数理解析研究所講究録
1017巻 1997年 1-23

位相群の帰納的極限の群位相とユニタリ表現

辰馬伸彦

位相群の代数的帰納的極限に群位相を定義する事を考える. 一般の位相空間の帰納的極限についての位相の定義は岩波数学辞典 第2版 404頁, 第3版 203頁にあるが, この位相では同記載の記述に反して極限群は一般には位相群にはならない.

小文では帰納的極限群が位相群になる定義を考察し, 続いて帰納的極限群のユニタリ表現をつくる事を考える.

§1 帰納的極限の定義

定義1-1 $A \equiv \{\alpha\}$ を順序 "$<$" によるネット, $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を A にのる位相群の族で, 含む含まれるの関係での順序を入れる.

① $\alpha, \beta \in A \Rightarrow \alpha, \beta < \gamma$ となる $\exists \gamma \in A$,

② $\alpha < \beta \Rightarrow G_\alpha \subset G_\beta$ (群構造と位相も含めて).

この時, 代数的な群の帰納的極限 $G \equiv \lim_\alpha G_\alpha$ は,

③ $G \equiv \cup_\alpha G_\alpha$ (和集合),

④ $g_\alpha \in G_\alpha (\subset G)$, $g_\beta \in G_\beta (\subset G)$ $(\alpha, \beta < \gamma)$ の積は

$g_\alpha g_\beta \in G_\gamma$ $(\subset G)$ (群構造), で定義する. ▮

以下 $\lim_\alpha G_\alpha$ で $\cup_\alpha G_\alpha$ に上記の群構造を入れたものを示す. この G に位相を入れ, 位相群とする事を考える. ここで位相空間としての帰納的極限位相の定義を述べておく.

定義1-2 $U (\subset G)$:open $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in A$ $U \cap G_\alpha$:open in G_α.

§2 定義1-2 の位相が群位相を与えない例

定義1-2 の位相では，帰納的極限 G が位相群にならない，つまり群の積演算が連続にならない例をあげる．

例 $G(1)\equiv \mathbf{Q}$(有理数全体)，$G(j)\equiv \mathbf{R}$(実数全体)$(j=2,3,\cdots)$ を通常の位相の加法群，$G_j\equiv \Pi_{k=1}{}^{j}G(k)$ とする．G_jをG_{j+1} に埋め込み，j の通常順序で，定義1-1の代数的な帰納的極限をつくると $G=\lim_j G_j=\Pi'_k{}^{\infty}G(k)$ （制限直積） が得られる．これに定義1-2 の位相を入れて考えよう．以下 座標表示して

$G\ni x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots)$ $(x_k\in G(k))$ と書く．

$(G\supset)\ U\equiv\{x\mid |x_j|<|\cos(jx_1)|\ (j=2,3,\cdots)\}$

$=\cap_{j=2}{}^{\infty}\{x\mid -|\cos(jx_1)|<x_j<|\cos(jx_1)|\}\ (\ni e)$

を考える． $\cos(jx_1)=0$ とすると，x_1 は無理数でなくてはならないが，$G(1)\equiv \mathbf{Q}$ だからこの様な点は G にない．つまり G 従って U では常に $|\cos(jx_1)|\neq 0$ である．$\forall n$ で $U\cap G_n=\cap_{j=2}{}^{n}\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,\cdots)\mid -|\cos(jx_1)|<x_j<|\cos(jx_1)|\}$ は G_n の中で開集合，即ち定義1-2 によれば U は G の e の開近傍である．

一方 G が位相群なら，e の開近傍 V が有り $V^2\subset U$ となる．V が e の開近傍なら，$\forall j$ $V(j)\equiv V\cap G(j)$ は $G(j)$ 中の 0 の開近傍で，$\exists\varepsilon_j>0$ で $(-\varepsilon_j,\varepsilon_j)\subset V(j)$.

$(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)\times(-\varepsilon_j,\varepsilon_j)\subset V(1)\times V(j)\subset V^2\cap(G(1)\times G(j))\subset$
$U\cap(G(1)\times G(j))=\{(x_1,0,\cdot,0,x_j,0,\cdots)\mid |x_j|<|\cos(jx_1)|\}$.

これは $2j\varepsilon_1>\pi$ となる j では成り立たない． ∎

§3 $G=\lim_\alpha G_\alpha$ の群位相

帰納的極限が位相群となる様な位相は何か？ を考える．ただ

し，既に与えられた G_α の位相との整合性を考慮すると，最低，次の条件を加える事が自然であると思われる．

前提3-1 $\forall \alpha \in A$ で $G_\alpha \rightarrow G$ の埋め込みが連続である．▮

この条件は，開集合の性質として言い直すと

前提3-2 $U(\subset G)$:open $\Rightarrow \forall \alpha \in A$ $U \cap G_\alpha$:open in G_α.

定義1-2 と比較して見ると "⇔" が "⇒" に替わったものである事が判る．以下この前提の下に考察を続ける．ここでよく知られた，一般の群 G上に，群位相を与える単位元の基本近傍系についての必要十分条件を復習しておく．

命題3-3 G の部分集合の族 $\mathfrak{U} \equiv \{U_\alpha\}_\alpha$ が，G のある群位相に対応する単位元 e の基本近傍系を与える為には，次の (1)-(5) を満たす事が必要十分である．

(1) $\forall U \in \mathfrak{U}$ について　$U \ni e$,

(2) $\forall U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ で $V \subset U_1 \cap U_2$ となる $V \in \mathfrak{U}$ がある，

(3) $\forall U \in \mathfrak{U}$ で $V^{-1} \subset U$ となる $V \in \mathfrak{U}$ がある，

(4) $\forall U \in \mathfrak{U}$ で $V^2 \subset U$ となる $V \in \mathfrak{U}$ がある，

(5) $\forall g \in G, \forall U \in \mathfrak{U}$ で $V \subset gUg^{-1}$ なる $V \in \mathfrak{U}$ がある．▮

G の部分集合の任意の族 $\mathfrak{A} \equiv \{ A \ni e, \subset G \}$ より出発し次の操作を繰り返し行って，族を大きくする．

(a) 任意の２元 U_1, U_2 に対して $U_1 \cap U_2$ をつけ加える，

(b) 任意の元 U に対して U^{-1} をつけ加える，

(c) 任意の元 Uと $\forall g \in G$ に対し gUg^{-1} をつけ加える．▮

こうして出来た族は，命題3-3の (1)-(3)(5)を満たす事は明らかである．だが(4)の条件だけは，最初の族 $\mathfrak{A}$ が次を満たし

ていない場合，必ずしもこの様な手順で付与する事は出来ない．

条件3-4 $\forall A \in \mathfrak{A}$で $B^2 \subset A$ となる$B \in \mathfrak{A}$が存在する．▮

しかし逆に条件3-4 を満たす族 $\mathfrak{A} \equiv \{ A \ni e, \subset G \}$ が与えられた時，$\mathfrak{A}$ から上記の (a)-(c) の操作を繰り返し，G を位相群とする単位元の基本近傍系 $\mathfrak{U} \equiv \{U_\alpha\}_\alpha$ を作る事が出来る．

定義3-5 条件3-4 を満たす集合族 $\mathfrak{A}$ を，G の対応する位相の "**種近傍系**"と呼ぶ．▮

明らかに基本近傍系 $\mathfrak{U} \equiv \{U_\alpha\}_\alpha$自身は種近傍系の 1 つである．

上により，G へ群位相の導入は，条件3-4を満たす種近傍系 $\mathfrak{A}$ を与える事と同値なので，以下この $\mathfrak{A}$ について考察する．

