数理解析研究所講究録
1016 巻 1997 年 85-93

無限ネットワークの非線形倉持境界

広島工業大学　村上　温　(Atsushi Murakami)
島根大学　山崎稀嗣 (Maretsugu Yamasaki)

§1. 準備

Riemann 面における倉持境界の理論（例えば [8] など）と同様のことが無限ネットワーク上でも調和構造を導入すれば議論できることが分かっている（[3], [6]）. この報告では [9] なども参考にして，無限ネットワーク上の倉持境界を非線形の場合に拡張させることを考える.

無限ネットワークの基本概念および記号等は [10], また，無限ネットワーク上の非線形ポテンシャル論は主に [2], [5] に依ることにする. さらに，この報告では直接には言及しないが無限ネットワークの概念およびその上の（非線形）ポテンシャル論に関連した論文を参考文献欄に追加しておく.

$N = \{X, Y, K, r\}$ を局所有限な無限ネットワーク とする.

各 $a \in X$ と $y \in Y$ に対して次のように置く：

$$Y(a) = \{y \in Y;\ K(a, y) \neq 0\},$$

$$e(y) = \{x \in X;\ K(x, y) \neq 0\},$$

$$X(a) = \cup\{e(y);\ y \in Y(a)\},$$

$$U(a) = X(a) - \{a\}.$$

また，集合 S に対して， $L(S)$ (resp. $L^+(S)$) を S 上の実数値関数全体 (resp. 非負実数値関数全体) とし，A ($\subset X$) に対して，ε_A ($\in L^+(X)$) を A の特性関数とする. $A = \{a\}$ のときは $\varepsilon_{\{a\}}$ を単に ε_a と記す. f の台は Sf で表す.

p, q を正の数で $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$ を満たすものとし，$\phi_p(t) = |t|^{p-1}\mathrm{sign}(t)$ とおく.

２つの関数 $w_1, w_2 \in L(Y)$ に対して

$$H_p(w_1) = \sum\nolimits_{y\in Y} r(y)|w_1(y)|^p\ (\leqq \infty),$$

意味があるとき,

$$((w_1, w_2)) = \sum\nolimits_{y\in Y} r(y) w_1(y) w_2(y)$$

とおく．また，$u \in L(X)$ に対して，

$$D_p(u) = H_p(du) = (\!(\phi_p(du),\, du)\!) = H_q(\phi_p(du))$$

とおく．$D_p(u)$ は u の p-Dirichlet 和とよばれ，$D_p(u) < \infty$ のとき，u は p-Dirichlet 有限な関数といわれる．更に，$u \in L(X)$ に対して，p-Laplacian とよばれる $\Delta_p u(x) \in L(X)$ を

$$\Delta_p u(x) = \sum_{y \in Y} K(x,\, y)\phi_p(du(y)) \quad (x \in X)$$

で定める．ここで，$du \in L(Y)$ は

$$du(y) = -r(y)^{-1} \sum_{x \in X} K(x,\, y)u(x) \quad (y \in Y)$$

である．

注意１．１．$\Delta_p u(x_0) = \sum_{y \in Y(x_0)} r(y)^{1-p}\phi_p(u(x_y) - u(x_0))$ が成立する．ここに，x_y は x_0 と異なる $y \in Y(x_0)$ の端点である．また，k が定数のとき，$\Delta_p(ku)(x_0) = \phi_p(k)\Delta_p u(x_0)$.

