

ならば強い意味で再帰的である。この式で $\hat{p}^{\beta, C}$ の代わりに \hat{V}_C^β の推移確率 \hat{q}^C として成り立つならば、弱い意味で再帰的となる。これを使えば、次の結果が分かる ([O2]).

定理5 ρ が、殆ど至るところ正で、任意の $0 < T < \infty$ に対して W^T に属し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{(s, x)} \left(\exp(\langle M^{\log \rho} \rangle_{T_n}) - 2\beta A_{T_n} \right) = 0 \text{ locally in } L^1(\nu^\rho),$$

$$\int_X \left(\sup_{s \leq t} \frac{\rho(s, x)}{\rho(0, x)} \right)^2 |\nabla \rho(0, \cdot)|^2 dx < \infty, \quad \forall t < \infty$$

を満たすならば M^ρ は強い意味で再帰的である。

例えば、1次元ブラウン運動の場合、 C を0の近傍とし、 $\partial \log \rho / \partial x$ が $s \geq 0, x \in C$ に関して有界、その $L^2(dx)$ -ノルムが s について有界かつ $\int_X (\rho(s, x) / \rho(0, x))^2 |\nabla \log \rho(0, x)|^2 dx$ が s について局所的に有界ならば、定理5の仮定を満たし、強い意味で再帰的である。

また、 $\rho(s, x) = \Gamma(s)$ で $a_{ij} = \delta_{ij}$ の場合、即ち、

$$E^{\Gamma(s)}(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_{R^d} \Gamma(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx, \quad \varphi, \psi \in F$$

の場合は、対応する拡散過程はブラウン運動を時間変更して得られる。このときは定理4の結果を使えば、

$$d = 1, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Lambda(T)^2} \int_0^T \Gamma(s) ds = \infty$$

$$d = 2, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Lambda(t)} \log \left(\int_0^T \Gamma(s) ds \right) = \infty$$

のとき対応する拡散過程は強い意味で再帰的であることが分かる、ただし $\Lambda(T) = \sup_{s \leq T} \Gamma(s)$ である。

参考文献

- [FOT] M.Fukushima, Y.Oshima and M.Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, Walter de Gryter & Co., 1994
- [LM] J.L.Lions and E.Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol.1, Dunod Paris, 1968
- [O1] Y.Oshima, On a construction of Markov processes associated with time dependent Dirichlet spaces, *Forum Math.*, 4 (1992), 395-415
- [O2] Y. Oshima, On the recurrence of some time inhomogeneous Markov processes, to appear
- [OS] Y. Oshima and K.Th.Sturm, On the conservativeness of a space-time process, to appear in the *Proceedings of the Japan-Russia Symposium on Probability Theory and Mathematical Statistics*, 1995
- [P] M.Pierre, Representant précis d'un potentiel parabolique, Sémin. Th. du Potentiel, Univ. Paris VI, *Lecture Notes in Math.*, 814 (1980), Springer-Verlag
- [S] W. Stannat, The theory of generalized Dirichlet forms and its applications in analysis and stochastics, Doctoral these, University of Bielefeld, 1996