命題3-6 $G = \lim_\alpha G_\alpha$ に対し， 次の (1)-(3) を満たす部分集合の族 $\mathfrak{B} \equiv \{V(\alpha, j)\}_j$ が存在したとする．

(1) $\forall \alpha$ で $V(\alpha, j)(j=1,2,3,\cdots)$は G_α の中の e の近傍，

(2) $\forall \alpha < \beta \Rightarrow V(\alpha, j) \subset V(\beta, j)$ $(j=1,2,3,\cdots)$，

(3) $\forall \alpha, \beta, j \Rightarrow \exists \gamma$ s.t. $V(\alpha, j+1) \cdot V(\beta, j+1) \subset V(\gamma, j)$．

$\mathfrak{A} \equiv \{U_j \equiv \cup_\alpha V(\alpha, j)\}_j$ は G の群位相の種近傍系を与える．

証明 条件 (1)-(3) により計算すれば

$$(U_{j+1})^2 \equiv (\cup_\alpha V(\alpha, j+1))(\cup_\beta V(\beta, j+1)) =$$

$$= \cup_{\alpha\beta} V(\alpha, j+1) V(\beta, j+1) \subset (\cup_\gamma V(\gamma, j)) = U_j.$$

これは $\mathfrak{A}$ についての条件3-4を示している．▮

上記の部分集合の族 $\mathfrak{B}$ より上の手順に従って生成した G 上の群位相を $\tau(\mathfrak{B})$ と書く事とする．命題3-6で作った種近傍系は，実は G 上の群位相について一般的なものである．

命題3-7 $G = \lim_\alpha G_\alpha$ 上で前提3-1を満たす群位相 τがあっ

たとする．この時命題3-6 (1)-(3)を満たす集合族 $\mathfrak{B}$ があり，τ は $\mathfrak{B}$ を走らせた時対応する位相 $\tau(\mathfrak{B})$ 達の上限に等しい．

証明 群位相では，e の任意の τ-近傍 U で，τ-近傍の列 $\{V_j\}_j$ を取り，① $V_1 \equiv U$， ② V_j は e の τ-近傍，③ $(V_{j+1})^2 \subset V_j$ (j=1,2,3,•••)，と出来る．

$\forall \alpha \in A$ で $V(\alpha,j) \equiv V_j \cap G_\alpha$ と置くと $V_j = \cup_\alpha V(\alpha,j)$ となる．$(V(\alpha,j+1))^2 \subset V(\alpha,j)$ だから命題3-6の条件 (1)-(3) は明らか．$U = V_1$ は $\mathfrak{B} \equiv \{V(\alpha,j)\}$ に対応する群位相 $\tau(\mathfrak{B})$ の e の近傍で，$\{V_j\}_j$ は $\tau(\mathfrak{B})$ の種近傍系となる．e の任意の τ-近傍 Uを走り τ は $\tau(\mathfrak{B})$達の上限となる．∎

系 $G = \lim_\alpha G_\alpha$ に予め群位相 τ があるとし，各 G_α に τ の制限位相を入れる．この時命題3-7 の証明の方法で G_α より作った G の位相は元の τ と一致する．

証明 $U(\alpha) \equiv U \cap G_\alpha$ で $U_j = \cup_\alpha U(\alpha)$ だから τ の制限位相が又 G_α 上の群位相を与える事に注意すれば，後は命題3-7の証明のままで示される． ∎

§4 筍型近傍

命題3-6，3-7 は $G = \lim_\alpha G_\alpha$ に群位相が入る為の，1つの必要十分条件だが，実際に与えられた位相群の族 $\{G_\alpha\}_\alpha$ から作った帰納的極限に群位相を入れる目的には使えない．

以下特に非可換群の場合を考える為に次の条件を考える．

定義4-1 対称集合 $E(\subset G = \lim_\alpha G_\alpha)$(即ち $E = (E)^{-1}$)が PTA(Passing through assumption)集合であるとは，$\forall \alpha$ で，G_α の e の任意の近傍 W_α に対して，$W_\alpha{}^0 E \subset E W_\alpha$ とな

る G_α の e の近傍 $W_\alpha{}^0$ が存在する事を言う.

$G = \lim_\alpha G_\alpha$ が PTA-群 とは, 任意の $\alpha \in A$ で, PTA-集合からなる G_α の e の基本近傍系が存在する事を言う. PTA-集合である e の近傍 $V_\alpha (\subset G_\alpha)$ を G_α の PTA-近傍と呼ぶ. ▮

E の対称性と上の条件で $\exists W'_\alpha{}^0 \quad EW'_\alpha{}^0 \subset W_\alpha E$ も出る.

例えば次の場合 $\lim_\alpha G_\alpha$ は PTA-群である事は容易に判る.

(＊) $\forall \beta > \alpha$ で G_α が G_β の中心部分群と局所コンパクト部分群の直積.

以下 $G = \lim_\alpha G_\alpha$ は PTA-群 であるとする.

補題4-2 $\beta > \alpha$ で V_α を G_α の PTA-近傍, V_β を G_β の PTA-近傍とすれば, $V_\beta V_\alpha V_\alpha V_\beta$ は G_β の PTA -近傍 である.

証明 $\gamma > \beta > \alpha$ に対して, $W_\gamma \subset G_\gamma$ について (PTA) を V_β, V_α に対して繰り返し使えばよい. ▮

[可算族, 筍型(Bamboo-Shoot / BS)近傍]

ネットAが可算集合とする. 即ち $G = \lim_j G_j (\#\{G_j\} = \aleph_0)$.

(単調増大の場合) 先ずここで ネットが整列集合で,

$G_j \subset G_{j+1} \ (j = 1,2,3,\cdots)$ となる場合とする.

定義4-3 各 G_j の単位元 e の対称近傍 U_j に対し,

$U(n,k) \equiv U_n U_{n-1} \cdots U_{k+1} U_k U_k U_{k+1} \cdots U_n \ (n \geqq k)$, で

$$U[k] \equiv \cup_{n=k}{}^{\infty} U(n,k)$$

を, G の e の筍型(Bamboo-Shoot/ BS)近傍と言う

$\mathfrak{U} \equiv \{U[k] \mid \{U_j\}_j,\ k = 1,2,3,\cdots,\ U_j$ は G_j の e の対称近傍を走る$\}$ と書く.

命題4-4 $\mathfrak{U}$ は G の群位相を与える e の基本近傍系である.

証明　明らかに　$n \leqq m \Rightarrow U[n] \supset U[m]$, $U(n,k) \subset U(m,k)$.

基本近傍系となる条件 (1)-(5) を見る．先ず (1) $U[n] \ni e$, (3) $(U[n])^{-1} = U[n] \in \mathfrak{U}$,　　は作り方から明らかである．

(2) は　$k \geqq n,m$　で　$W_j \equiv U_j \cap V_j$ ($j \geqq k$) と置くと $W[k] \subset U[k] \cap V[k] \subset U[n] \cap V[m]$ となるから良い．

(5) は $\forall g \in G_m (\subset G), \forall k \geqq n,m$ に対し $V_k \equiv g U_k g^{-1}$ と取ると　$V[k] = gU[k]g^{-1} \subset gU[n]g^{-1}$　で　OK.