補題１．２．$u, v \in L(X)$ で Su または Sv が有限集合ならば，

$$(\!(\phi_p(du),\, dv)\!) = -\sum_{x \in X} \Delta_p u(x)v(x).$$

$u \in L(X)$ が A ($\subset X$) 上で $\Delta_p u(x) = 0$ (resp. $\Delta_p u(x) \leqq 0$) となるとき，u は A で p-調和（resp. p-優調和）という．

注意１．３．補題１．２から，u が A で p-調和（resp. p-優調和）であることと台が有限で $X - A$ では 0 であるようなすべての $f \in L^+(X)$ に対して，$(\!(\phi_p(du),\, df)\!) = 0$ （resp. $\geqq 0$）であることは同値であることが分かる．

補題１．４．定数 $a_i > 0$ に対して，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の関数 $f(s; t_1, \ldots, t_n) := \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_p(t_i - s)$ は連続で，s（resp. t_i, $i = 1, \ldots, n$）に関して狭義の減少（resp. 増加）である．

注意１．１と補題１．４より次のことが分かる：

系１．５．1) $u, v \in L(X)$ で $u(x) \leqq v(x)$ かつ $u(x_0) = v(x_0)$ ならば，$\Delta_p u(x_0) \leqq \Delta_p v(x_0)$.

2) $u, v \in L(X)$ で $u(x_0) \leqq v(x_0)$ ならば，$\Delta_p(u \wedge v)(x_0) \leqq \Delta_p u(x_0)$.

3) 各 $u \in L(X)$ と $x_0 \in X$ について，$\sum_{y \in Y(x_0)} r(y)^{1-p}\phi_p(u(x_y) - s_0) = 0$ となるような $s_0 \in \boldsymbol{R}$ が唯１つ存在する．ここで，x_y は x_0 と異なる $y \in Y(x_0)$ の端点である．この s_0 の存在により，x_0 で s_0 をとり，$X - \{x_0\}$ では $u(x)$ に一致するような関数 $u'(x)$ は $\{x_0\}$ で p-調和であることが分かる．

この s_0 を $m_p(u; x_0)$ で表す.

系１．５，2) より次のことが分かる：

命題１．６．u_1 と u_2 が共に A で p-優調和ならば，$u_1 \wedge u_2$ もまた A で p-優調和である.

系１．５，3) より次のことが分かる：

命題１．７．$u \in L(X)$ を A で p-優調和な関数とする．このとき，各 $x_0 \in A$ に対して，A で p-優調和な $u' \in L(X)$ で $\Delta_p u'(x_0) = 0$, $u'(x_0) \leqq u(x_0)$ かつ $X - \{x_0\}$ では $u' = u$ となるものが存在する.

このような関数 u' を $\tau_{x_0} u$ で表す.

注意１．１と系１．５，2) より次のことが分かる：

命題１．８．A を Xの有限部分集合とする．u と $-v$ が共に A で p-優調和で $X - A$ 上で $u \geqq v$ ならば，A 上で従って，X 上で $u \geqq v$ となる.

系１．９．A を Xの有限部分集合とする．u と v が共に A で p-調和で $X - A$ で $u = v$ ならば，X上で $u = v$ となる.

次のことも分かっている.

命題１．１０．$\{u_\alpha\}_\alpha$を Xの連結な部分集合 A で p-優調和な正の関数の集合とする．このとき，ある点 $x_0 \in A$ で $\{u_\alpha(x_0)\}_\alpha$ が有界ならば，各 $x \in A$ でも $\{u_\alpha(x)\}_\alpha$ は有界である.

関数 $u \in L(X)$ が次の条件を満たすとき，u は A で弱 p-優調和といわれる：
A の任意の有限部分集合 A' と A'で p-調和な任意の関数 $h \in L(X)$ に対して $X - A'$上で $u \geqq h$ ならば A'上で $u \geqq h$ となる.

系１．５，3) と命題１．８より次の結果が分かる：

命題１．１１．関数 $u(x) \in L(X)$ が弱 p-優調和であることと p-優調和であることは同じことである.

