数理解析研究所講究録
1018巻 1997年 29-41

曲がり管内流の構造

The Structure of a Flow in a Curved Rectangular Tube

岡大工 柳瀬眞一郎 (Shinichiro YANASE)
岡大院工 大海隆二 (Ryuji DAIKAI)
岡大院工 森永努 (Tsutomu MORINAGA)

1 緒言

曲がり管は直管と共に管路を構成する重要な要素の一つで，その管路抵抗と熱輸送については，詳細にわたる多数の研究が発表されている．[1-3] しかし，近年の計算機の急速な発達によって，従来時間を要したより高精度な計算を実行することができるようになった．

本研究では，曲がり管の縦横比を変化させて管内流の変化を追い，解の分岐がどこで発生するかについて調べた．また展開関数の組み合わせの異なる２つの方法を用い，その解を比較することで解の信頼性を確かめた．そして得た定常解の線形安定性について調べ，撹乱が加わったときにそれが発達するのかそれとも減衰していくのかを，固有値を基に考察した．

2 方程式

2.1 基礎方程式

曲がり管の状態を図１に示す．

曲がり管は一定曲率で，流れ場の圧力勾配Gは一定に保たれ，管軸方向に変化しない定常な非圧縮流体であるとの仮定の下に，円柱座標における３次元ナヴィエ・ストークス方程式の無次元化を行い，縦横比$l = h/d$として，管軸方向速度wと断面２次流れψについての基礎方程式 (1),(2) を導いた．

$$\frac{1}{l}\frac{\partial(w,\psi)}{\partial(x,y)} = Dn - \frac{\delta^2 w}{(1+\delta x)} - (1+\delta x)\triangle_2 w - \frac{1}{l}\frac{\delta}{(1+\delta x)}\frac{\partial\psi}{\partial y}w + \delta\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1}$$

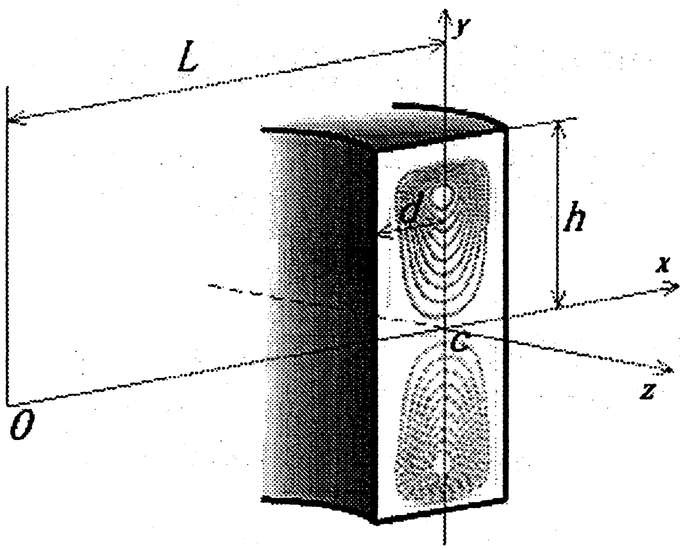

図 1: 曲がり管の状態

$$\frac{1}{l}\frac{1}{1+\delta x}\frac{\partial(\Delta_2\psi,\psi)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{l}w\frac{\partial w}{\partial y} + \Delta_2^2\psi$$
$$+\frac{1}{l}\frac{\delta}{(1+\delta x)^2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\left(2\Delta_2\psi - \frac{3\delta}{1+\delta x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right]$$
$$+\frac{\delta}{(1+\delta x)^2}\left[-2(1+\delta x)\frac{\partial}{\partial x}\Delta_2\psi + \Delta_2\psi + 2\delta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{3\delta^2}{1+\delta x}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\delta}{l^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right] \quad (2)$$

$$\delta = \frac{d}{L}, \ \Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{l^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \ \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$$

Dean 数 Dn は圧力勾配 G, 粘性係数μ, 動粘性係数νによって以下のように定義される.

$$Dn = \frac{Gd^3}{\mu\nu}\left(\frac{2d}{L}\right)^{1/2}$$

この方程式を用い，関数展開法に選点法を組み合わせた方法で数値計算を行った．展開関数は x 方向にチェビシェフ多項式,

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad (3)$$

y 方向にチェビシェフ多項式またはルジャンドル多項式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^2}{dx^n} \quad (4)$$

を用いた.