(4) は $\forall U[k], j$ $(W_j)^2 \subset U_j$ なる G_j の e の 対称近傍 W_jを，更に $V_1 \subset W_1$の G_1の(PTA)-近傍 $V_1 = V(1,1)$を取る．

以下 n に関する帰納法で $(V(n,k))^2 \subset U(n,k)$ と作る．もし $\forall k \leqq n$ でOKなら，$V(n,k)$ は G_n の(PTA)-近傍で $\exists V_{n+1} (\subset W_{n+1})$((PTA)-近傍) s.t. $\forall k \leqq n$ $V(n,k)V_{n+1} \subset W_{n+1}V(n,k)$ & $V(n,k)W_{n+1} \supset V_{n+1}V(n,k)$　となるから，

$(V(n+1,k))^2 = (V_{n+1}V(n,k)V_{n+1})(V_{n+1}V(n,k)V_{n+1}) \subset$

$\subset W_{n+1}W_{n+1}V(n,k)V(n,k)W_{n+1}W_{n+1} \subset U_{n+1}U(n,k)U_{n+1} =$

$= U(n+1,k)$.　∴　$(V[k])^2 = \cup_{n,m=k}{}^{\infty} V(n,k)V(m,k) \subset$

$\subset \cup_{n,m=k}{}^{\infty} (V(\max(n,m),k)^2 = \cup_{n=k}{}^{\infty}(V(n,k))^2 \subset$

$\subset \cup_{n=k}{}^{\infty} U(n,k) = U[k]$, となるから証明される．　▮

定義4-5 命題4-4 の群位相を **筍型位相(BS-topology)** と呼び，G に筍型位相を入れた位相群を $G = \text{BS-}\lim_j G_j$ と書く．

[単調でない場合] $G = \lim_j G_j$ ($\#\{G_j\} = \aleph_0$) だが単調でない場合を考える．ネットAで次々に以下の様に取る．$G_{n(1)} = G_1, G_{n(2)} \supset G_{n(1)} \cup G_2, \cdots, G_{n(j)} \supset G_{n(j-1)} \cup G_j, \cdots$.

これで $\lim_j G_{n(j)} = \lim_j G_j = G$ だから単調の時の結果が使

えて筍型位相を $G=\lim_j G_{n(j)}$ の中に入れる事が出来る．

☆ BS-近傍 $U[k]\equiv \bigcup_{n=k}^{\infty} U(n,k)$

$(U(n,k)\equiv U_n U_{n-1}\cdots U_{k+1} U_k U_k U_{k+1}\cdots U_n\ (n\geq k))$

で，n,k の走る範囲は，必ずしも N での可能範囲全体でなくても，後で述べる様な，可能範囲と "共終" である集合だけでも，同じ位相を定義する事を注意して置く．例えば有限個の欠落が有っても，結果として得られる位相群は同型である．　」

ここで一般の群位相の中で，上記の筍型位相がどの様な位置を占めるかを考えて見よう．

命題4-6 $G=\lim_j G_j$ 上の前提3-2 を満たす任意の群位相 σ は筍型位相より弱い．

証明 e の任意の σ-近傍 U に対し，e の σ-対称近傍 V_1 を $(V_1)^4\subset U$ と取る．更に帰納的に次々と e の σ-対称近傍 V_{j+1} を，$(V_{j+1})^2\subset V_j$ と取る．$U\supset (V_1)^4\supset$ $\supset (V_2)^2 V_1 V_1 (V_2)^2\supset (V_3)^2 V_2 V_1 V_1 V_2 (V V_3)^2\supset\cdots$ だから，$W_n\equiv V_n\cap G_n$ と置くと，定義から U は筍型近傍 W[1] を含み，従って e の (BS)-近傍でもある．　▮

命題4-7 $G=\lim_j G_j$ で全ての G_j が局所コンパクト群なら，定義1-2 の位相(σと書く)は筍型位相 (τと書く)と同値である．

証明 前提3-2 を満たす位相は，定義1-2を満たす位相より弱いから，$\sigma\succ\tau$は明らか．従って，逆の $\sigma\prec\tau$ を示せばよい．

任意の e の σ-開近傍 U について，$\forall n\ U_n\equiv U\cap G_n(\ni e)$ は G_n の中で開集合である．G_1 の中の e の相対コンパクト開対称近傍 W_1 を $\overline{W_1{}^2}$ (閉包) $\subset W_1{}^3\subset U_1(\subset U_2)$と取

る．$\overline{W_1{}^2}$ はコンパクトだから，G_2 の中の e の相対コンパクト開対称近傍 W_2 を $\overline{W_2W_1{}^2W_2} \subset U_2$ ($\subset U_3$)と取れる．

繰り返して，G_jの中の e の相対コンパクト開対称近傍 W_j を，$W_jW_{j-1}\cdots W_2W_1{}^2W_2\cdots W_{j-1}W_j \subset U_n$ と取る．即ち，最初に与えた $U=\cup_n U_n$は筍型近傍 $W[1]$を含む． ∎

系 $G=\lim_j G_j$ で全ての G_j が局所コンパクト群なら，定義1-2 で与えた位相は G の群位相を与える． ∎

ここでよく知られている次の事実を確認する．

命題4-8 $G=\text{BS-}\lim_j G_j, \#\{G_j\}=\aleph_0$ で，各 G_j は G_{j+1} の閉部分群とする．この時可算基 $\{F_k\}_k$ をもつ任意の収束フィルター $\mathfrak{F}$ について，$\exists n, \exists F\in\mathfrak{F}$ s.t. $F\subset G_n$ となる．

証明 前の注意から $\forall j\ G_j\subset G_{j+1}$ (即ち$\{G_j\}$：単調増大)，$\forall k\ \ F_{k+1}\subset F_k$ ($\{F_k\}_k$:単調減少) と仮定してよい．さらに，$g_0(\in G_m)\equiv\lim_k F_k$ と置くと，$(g_0)^{-1}F_k\to e$ だから，$(g_0)^{-1}F_k$ を新しい F_k だと思い $\lim\mathfrak{F}\equiv\lim_k F_k=e$ としてよい．

上の様な n が存在しない，即ち $\forall k\ \forall j$ で $F_j\not\subset G_k$とすると，” Gの e の BS-近傍 $V^{\sim}$があり $\forall k\ \ F_k\not\subset V^{\sim}$ ”を示す．

(1) $\forall k\ F_{k+1}\not\subset G_k$より，各 k に対し $g_{k+1}\in F_{k+1}-G_k$ を取り，点列 $\{g_k\}$ を固定する．($G_0\equiv\{e\}$)

(2) G_1 の e の開近傍 V_1 で $g_1\notin(V_1)^2$ なるものを取る．

(3) 続いて G_2の e の開近傍 V_2で $(V_2)^2\cap G_1\subset V_1$，かつ $g_2\notin V_1(V_2)^2$となるものを取る．($g_2\notin G_1$ より $V_1(V_2)^2\subset G_1(V_2)^2$ を $G_1\backslash G_2$ に写像して考えるとよい) すると $V_1(V_2)^2\cap G_1\subset(V_1)^2$ となり (2) より $g_1\notin V_1(V_2)^2$．