§2. Dirichlet 原理

今後，Xの有限部分集合 $A_0 (\neq \emptyset)$ を固定しておき，$X' = X - A_0$ とおく．また,

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}^{(p), A_0} = \{u \in L(X) \,;\, D_p(u) < \infty \text{ かつ } A_0\text{上で } u = 0\}$$

とおくと，$\mathscr{D}$ はノルム $[D_p(\cdot)]^{1/p}$で反射的バナッハ空間となる．

A を X'の部分集合，$\varphi \in L(X)$ とする．A 上でφ なる値をとるような $\mathscr{D}$ の関数全体を $\mathscr{D}_A^{(p)}(\varphi)$ で表す：

$$\mathscr{D}_A^{(p)}(\varphi) = \{u \in \mathscr{D}\,;\, A \text{ 上で } u = \varphi\}.$$

このとき，Nにおける Dirichlet 原理とは次のことをいう．

定理２．１．Aを X' の部分集合，$\varphi \in L(X)$ とする．$\mathscr{D}_A^{(p)}(\varphi) \neq \emptyset$ ならば，関数 $h \in \mathscr{D}_A^{(p)}(\varphi)$ で $\mathscr{D}_A^{(p)}(\varphi)$ に属する関数のうちで p-Dirichlet 和が最小となるものが存在し，かつ唯１つ存在する．この関数 h は $X' - A$ で p-調和で次式によって定められる：

(2.1) $\qquad h \in \mathscr{D}_A^{(p)}(\varphi)$ ですべての $u \in \mathscr{D}_A^{(p)}(0)$ に対して，$((\phi_p(dh), du)) = 0$ となる．

今後この関数 h を$\varphi_A^{(p)}$で表す．$\varphi_A^{(p)}$が $X' - A$ で p-調和であることは注意１．３と (2.1) より分かる．

注意２．２．Aが有限集合ならば，任意の$\varphi \in L(X)$ に対して $\mathscr{D}_A^{(p)}(\varphi) \neq \emptyset$．また，$D_p(\varphi) < \infty$ ならば，任意の $A\ (\subset X')$ に対して $\mathscr{D}_A^{(p)}(\varphi) \neq \emptyset$．

注意２．３．補題１．４と系１．５，3) により $u \in L(X)$ について次のことが成り立つことが分かる：$(u_{U(a)}^{(p)})(a) = m_p(u; a)$．また，$u$ が $A\ (\subset X)$ で p-調和 (resp. p-優調和) であることと各 $a \in A$ に対して，$(u_{U(a)}^{(p)})(a) = u(a)$ (resp. $(u_{U(a)}^{(p)})(a) \leqq u(a)$) が成り立つことは同値である．

φ_Aについて次のことが分かる．

定理２．４．A，A' を X'の部分集合で $A \subset A'$とする．また，$\varphi \in L(X)$ で $\mathscr{D}_A^{(p)}(\varphi) \neq \emptyset$ とすると，

$$(\varphi_A^{(p)})_{A'} = \varphi_A^{(p)}.$$

X'の部分集合 A に対して，$L(A) = \{\varphi \in L(X); \mathscr{D}_A^{(p)}(\varphi) \neq \emptyset\}$ とおく．$L(A)$ から $\mathscr{D}$ への写像：$\varphi \mapsto \varphi_A^{(p)}$ は次の性質をもっている．

定理２．５．1) $\varphi \in L_A$で c を任意の実数とする．このとき，

(2.2) $$(c\varphi)_A^{(p)} = c\varphi_A^{(p)}.$$

2) $\varphi, \psi \in L_A$ が A 上で不等式 $\varphi \leqq \psi$ を満たすならば，X 上で不等式 $\varphi_A^{(p)} \leqq \psi_A^{(p)}$ が成立する．

3) 任意の$\varphi \in L_A$について次の不等式が成立する：

$$\min(0, \inf_A \varphi) \leqq \varphi_A^{(p)} \leqq \max(0, \sup_A \varphi). \tag{2.3}$$

§3. p-倉持関数 $\tilde{g}^{(p)}$

$a \in X'$とし，定理２．１の A として $\{a\}$，また，φ として 1 を考える．即ち，$1_{\{a\}}^{(p)} \in \mathscr{D}$ をつくる．明らかに，$1_{\{a\}}^{(p)}$ は定数ではないので $D_p(1_{\{a\}}^{(p)}) \neq 0$.