2.2 撹乱方程式

基礎方程式 (1),(2) 式から以下の撹乱方程式を得る.

$$
\begin{aligned}
(1+\delta x)\frac{\partial \hat{w}}{\partial t} &= (1+\delta x)\triangle_2\hat{w} + \delta\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} - \frac{\delta^2\hat{w}}{1+\delta x} - \frac{1}{l}\frac{\partial(\bar{w},\hat{\psi})}{\partial(x,y)} \\
&\quad -\frac{1}{l}\frac{\partial(\hat{w},\bar{\psi})}{\partial(x,y)} - \frac{1}{l}\frac{\delta}{1+\delta x}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}\bar{w} - \frac{1}{l}\frac{\delta}{(1+\delta x)}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\hat{w}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\triangle_2 - \frac{\delta}{1+\delta x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial t} &= -\frac{2\delta}{1+\delta x}\frac{\partial}{\partial x}\triangle_2\hat{\psi} + \frac{\delta^2}{(1+\delta x)^2}\triangle_2\hat{\psi} \\
&\quad -\frac{\delta^2}{l^2(1+\delta x)^2}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial y^2} + \frac{2\delta^2}{(1+\delta x)^2}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial x^2} - \frac{3\delta^3}{(1+\delta x)^3}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x} \\
&\quad +\triangle_2^2\hat{\psi} - \frac{1}{l}\frac{1}{1+\delta x}\frac{\partial(\triangle_2\bar{\psi},\hat{\psi})}{\partial(x,y)} - \frac{1}{l}\frac{1}{1+\delta x}\frac{\partial(\triangle_2\hat{\psi},\bar{\psi})}{\partial(x,y)} \\
&\quad +\frac{1}{l}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\left\{\frac{2\delta}{(1+\delta x)^2}\triangle_2\hat{\psi} - \frac{3\delta^2}{(1+\delta x)^3}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x} + \frac{\delta}{(1+\delta x)^2}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial x^2}\right\} \\
&\quad +\frac{1}{l}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}\left\{\frac{2\delta}{(1+\delta x)^2}\triangle_2\bar{\psi} - \frac{3\delta^2}{(1+\delta x)^3}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x} + \frac{\delta}{(1+\delta x)^2}\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial x^2}\right\} \\
&\quad -\frac{1}{l}\frac{\delta}{(1+\delta x)^2}\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial x\partial y} - \frac{1}{l}\frac{\delta}{(1+\delta x)^2}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x}\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial x\partial y} + \frac{1}{l}\bar{w}\frac{\partial\hat{w}}{\partial y} \\
&\quad +\frac{1}{l}\hat{w}\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\triangle_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{l^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}
$$

$\bar{w}$は主流の管軸方向速度で,$\bar{\psi}$は主流の２次流れであり，$\hat{w}$は撹乱の管軸方向速度で,$\hat{\psi}$は撹乱の２次流れである.

3 計算結果

3.1 ２つの展開関数の比較

表 1 に $Dn = 100$, 縦横比 $l = 4$ の場合の解の一つについて，展開項数と管軸方向の中心速度 $W(0,0)$ の値を示す.

x 方向の項数	y 方向の項数	中心速度 $W(0,0)$
$M = 16$	$Nc = 32$	35.95945
$M = 16$	$Nc = 80$	36.01126
$M = 16$	$Nl = 32$	35.96589
$M = 16$	$Nl = 80$	36.01126

表 1:

M は x 方向のチェビシェフ多項式の項数である．Nc は y 方向にチェビシェフ多項式を用いたときの項数で，Nl はルジャンドル多項式を y 方向に展開関数として用いたときの項数である．いずれの値もかなり近いもので，縦横比 4 の場合は精度的には x, y 方向それぞれ 16 項，32 項で十分であると考えられる．特に y 方向に 80 項展開したときの 2 つの値が一致している．異なる展開関数を用いた方法で得た値が一致しているので，この値は信頼性が高いと考えられる．他の解においても同様に管軸方向中心速度 $W(0,0)$ は異なる 2 方法でほぼ一致し，管軸方向速度分布，断面の 2 次流れは同じ曲線を描く．

3.2 流れの状態

$Dn = 100$, 縦横比 $l = 1$ から増やして 11 の場合まで管軸方向中心速度 $W(0,0)$，軸方向速度分布並びに断面の 2 次流れの定常解を求めた．精度を保つために縦横比 l =1〜4 の場合は x 方向に 16 項，y 方向に 32 項の展開をし，縦横比 l =4〜11 の場合は x 方向に 16 項，y 方向に 80 項の展開を行った．

縦横比 l と管軸方向中心速度 $W(0,0)$ の関係を示す．

縦横比 3.675(図の e) のところではじめて，2 つの解が存在する．その解の分岐は縦横比 4.6736(図の b) のところよりはじまる。2 渦の断面 2 次流れの変化、4 渦の断面 2 次流れの変化を示す。各々の図の右が曲がり管の外側で，実線は渦の向きが反時計回りであることを，点線は逆であることを示している．

$l = 10.5$ あたりを計算すると解は多数求められた。その解を細かく調べていくと分岐地点が $l = 10$ であることがわかった。（図 4 と図 5）渦は中央部に非常に複雑な形で存在するためにできた分岐と思われる。その解のうち完全に 4 つ渦の形で縦に広がっていく渦（図 6 の u）が見つかった。（図 6）現在、その渦を調べているが計算は図 6 の v まで進んでいる。v よりも l を小さくすると解は 2 渦へと移ってしまう。よってここも b-e のような変化があると考えられる。

3.3 線形安定性

撹乱方程式に対する特性方程式を解いて固有ベクトルと固有値を求める．固有値の実部の最大値が増幅率を与え，それに対応する固有ベクトルが撹乱の展開係数を与える．固有値の最大値が正の場合には撹乱は発達すると考えられ，負の