(4) n に関する帰納法で, V_n まで作ったとして, G_{n+1}の e の開近傍 V_{n+1}を $(V_{n+1})^2 \cap G_n \subset V_n$ かつ $g_{n+1} \notin V_1 V_2 \cdots V_n (V_{n+1})^2$となる様にとる. (同様 $g_{n+1} \notin G_n$ と $V_1 V_2 \cdots V_n (V_{n+1})^2 \subset G_n (V_{n+1})^2$ より $G_n \setminus G_{n+1}$ に写して考えるとよい) このとき $\forall j \leqq n$ で $g_n \notin V_1 V_2 \cdots V_{j-1} (V_j)^2 \subset G_j$ であり, 又 $\forall j > n$ で $V_1 V_2 \cdots V_{j-1} (V_j)^2 \cap G_n = V_1 V_2 \cdots V_{j-1} (V_j)^2 \cap G_{j-1} \cap G_n \subset V_1 V_2 \cdots V_{j-2} (V_{j-1})^2 \cap G_n \cdots \subset V_1 V_2 \cdots V_{n-1} (V_n)^2$ で $g_n \notin V_1 V_2 \cdots V_{j-1} (V_j)^2$. まとめて $\forall j, \forall n \ g_n \notin V_1 V_2 \cdots V_n (V_{n+1})^2$. 即ち $\{g_k\}_k \cap V^{\sim} = \emptyset$. $g_k \in F_k$ より, $\forall k \ F_k \not\subset V^{\sim}$ となる.

一方 $V^{\sim} \equiv \cup_n V_1 V_2 \cdots V_n$ は筍型位相による G の e の開近傍だから, これは $\lim \mathfrak{F} = \lim_k F_k = e$ に矛盾する. ■

補題4-9 $G =$ BS-$\lim_j G_j$ で, $\forall j \ G_j$ が G_{j+1} の閉部分群であるなら, $\forall j \ G_j$ は G の閉部分群である.

証明 $\forall g \in G - G_j$で, $g \notin U[j+1]$ となる BS-近傍 $U[j+1] \equiv \cup_{n=j+1}{}^{\infty} U(n, j+1)$ ($U(n, j+1) \equiv U_n U_{n-1} \cdots U_{j+1} U_{j+1} \cdots U_n$ ($n \geqq j+1$)) の存在を示せばよい. それには G_jが G_{j+1}の閉部分群である事から $g \notin (U_{j+1})^4$となる G_{j+1}の e の開近傍 U_{j+1} を取り, 以下 n に関して帰納的に $g \notin (U_n)^2 U_{n-1} \cdots U_{j+1} U_{j+1} \cdots U_{n-1} (U_n)^2$ となるように G_n の e の近傍 U_n を取り, $U(n, j+1) \equiv U_n U_{n-1} \cdots U_{j+1} U_{j+1} \cdots U_n$ から $U[j+1]$ を作ればよい. ■

補題4-10 $G =$ BS-$\lim_j G_j =$ BS-$\lim_j \overline{G_j}$. (但し閉包は $G_j \subset$ BS-$\lim_j G_j$ と見なしたものとし, $\overline{G_j}$ の位相はそ

の制限とする．）

証明　位相群の部分群の閉包は又部分群だから，代数的に $G = \lim_J \overline{G_J}$ は明らか．位相は命題3-7系によりでる．　∎

§5　拡大筍型位相

$G = \lim_J G_J$ の位相として，定義1-2で与えられる位相は，必ずしも群位相とならない事を先に示したが，これはこの定義による開集合が，或る意味で多すぎる事に起因する．しかし群位相を与える筍型位相でも，開集合の数は可なり多く，単に群位相を与える為だけなら，もっと弱い位相で十分である．実際，無限次元位相線型空間（加法群）の弱位相に見られる様に，代数的には帰納的極限の形をとる位相群でも，筍型位相より遥かに弱い位相を持つものが有り，例えばユニタリ表現の逆像として入る群位相は，その一つと考えられる．そう言った意味で，筍型位相より弱い群位相を構成する事を考える．

$G = \lim_J G_J$（可算極限）は PTA-群 とする．

定義 5-1 $G = \lim_J G_J$ の部分群 H に，群位相が入って居るとする．この時，H が G の **PTA-部分群**であるとは，H が PTA-集合よりなる e の基本近傍系を持つ事を言う．　」

PTA-部分群 H の e の PTA-集合(定義により対称になる)基本近傍系を $\mathfrak{Y} \equiv \{Y_\alpha\}_\alpha$ とする．特に §3 の議論より，

$$\forall Y_\alpha\ \exists Y_\beta \quad s.t. \quad (Y_\beta)^2 \subset Y_\alpha .$$

定義 5-2 各 G_J の単位元 e の対称近傍 U_J に対し，

$$U(\alpha,n,k) \equiv U_n U_{n-1} \cdots U_{k+1} U_k Y_\alpha U_k U_{k+1} \cdots U_n \quad (n \geqq k),$$

$$U[\alpha,k] \equiv \cup_{n=k}^{\infty} U(\alpha,n,k)$$

を，G の e の拡大筍型(Generalized Bamboo-Shoot/ GBS)近傍と言い

$\mathfrak{U}^{\sim} \equiv \{U[\alpha, k] \mid \{Y_\alpha\}_\alpha, \{U_j\}_j,\ k=1,2,3,\cdots,\ U_j$ は G_j の e の対称近傍を走る$\}$

と書く．

命題5-3 $\mathfrak{U}^{\sim}$ は上の群位相を与える e の基本近傍系であり，この位相について，埋め込み H → G は連続である．

証明 基本近傍系を与える事は，命題4-4 の証明で U_1, V_1 の替わりに，Y_α 等を代入した議論で示される．

H → G が連続であることは，$\forall Y_\alpha \subset U[\alpha, k] \cap H$ より明らかである． ∎

§6　非可算系の場合

M をネット N の部分ネットとする．順序を ”<” とする．

以下の定義を復習する．

(1) M が全順序集合とは $\forall a, b \in M$ で $a \leqq b$ or $a > b$,

(2) M が整列集合とは $\forall S \subset M$ で S 中に ∃最小元 ,

(3) M が N で共終とは $\forall a \in N$ で $M \cap \{x \mid x \geqq a\} \neq \emptyset$.

命題6-1 全順序集合 Mで，共終の整列部分ネット M_0がある．

証明 M の整列部分集合 M_α の全体の集合 Ψ に，M_β が M_α の後ろに整列集合を付けた形の時 $M_\alpha < M_\beta$ とする順序 ”<” 入れる．この順序に関する単調増大部分集合 $\{M_\alpha\}(\subset \Psi)$ で $\cup_\alpha M_\alpha \in \Psi$ だから Ψ は帰納的集合で，極大元 M_0 をもつ．

M_0 は M と共終である．そうでなければ，$\exists a \in M$ で $M_0 \cap \{x \mid x \geqq a\} = \emptyset$．M は全順序集合だから，$\forall m \in M_0$ で $a \leqq m$

or $a>m$ だが取り方より $a>\forall m$. 従って $M_0\cup\{a\}$ は，Ψ 中で M_0 より大きい元となり，M_0 の極大性に反する． ∎

系1 上で $\{G_\alpha\}_{\alpha\in M}$ に対して $\lim_{\alpha\in M}G_\alpha = \lim_{\alpha\in M_0}G_\alpha$.