定義３．１．次の関数 $\tilde{g}_a^{(p)} = \tilde{g}^{(p)}(\,\cdot\,, a) \in \mathscr{D}$ を $a \in X'$ に極を持つ位数 p の倉持関数 (または，p-倉持関数) という:

$$\tilde{g}_a^{(p)} = \tilde{g}^{(p)}(\,\cdot\,, a) = [D_p(1_{\{a\}}^{(p)})]^{1/(1-p)} 1_{\{a\}}^{(p)}. \tag{3.1}$$

p-倉持関数に関する性質を述べる：

定理３．２．1) X' 上で $\tilde{g}_a^{(p)} \leqq \tilde{g}_a^{(p)}(a) = [D_p(1_{\{a\}}^{(p)})]^{1/(1-p)}$.

2) X'上で $\Delta_p \tilde{g}_a^{(p)} = -\varepsilon_a$，即ち，$\tilde{g}_a^{(p)}$は $X' - \{a\}$ で p-調和で X'で p-優調和．更に，a を含む X'の成分内で$\tilde{g}_a^{(p)} > 0$，それ以外の成分内では恒等的に 0 である．

3) 任意の $u \in \mathscr{D}$ に対して，

$$(\!(\phi_p(d\tilde{g}_a^{(p)}), du)\!) = u(a). \tag{3.2}$$

4) $p = 2$ のとき，$f \in L(X)$ の台 Sf が有限で $S_f \subset X'$ ならば

$$f(a) = -\sum\nolimits_{x \in X} \Delta_2 f(x) \tilde{g}_a^{(2)}(x). \tag{3.3}$$

5) $\sum_{x \in A_0} \Delta_p \tilde{g}_a^{(p)}(x) = 1$.

系３．３．$\tilde{g}_a^{(p)}(b) = (\!(\phi_p(d\tilde{g}_b^{(p)}), d\tilde{g}_a^{(p)})\!)$ $(a, b \in X')$.

$\tilde{g}_a^{(p)} \in \mathscr{D}$ なので X'の任意の部分集合 A に対して $(\tilde{g}_a^{(p)})_A$ を考えることができるがこれについては次のことが分かる：

定理３．４．$A \subset X'$で $a \in A$ ならば

$$(\tilde{g}_a^{(p)})_A(x) = \tilde{g}_a^{(p)}(x) \quad (x \in X')\ ;$$

$a \notin A$ ならば，A が有限集合のときは，

$$(\tilde{g}_a^{(p)})_A(x) \leqq \tilde{g}_a^{(p)}(x) \quad (x \in X').$$

この節の最後に A_0から $\{a\}$ へのフローの概念を用いて $\tilde{g}_a^{(p)}$ を特徴付けする．特別な無限ネットワークの場合には，この結果を用いて p-倉持関数を簡単に求めることができる．

$w \in L(Y)$ に対して，次のようにおく：

$$I(w; x) = \sum\nolimits_{y \in Y} K(x, y)w(y).$$

$w \in L(Y)$ が次式を満たすとき，$w \in L(Y)$ を A_0から $\{a\}$ へのフローという:

$$I(w) := -\sum\nolimits_{x \in A_0} I(w; x) = I(w; a);$$

$x \in X' - \{a\}$ に対しては

$$I(w; x) = 0.$$

$F(A_0, \{a\})$ で A_0から $\{a\}$ へのフロー全体の集合を表し，$F_q(A_0, \{a\})$ を $\{w \in F(A_0, \{a\}); Sw$は有限$\}$ のバナッハ空間 $L_q(Y; r) := \{w \in L(Y); H_q(w) < \infty\}$ における閉包とする．ここで，$L_q(Y; r)$ のノルムは $[H_q(\cdot)]^{1/q}$で定める．