定義6-2 ネット N が魚骨型とは，N と共終の全順序部分ネット M がある事を言う．M を N の **背骨** と言う．

系2 魚骨型ネット N の上の位相群の系 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in N}$ に対し，N の整列背骨部分集合 M があり $\lim_{\alpha\in N}G_\alpha=\lim_{\alpha\in M}G_\alpha$. ∎

系１，２ 共に先の議論の総合として，殆ど明らかである．

定義6-3 整列集合 M の元 α に対して次の記号を定義する．

$\alpha_+\equiv\mathrm{Min}(\beta\in M\mid\beta>\alpha)$, $\alpha_-\equiv[\beta\in M\mid\alpha=\beta_+$(存在の時)$]$,

$M_+\equiv\{\alpha\in M\mid\alpha_-$が不存在$\}$, $M_-\equiv\{\alpha\in M\mid\forall\beta\in M_+\ \ \beta<\alpha\}$.

補題6-4 (1) M_+, M_- は 整列集合である． (2) $\# M_-\leqq\aleph_0$,

(3) $M_+\cup M_-$ は M と共終である．

証明 (1) 整列集合の部分集合，M_+, M_- は整列集合である．

(2) $\# M_->\aleph_0$とする．M_-の最小元から続いた増大可算列 $M_0\equiv\{m_j\}_j$ を取る．当然 $M_0\neq M_-$. $\gamma\equiv\mathrm{Min}(\beta\in M_-\mid\beta>M_0)$ には γ_- が存在しない．何故ならもし γ_- があれば，γ の定義から $\gamma_-(=\exists m_j)\in M_0$ で，$\gamma=m_{j+1}\in M_0$ となり，定義に反する．γ_- 不存在で，$\gamma\in M_+\cap M_-=\emptyset$ で矛盾である．

(3) $M_-\neq\emptyset$ なら，M_- は M のある点から後ろを全て含み，M と共終である．$M_-=\emptyset$ なら，M_+ より大きい M の元がないから，M_+ は M と共終．合わせて (3) が出る． ∎

ここで，次の場合が考えられる．

［場合1］ $M_-\neq\emptyset$.（お頭付魚骨型）

この時は，(2),(3)より　$G = \lim_{\alpha\in N} G_\alpha = \lim_{\alpha\in M} G_\alpha =$
$= \lim_{\alpha\in M_-} G_\alpha$　として群位相を決める事が出来る．

［場合2］ $M_- = \emptyset$.

この時は更に $(M_+)_+ \equiv \{\alpha \in M_+ \mid \exists\alpha_- \text{ in } M_+\}$,
$(M_+)_- \equiv \{\alpha \in M_+ \mid \forall\beta \in (M_+)_+ \ \ \beta < \alpha\}$　を考える．

［2-A］ $(M_+)_- \neq \emptyset$ の時，$\lim_{\alpha\in N} G_\alpha = \lim_{\alpha\in (M+)_-} G_\alpha$.

［2-B］ $(M_+)_- = \emptyset$ で次々 $M_{++\cdot\cdot+}$, $M_{++\cdot\cdot+-}$ etc を作る．
もし∃ $M_{++\cdot\cdot+-}(\neq\emptyset)$ なら $\lim_{\alpha\in N} G_\alpha = \lim_{\alpha\in (M++..+)_-} G_\alpha$
として群位相が入る．(仮想お頭付魚骨型)

何時までたっても non-$\emptyset$ の $M_{++\cdot\cdot+-}$ が無ければこの方法で群位相を入れる事を諦める．

§7 帰納的極限群のユニタリ表現

一般の帰納的極限にユニタリ表現を作るのは，手がかりが少なくて，困難である．そこでここでは次の条件の下で考える．

$G = \lim_j G_j (\#\{G_j\} = \aleph_0$, G_j：局所コンパクト群，単調増大)

この時命題4-7系で，G 上での定義1-2の位相は群位相である．
又，G_jの e の相対コンパクト対称近傍は全て PTA-近傍である．

問題　G のユニタリ表現を十分沢山作れ．

(十分沢山とは ”G の相異なる任意の２点を分離する” とする)

ここでユニタリ表現の作成法として，e の∀近傍 O に対し台がO に入る連続正定符号函数を作れば，目的は達成される．

一般の O では扱い難いので，少し縮めて，次の様にする．

先ず　$O_j \equiv O \cap G_j$ と置き，G_j の e の相対コンパクト開対称近傍 U_j を帰納的に次の様に作る

(1)　$(U_1)^4 \subset O_1$.

(2)　$(U_{j+1})^2 \cap G_j \subset U_j$.

(3)　$\tilde{U}_j \equiv U_j \tilde{U}_{j-1} = U_j U_{j-1} \cdots U_1$ と書いて,

$$U_j \tilde{U}_j (\tilde{U}_j)^{-1} U_j \subset O_j .$$

以下 O に替わって, $\{U_j\}$ を使う事とする.

$\forall j \geqq k$ $U_j \tilde{U}_j (\tilde{U}_j)^{-1} U_j \cap G_k \subset U_k \tilde{U}_k (\tilde{U}_k)^{-1} U_k$ は明か.

次の記号を入れる.

① $C_0^{+s}(G_j) \equiv \{ \varphi \mid G_j \to \mathbb{R}^+$, 台がコンパクトの

対称(i.e. $\varphi(g) = \varphi(g^{-1})$) 連続函数 $\}$.

② μ_j: G_j上の右Haar測度　(正規化は後に行う).

Δ_j: μ_jのモジュラー函数i.e. $d\mu_j(g^{-1}) = \Delta_j(g) d\mu_j(g)$.

[次の略記を行う] $d\mu_j(g) \equiv d_j g$,

$$\int_{G_j} \varphi(g) d_j g \equiv \int_j \varphi(g) d_j g \text{ (又は } \int \varphi(g) d_j g) .$$

$p_j \equiv \max(\ \mu_k(U_k \tilde{U}_k (\tilde{U}_k)^{-1} U_k)\ (\ j \geqq k\ ),\ 1)$ と置く.

G上の函数 φ, φ_1, φ_2 について

$\| \varphi \mid_{G_j} \|_q$($G_j$上の q-norm) $= {}_j\| \varphi \|_q$,

$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_j \equiv \int_j \varphi_1(g) \overline{\varphi_2}(g)\, d_j g$　　等と書く.

③ $\varphi_j \in C_0(G_j)$ に対して,

$\varphi_n *_n \varphi_{n-1}(g) \equiv \int_{n-1} \varphi_n(g(g_{n-1})^{-1}) \varphi_{n-1}(g_{n-1}) d_{n-1} g_{n-1}$.

与えられた $\{\varphi_k\}$ ($1 \leqq k \leqq n$) に対して

$\tilde{\varphi}_n \equiv \varphi_n *_n \tilde{\varphi}_{n-1} = \varphi_n *_n \varphi_{n-1} *_{n-1} \varphi_{n-2} *_{n-2} \cdots *_2 \varphi_1$.

☆ ここで $\forall j$ $\varphi_j \in C_0(G_j)$ なら $\varphi_n *_n \varphi_{n-1}$, $\tilde{\varphi}_n$,

etc$\in C_0(G_n)$ となる. (以下 $*_n$ の n は略記する事とする.)

④ $f_j \in C_0(G_j)$ に対し　$(f_j) \equiv \{ g \in G_j \mid f_j(g) \neq 0 \}$,

$$[f_j] \equiv \overline{(f_j)} \quad (\text{閉包}).$$

命題7-1. $\forall j \quad f_j \in C_0^+(G_j)$ とすれば

(1) $(\tilde{f}_j) = (f_j)(f_{j-1})(f_{j-2})\cdots\cdot(f_2)(f_1)$.

(2) $[\tilde{f}_j] = [f_j][f_{j-1}][f_{j-2}]\cdots\cdot[f_2][f_1]$.

証明. $f_j \geqq 0$ だから，帰納的に $\{g_j \in G_j \mid \tilde{f}_j(g_j) > 0\}$を計算すれば，(1)が判る．(1)の閉包として (2) が得られる． ∎

$\{V_n(\subset G_n),\ f_n,\ \mu_n\}$ の 3組を，帰納的に次の様に作る．

(1) $V_1(\subset U_1)$を G_1の e の相対コンパクト開対称近傍で

$\forall g \in V_1 \quad \Delta_1(g), \Delta_1(g^{-1}) < 1+2^{-1}$ となるものとする．

(2) $[f_1][f_1] \subset V_1$ なる $f_1(\in C_0^{+s}(G_1))$で，μ_1 の正規化を

$${}_1\| f_1 \|_2 = 1 \qquad \text{で定める．}$$

(3) 今 $\{V_j,\ W_j(\subset G_j),\ f_j,\ \mu_j\}\ (j = 1,2,3,\cdots\cdot,n-1)$ 迄決まったとして V_n を次を満たす様に定める．

(v-1) V_n を G_n の相対コンパクト開対称近傍，

(v-2) $V_n \subset U_n$,

(v-3) ${}_{n-1}\| L_g\tilde{f}_{n-1} - \tilde{f}_{n-1} \|_\infty < 2^{-2n-2}/p_{n-1}$

$\forall g \in V_n \cap G_{n-1}$ (但し $L_g\tilde{f}_{n-1}(g_{n-1}) \equiv \tilde{f}_{n-1}(g^{-1}g_{n-1})$),

(v-4) $\forall g \in V_n \qquad \Delta_n(g),\ \Delta_n(g^{-1}) < 1+2^{-n}$.

(4) この V_n を用いて， f_n を次の様に取る．

(f-1) $f_n \in C_0^{+s}(G_n)$,

(f-2) $[f_n][f_n] \subset V_n$,

(f-3) $\int_{n-1} f_n(g_{n-1}^{-1})\, d_{n-1}g_{n-1} = 1$,

(f-4) $\int_{n-1} f_n(gg_{n-1}^{-1})\, d_{n-1}g_{n-1} \leqq 1$,

(これには，V_n は適当に小さく取れば良い．又 f_n は(f-1), (f-2) を満たすものを，常数倍し(f-3)とし，さらに(f-4)はこの函数に G_n 上の対称非負連続函数で，G_{n-1} 上で 1，$G_n - G_{n-1}$ 上で $(\max[\int_{n-1} f_n(gg_{n-1}^{-1})\, d_{n-1}g_{n-1}, 1])^{-1}$ で抑えられる連続函数を掛ける事によって作る事が出来る．）

(5) この $\{f_j\}_j$ によって，μ_n を次で正規化する．

(μ) $\quad {}_n\|\tilde{f}_n\|_2 = 1$,

(6) 後の議論の為に次の W_n を決める．

(W-1) $W_n(\subset V_n)$ は G_n の e の相対コンパクト開対称近傍．

(W-2) $\quad \forall g \in W_n \quad {}_n\| R_g\tilde{f}_n - \tilde{f}_n\|_2 < 2^{-n-4}$.

ただしここで $\quad R_g\tilde{f}_n(g_n) \equiv \tilde{f}_n(g_n g)$．」

命題7-2. ある $\tilde{f} \in C^+(G)$ があって，$n \to \infty$ の時，$\forall j$ で $\tilde{f}_n|_{G_j}$ は G_j 上 $\tilde{f}|_{G_j}$ に一様収束する．

証明. ${}_{n-1}\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty =$

$$= \sup_{g\in G_{n-1}} \left| \int f_n(g(g_{n-1})^{-1})\tilde{f}_{n-1}(g_{n-1})\, d_{n-1}g_{n-1} - \right.$$

$$\left. - \int f_n((g_{n-1})^{-1})\tilde{f}_{n-1}(g)\, d_{n-1}g_{n-1} \right|$$

$$\leqq \sup_{g\in G_{n-1}} \int f_n((g_{n-1})^{-1})|\tilde{f}_{n-1}(g_{n-1}g) - \tilde{f}_{n-1}(g)|\, d_{n-1}g_{n-1}$$

$$\leqq \sup_{g\in G_{n-1}} \int f_n(g_{n-1}^{-1})\, {}_{n-1}\| L_{(g_{n-1})^{-1}}\tilde{f}_{n-1} - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty \, d_{n-1}g_{n-1}$$

$$= {}_{n-1}\| L_{g_{n-1}}\tilde{f}_{n-1} - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty < 2^{-2n-2}/p_{n-1}.$$

一方 $m \geqq k$ で ${}_m\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty \geqq {}_k\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty$ で $\tilde{f}_n|_{G_j}$ は全ての j で G_j 上一様収束し，その極限 $\tilde{f}$ は $\forall j$ で G_j上連続だから，G 上でも連続である． ∎

系. $\quad (f) \cap G_j \subset U_j\tilde{U}_j$.

証明. $(f) \subset \cup_n(\tilde{f}_n) = \cup_n(f_n)(f_{n-1})\cdots(f_1) \subset \cup_n \tilde{U}_n$ だ

が $\forall n \geqq j \quad \tilde{U}_n \cap G_j \subset U_j \tilde{U}_j$ より成立する. ∎

命題7-3. $\forall j \ \tilde{f}_n|_{G_j}$は $\tilde{f}|_{G_j}$ に $L^2(\mu_j)$−収束し，

$$\lim_j {}_j\|\tilde{f}\|_2 = 1 \qquad (j \to \infty).$$

証明. $n > j \ \ I \equiv {}_j\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}\|_2^2 = \int_j d_j g |\tilde{f}_n(g) - \tilde{f}_{n-1}(g)|^2$ $d_j g$. ここで $g \in (\tilde{f}_n) \cap G_j \subset (f) \cap G_j \subset U_j \tilde{U}_j$ だから $I \leqq \int_{U_j \tilde{U}_j j} {}_j\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty^2 d_j g_j \leqq \mu_j(U_j \tilde{U}_j)_{n-1}\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}\|_\infty^2$

$\leqq \ p_j\, 2^{-4n-4}\, (p_n)^{-2} \ \leqq \ 2^{-4n-4}.$

$|{}_j\|\tilde{f}\|_2 - 1|_j = |{}_j\|\tilde{f}\|_2 - {}_j\|\tilde{f}_j\|_2| \leqq$

$\leqq \Sigma_{k=j}^{\infty}\, {}_j\|\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k\|_2 \leqq \Sigma_{k=j}^{\infty} 2^{-2k-2} = 2^{-2j}/3 \to 0 (j \to \infty).$

定義7-4. $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in C_0(G)$で存在の下で下記を定義する.