2点 x，$x' \in X$に対して，x から x' へのパス P を $(C_X(P), C_Y(P), p)$ で表す．但し，Xの有限順序集合 $C_X(P) = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，$Y$の有限順序集合 $C_Y(P) = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n\}$ とパス指標と呼ばれる関数 $p \in L(Y)$ は次の条件を満たす：

$$x_0 = x, x_n = x', x_i \neq x_j \quad (i \neq j);$$

$$\{x \in X; K(x, y_i) \neq 0\} = \{x_{i-1}, x_i\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$p(y) = 0 \ (y \notin C_Y(P)), p(y_i) = -K(x_{i-1}, y_i) \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

次の極値問題を考える:

(3.4) $$e_a^{(q)} = \inf\{H(w); w \in F_q(A_0, \{a\}) \text{ かつ } I(w) = 1\}.$$

極値問題 (3.4) には最適解 $\hat{w}$ が唯1つ存在することが知られている（c. f. [7], p.107）．この解 $\hat{w}$ を用いて関数 $v_{x'} \in L(X)$ を次のようにおく：

$$v_{x'}(x') = 0 \ , \ v_{x'}(x) = \sum\nolimits_{y \in Y} r(y)p(y)\phi_q(\hat{w}(y)) \quad (x \neq x'),$$

但し，$p(y)$ は x' から x へのパス Pのパス指標である．この関数はパス P の取り方によらないことも分かっている．

定理３．５．$\tilde{g}_a^{(p)}$は次式で与えられる：

$$\tilde{g}_a^{(p)}(x) = \min\{|v_{x'}(x)|;\, x' \in A_0\}.$$

更に，

$$\tilde{g}_a^{(p)}(a) = e_a^{(q)}.$$

注意３．６．[3] の Examples 3.1，3.2，3.3 における無限ネットワーク上の p-倉持関数は線形の場合の [3] の倉持関数に一致する．今のところ，本質的に非線形である p-倉持関数の例は得ていない．

§4. p-倉持境界の定義

先ず，次のことを示す：

定理 ４．１．$\{\tilde{g}_a^{(p)}(x)\}_{a\in X'}$ は各 $x \in X'$ を固定するごとに有界である．

証明．$x \in X'$ はある $x_0 \in A_0$ と $y_0 \in Y$ で $K(x, y_0)K(x_0, y_0) = -1$ なる式を満たしているものとする．このとき，A_0上で $\Delta_p \tilde{g}_a^{(p)} \geqq 0$ なので，定理３．２，5) により

$1 \geqq \Delta_p \tilde{g}_a^{(p)}(x_0) = \sum_{y\in Y(x_0)} r(y)^{1-p}\phi_p(\tilde{g}_a^{(p)}(x_y) - \tilde{g}_a^{(p)}(x_0))$

$= \sum_{y\in Y(x_0)} r(y)^{1-p}\phi_p(\tilde{g}_a^{(p)}(x_y)) \geqq r(y_0)^{1-p}|\tilde{g}_a^{(p)}(x)|^{p-1}.$

ここで，x_y は x_0 と異なる y の端点である．このことから $\{\tilde{g}_a^{(p)}(x)\}_{a\in X'}$ が有界であることが分かる．故に命題１．１０により $\{\tilde{g}_a^{(p)}\}_{a\in X'}$ は x を含む成分で有界，従って，結論を得る．

以下では$\tilde{g}_a^{(p)}(x)$ の代わりに $\tilde{g}^{(p)}(x, a)$ を用いる．

X' 内の点列 $\{x_j\}$ が次のことを満たすとき，この点列は N の境界に収束するという：

X' の任意の有限部分集合 A に対して番号 j_0 が存在し，$j \geqq j_0$ となるようなすべての j に対して $x_j \notin A$ となる．