$\|\varphi\|_2 \equiv \lim_j {}_j\|\varphi\|_2, \ <\varphi_1, \varphi_2> \equiv \lim_j <\varphi_1, \varphi_2>_j.$ ∎

容易に $\forall g \in G \ \ \|R_g \varphi\|_2 = \|\varphi\|_2, \ <R_g \varphi_1, R_g \varphi_2> = <\varphi_1, \varphi_2>.$

補題7-5. $\int_n d_n g \int_{n-1} f_n(g g_{n-1}) f_n(g) d_{n-1} g_{n-1} \leqq (1 - 2^{-2n-2})^{-1}.$

証明. $1 = {}_n\|\tilde{f}_n\|_2^2 =$

$= \int_n d_n g \,|\int_{n-1} f_n(g(g_{n-1})^{-1}) \tilde{f}_{n-1}(g_{n-1}) d_{n-1} g_{n-1}|^2$

$= \int_n d_n g \int_{n-1} \int_{n-1} f_n(g(g_{n-1})^{-1}) f_n(g(g_{n-1}')^{-1}) \times$

$\times \tilde{f}_{n-1}(g_{n-1}) \tilde{f}_{n-1}(g_{n-1}')\ d_{n-1} g_{n-1} d_{n-1} g_{n-1}'$

$= \int_{n-1} \int_{n-1} (\int_n f_n(g g_{n-1}'(g_{n-1})^{-1}) f_n(g) d_n g) \tilde{f}_{n-1}(g_{n-1}) \times$

$\times \tilde{f}_{n-1}(g_{n-1}')\ d_{n-1} g_{n-1} d_{n-1} g_{n-1}'$

$= \int_{n-1} (\int_n f_n(g g_{n-1}') f_n(g) d_n g) \times$

$\times (\int_{n-1} \tilde{f}_{n-1}(g_{n-1}) \tilde{f}_{n-1}(g_{n-1}' g_{n-1}) d_{n-1} g_{n-1}) d_{n-1} g_{n-1}'$

この下波付きの部分は $<L_{(g_{n-1}')^{-1}} \tilde{f}_{n-1}, \tilde{f}_{n-1}>_{n-1}$であり，

$gg_{n-1}' \in (f_n), g \in (f_n)\ g_{n-1}' \in (f_n)(f_n) \cap G_{n-1} \subset V_n \cap G_{n-1}$,

$$| < L_{(g_{n-1}')^{-1}} \tilde{f}_{n-1}, \tilde{f}_{n-1} >_{n-1} - {}_{n-1}\| \tilde{f}_{n-1} \|_2^2 | \leqq$$

$$\leqq {}_{n-1}\| L_{(g_{n-1}')^{-1}} \tilde{f}_{n-1} - \tilde{f}_{n-1} \|_2 \cdot {}_{n-1}\| \tilde{f}_{n-1} \|_2 .$$

所で $\quad {}_{n-1}\| L_{(g_{n-1}')^{-1}} \tilde{f}_{n-1} - \tilde{f}_{n-1} \|_2^2 \leqq$

$$\int_{((fn)(fn) \cap Gn-1)} (\tilde{f}_{n-1})_{n-1} \| L_{(g_{n-1}')^{-1}} \tilde{f}_{n-1} - \tilde{f}_{n-1} \|_\infty^2 \, d_{n-1} g_{n-1}$$

$\leqq p_{n-1} \cdot 2^{-4n-4} / (p_{n-1})^2 \leqq 2^{-4n-4}$ だから

$$< L_{(g_{n-1}')^{-1}} \tilde{f}_{n-1}, \tilde{f}_{n-1} >_{n-1} \geqq {}_{n-1}\| \tilde{f}_{n-1} \|_2^2 - 2^{-2n-2} =$$

$= 1 - 2^{-2n-2}$. 代入して

$$1 = {}_n\| \tilde{f}_n \|_2^2 \geqq \int_{n-1} \left(\int_n f_n(gg_{n-1}') f_n(g) d_n g \right) (1 - 2^{-2n-2}) \, d_{n-1} g_{n-1}',$$

即ち $\int_n d_n g \int_{n-1} f_n(gg_{n-1}) f_n(g) d_{n-1} g_{n-1} \leqq (1 - 2^{-2n-2})^{-1}$.

命題7-6. $\| R g \tilde{f} - \tilde{f} \|_2$, $< R g \tilde{f}, \tilde{f} >$ は共に存在して G 上の連続函数である.

証明. [各 G_j 上での極限の存在] $g \in G_k$ とする. 先ず $n > j \geqq k$ で ${}_j\| (R g \tilde{f}_n - \tilde{f}_n) - (R g \tilde{f}_{n-1} - \tilde{f}_{n-1}) \|_2 \leqq$

$$\leqq {}_j\| R g (\tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1}) \|_2 + {}_j\| \tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1} \|_2$$

$$= 2\ {}_j\| \tilde{f}_n - \tilde{f}_{n-1} \|_2 \leqq 2^{-2n-1},$$

より $n \to \infty$ の時の $L^2(\mu_j)$-収束が出る.

[$j \to \infty$ の時の収束性] 条件 (μ) ${}_n\| \tilde{f}_n \|_2 = 1$ があるから, $\| R g \tilde{f} - \tilde{f} \|_2$ について示せばよい.

$n \geqq j \geqq k$, $h \in G_k$ として

$$(*^4) \quad | {}_j\| R h \tilde{f} - \tilde{f} \|_2 - {}_j\| R h \tilde{f}_j - \tilde{f}_j \|_2 | \leqq$$

$$\leqq \Sigma_{s=j}^{\infty} {}_j\| (R h \tilde{f}_{s+1} - \tilde{f}_{s+1}) - (R h \tilde{f}_s - \tilde{f}_s) \|_2$$

$$\leqq \Sigma_{s=j}^{\infty}\ [{}_j\| Rh(\tilde f_{s+1} - \tilde f_s)\|_2 + {}_j\| \tilde f_{s+1} - \tilde f_s\|_2]$$

$$\leqq\ 2^{-2j+1}/3.$$

$$I_j \equiv {}_j\| Rh\tilde f_j - \tilde f_j\|_2^2$$

$$= \int_j d_j g \int_{j-1}\int_{j-1} f_j(g(g_{j-1})^{-1}) f_j(g(g_{j-1}')^{-1}) \times$$

$$\times (\tilde f_{j-1}(g_{j-1}h) - \tilde f_{j-1}(g_{j-1}))(\tilde f_j(g_j'h) - \tilde f_j(g_j'))$$

$$d_{j-1}g_{j-1}\ d_{j-1}g_{j-1}'$$

$$= \int_{j-1}\int_{j-1}\left(\int_j f_j(gg_{j-1}'(g_{j-1})^{-1}) f_j(g) d_j g\right) \times$$

$$\times (\tilde f_{j-1}(g_{j-1}h) - \tilde f_{j-1}(g_{j-1}))(\tilde f_{j-1}(g_{j-1}'h) - \tilde f_{j-1}(g_{j-1}'))$$

$$d_{j-1}g_{j-1}\ d_{j-1}g_{j-1}'$$

$$= \int_{j-1} d_{j-1}g_{j-1}' \left(\int_j f_j(gg_{j-1}') f_j(g) d_j g\right) \times$$

$$\times \left(\int_{j-1}(\tilde f_{j-1}(g_{j-1}h) - \tilde f_{j-1}(g_{j-1})) \times\right.$$

$$\left.\times (\tilde f_{j-1}(g_{j-1}'g_{j-1}h) - \tilde f_j(g_{j-1}'g_{j-1})) d_{j-1}g_{j-1}\right)$$

下波付部で $\langle Rh\tilde f_{j-1} - \tilde f_{j-1},\ L_{(g_{j-1}')^{-1}} Rh\tilde f_{j-1} - \tilde f_{j-1}\rangle \leqq$

$$\leqq\ \Delta_{j-1}(g_{j-1}')\ {}_{j-1}\| Rh\tilde f_{j-1} - \tilde f_{j-1}\|_2^2$$

$$I_j \leqq \int_j d_j g \int_{j-1} f_j(gg_{j-1}') f_j(g) d_{j-1}g_{j-1}' \times$$

$$\times \Delta_{j-1}(g_{j-1}')\ {}_{j-1}\| Rh\tilde f_{j-1} - \tilde f_{j-1}\|_2^2,$$

$$[\ gg_{j-1}' \in (f_j), g \in (f_j)\ \Rightarrow\ g_{j-1}' \in (f_j)(f_j) \cap G_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \Delta_{j-1}(g_{j-1}') < 1+2^{-j+1}]\ .$$

結局補題7-5 より

$$(*^5)\quad {}_j\| Rh\tilde f_j - \tilde f_j\|_2^2 \leqq$$

$$\leqq (1-2^{-2j-2})^{-1}(1+2^{-j+1})\ {}_{j-1}\| Rh\tilde f_{j-1} - \tilde f_{j-1}\|_2^2$$

$$\leqq (1+2^{-2j-2})(1+2^{-j+1})\ {}_{j-1}\| Rh\tilde f_{j-1} - \tilde f_{j-1}\|_2^2.$$

$\leqq (1+2^{-j+2})\ {}_{j-1}\| R_h \tilde{f}_{j-1} - \tilde{f}_{j-1} \|_2{}^2.$

即ち

$0 \leqq \Pi_{s=1}{}^{j}(1+2^{-s+2})^{-1}{}_{j}\| R_h \tilde{f}_{j} - \tilde{f}_{j} \|_2{}^2 \leqq$

$\leqq \Pi_{s=1}{}^{j-1}(1+2^{-s+2})\ {}_{j-1}\| R_h \tilde{f}_{j-1} - \tilde{f}_{j-1} \|_2{}^2.$

となり, $\Pi_{s=1}{}^{j}(1+2^{-s+2})^{-1}{}_{j}\| R_h \tilde{f}_{j} - \tilde{f}_{j} \|_2{}^2$ は j につき単調減少であるから収束する.

一方 $\Pi_{s=1}{}^{j}(1+2^{-s+2})^{-1}$ も $j \to \infty$ で収束するから,

$\lim_j\ {}_{j}\| R_h \tilde{f}_{j} - \tilde{f}_{j} \|_2$ の存在が言えた.

[連続性] (W-1)(W-2)の $\{W_n\}$ を使ってGの e の近傍系

$s \geqq r \quad \tilde{W}_s{}^r \equiv W_r W_{r+1} \cdot\cdot\cdot W_s, \quad \tilde{W}^r \equiv \cup_s{}^{\infty} \tilde{W}_s{}^r$

で定義した $\{\tilde{W}^r\}$ を取る. $\varepsilon > 0 \ \exists r$ s.t. $\forall h \in \tilde{W}^r$

$\| R_h \tilde{f} - \tilde{f} \| < \varepsilon$ を示す.

$h \in \tilde{W}^r$ で $\exists s\ (>r)\ h \in \tilde{W}_s{}^r$, 即ち $\exists h_k \in W_k\ (s \geqq k \geqq r)$

$h = h_r h_{r+1} \cdot\cdot\cdot h_s$. $\| R_h \tilde{f} - \tilde{f} \|_2 \leqq$

$\leqq \Sigma_{k=s}{}^{r} \| R_{h_r h_{r+1} \cdot\cdot h_{k-1} h_k} \tilde{f} - R_{h_r h_{r+1} \cdot\cdot h_{k-1}} \tilde{f} \|_2$

$= \Sigma_{k=s}{}^{r} \| R_{h_k} \tilde{f} - \tilde{f} \|_2.$

(＊5)で ${}_{j}\| R_h \tilde{f}_{j} - \tilde{f}_{j} \|_2{}^2 \leqq (1+2^{-j+2})\ {}_{j-1}\| R_h \tilde{f}_{j-1} - \tilde{f}_{j-1} \|_2{}^2.$

k まで繰り返し $h_k \in W_k\ (j \geqq k)\ C^2 \equiv \Pi_{m=1}{}^{\infty}(1+2^{-m+2})$ で

${}_{j}\| R_{h_k} \tilde{f}_{j} - \tilde{f}_{j} \|_2{}^2 \leqq \Pi_{m=k+1}{}^{j}(1+2^{-m+2})_{k}\| R_{h_k} \tilde{f}_{k} - \tilde{f}_{k} \|_2{}^2 \leqq$

$\leqq 2^{-2k-8} C^2.$

(＊4) より ${}_{j}\| R_{h_k} \tilde{f} - \tilde{f} \|_2 \leqq {}_{j}\| R_{h_k} \tilde{f}_{j} - \tilde{f}_{j} \|_2 + 2^{-2j+1}/3$

$\leqq 2^{-k-4} C + 2^{-2j+1}/3.$

$j \to \infty$ として $\| R_{h_k} \tilde{f} - \tilde{f} \|_2 \leqq C\, 2^{-k-4}$

$\|R_h\tilde{f}-\tilde{f}\|_2 \leqq \Sigma_{k=r}{}^{s}\|R_{h_k}\tilde{f}-\tilde{f}\|_2 \leqq C\,\Sigma_{k=r}{}^{\infty}2^{-k-4}=C\,2^{-r-3}$.

r を $\varepsilon > C\,2^{-r-3}$ に取れば　　　　　$\leqq \varepsilon$.　　　∎

上の形の表現に対して誘導表現を考える事が出来る.

補題7-7.　G_n 上の正定符号測度 ν_n に対して

$$d\nu_{n+1}(h) \equiv (\Delta_n(h)/\Delta_{n+1}(h))^{1/2}d\nu_n(h)$$

を G_{n+1} 上の測度と見たものは，G_{n+1} 上の正定符号測度であり，GNS－構成法により ν_{n+1} に対応する G_{n+1} のユニタリ表現は，ν_n に対応する G_n の表現から G_{n+1} に誘導して得られる表現とユニタリ同値である.　∎

（参照　辰馬伸彦，位相群の誘導表現に関する注意，「数学」，１２（１９６５），ＰＰ３９－４１，ＭＲ　３４　＃４４１３）

但しここで次の仮定を置く.

［仮定］　$\forall j$　$\lim_n \Delta_n|_{G_j}$ が G_j 上で，広義一様に収束する.

命題7-8　この仮定の下で，ある m について G_m の正定符号測度 ν_m に対応するユニタリ表現から”誘導”される G の表現を作る事が出来る.

証明　前補題により G_n 上の次の測度 ν_n は正定符号であるが，仮定から $n\to\infty$ で G_m 上の測度と見ても収束する.

$$d\nu_n(g) \equiv \Pi_{j=m}{}^{n-1}(\Delta_j(g)/\Delta_{j+1}(g))^{1/2}d\nu_m(g)=$$

$$= (\Delta_m(g)/\Delta_n(g))^{1/2}\,d\nu_m(g).$$

ここで G_m 上の測度と見ての収束先を $\tilde{\nu}$ とする

$$\tilde{\varphi}(g) \equiv \langle\!\langle U_g\tilde{f},\tilde{f}\rangle\!\rangle \equiv \int_m \langle R_{hg}\tilde{f},\tilde{f}\rangle\, d\tilde{\nu}(h)$$

$$=\lim_j \int_m \langle R_{hg}\tilde{f}_j,\tilde{f}_j\rangle_j(\Delta_m(g)/\Delta_j(g))^{1/2}\,d\nu_m(h),$$

は G 上の連続正定符号函数である. $\blacksquare$

以上