Nの境界に収束する $\{x_j\}$ に対して，定理４．１により $\{\tilde{g}^{(p)}(x, x_j)\}_j$ は各 $x \in X'$ について有界だから $\{\tilde{g}^{(p)}(\cdot, x_j)\}$ は収束する部分列をもつ．$\{\tilde{g}^{(p)}(\cdot, x_j)\}$ が収束するとき，$\{x_j\}$ は基本列であるといい，また，２つの基本列の極限関数が等しいとき，この２つの基本列は同値という．基本列全体の同値類の各を N の p-倉持境界点という．N の p-倉持境

界点の全体を N の p-倉持境界といい，$\partial_p N$ で表す．$x \in X$，$z \in \partial_p N$ で $\{x_j\}$ in X' を z を決定する基本列とするとき，$\tilde{g}^{(p)}(x, z) = \tilde{g}^{(p)}_z(x) = \lim_{j\to\infty} \tilde{g}^{(p)}(x, x_j)$ とおくがこの関数は基本列 $\{x_j\}$ の取り方によらない．明らかに，$x \in A_0$ のとき，$\tilde{g}^{(p)}(x, z) = 0$ となり，$\tilde{g}^{(p)}(\cdot, z)$ は X' で調和である．定理３．２，5) より，すべての $z \in \partial N$ に対して，$\sum_{x\in A_0} \Delta\tilde{g}^{(p)}(x, z) = 1$ となる．

線形の場合と同様にして，p-倉持関数を用いて$\widetilde{X} := X' \cup \partial_p N$に距離関数 $d^{(p)}$ 定義することができる：

$$d^{(p)}(x_1, x_2) := \sum_{x\in X'} \alpha(x) \frac{|\tilde{g}^{(p)}(x, x_1) - \tilde{g}^{(p)}(x, x_2)|}{1 + |\tilde{g}^{(p)}(x, x_1) - \tilde{g}^{(p)}(x, x_2)|} \quad (x_1, x_2 \in \widetilde{X}). \tag{4.1}$$

ここに，$\alpha(x) \in L^+(X')$ は正の値をとり，$\sum_{x\in X'} \alpha(x) < \infty$ を満たすものである．

この距離関数により定まる位相で $\widetilde{X}$ はコンパクト位相空間となり，X' 上ではもとの離散位相に一致することが分かる．

参考文献

[1] T. Kayano and M. Yamasaki: Boundary limit of discrete Dirichlet potentials, Hiroshima Math. J., **14**(1984), 401–406.

[2] F-M. Maeda: Non-linear classification of infinite networks, Manuscript(1976), 1-27.

[3] A. Murakami: Kuramochi boundaries of infinite networks and extremal problems, Hiroshima Math. J., **24**(1994), 243–256.

[4] A. Murakami and M. Yamasaki: Extremal problems with respect to ideal boundary components of an infinite network, Hiroshima Math. J., **19**(1989), 77–87.

[5] A. Murakami and M. Yamasaki: Nonlinear potentials on an infinite network, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. **26**(1992), 15–28.

[6] A. Murakami and M. Yamasaki: An introduction of Kuramochi boundary of an infinite network, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Series B: Mathematical Science **30**(1997), 57–89.

[7] T. Nakamura and M. Yamasaki: Generalized extremal length of an infinite network, Hiroshima Math. J., **6**(1976), 95–111.

[8] M. Ohtsuka: An elementary introduction of Kuramochi boundary, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I Math., **28**(1964), 271–299.

[9] H. Tanaka: Kuramochi boundaries of Riemannian manifolds, in Potential Theory (ed. by M.Kishi), 321–329. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992

[10] M. Yamasaki: Extremum problems on an infinite network, Hiroshima Math. J., **5**(1975), 223–250.

[11] M. Yamasaki: Discrete potentials on an infinite network, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., **13**(1979), 31–44.

[12] M. Yamasaki: Ideal boundary limit of discrete Dirichlet functions, Hiroshima Math. J., **16**(1986), 353–360.