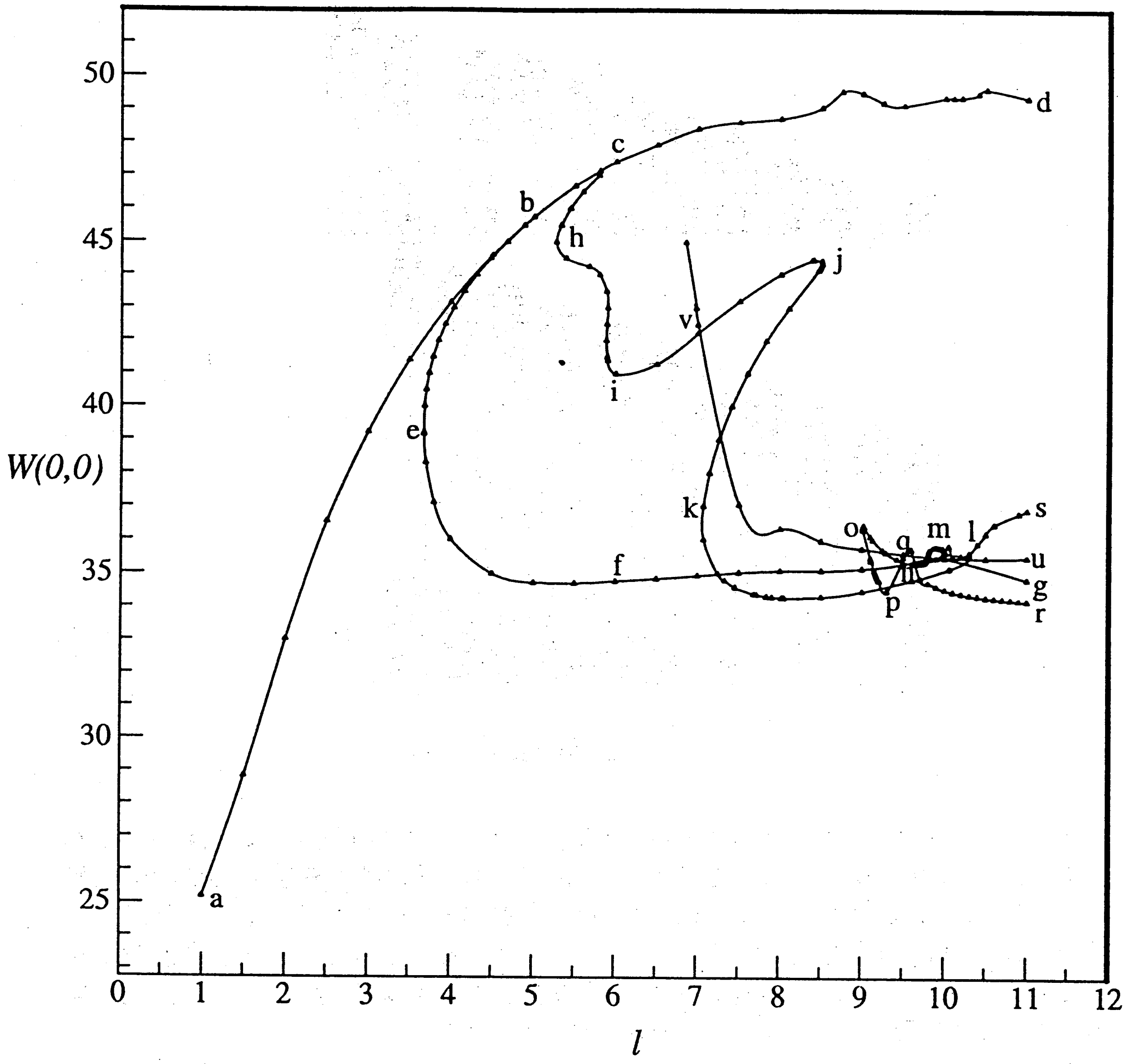

図 2: 縦横比 l と管軸方向中心速度 $W(0,0)$ の関係

場合には減衰するものと考えられる．また得られた固有値が複素数の場合には，撹乱は振動しながら発達または，減衰すると考えられる．実際に計算を行う際には，主に x, y 両方向にチェビシェフ多項式を用いたものを主に使用した．チェビシェフ-ルジャンドルの組み合わせは，固有値の実部の最大値の正負が反転するところのみを計算した．表 2 に項数を増やした場合の固有値の収束を示す．定常解は $l=5.0$ の 4 渦解に偶撹乱を加えたものである．y 方向の項数は，x 方向の項数の整数部分を掛けたものとなっている．項数が増えるにつれて，値が収束していることがわかる．今回は，x 方向の項数を 12 として計算を行った．

表 3 に得られた定常解について，固有値の実部の最大値とそれに対応する虚部について示す．また正の個数とは，実部が正となる項の数で，カッコの中はそれが複数ある場合に虚部が 0 となったものの個数である．

この結果から 2 渦解においては縦横比 l が $l=4.8$ よりも大きな場合には撹乱

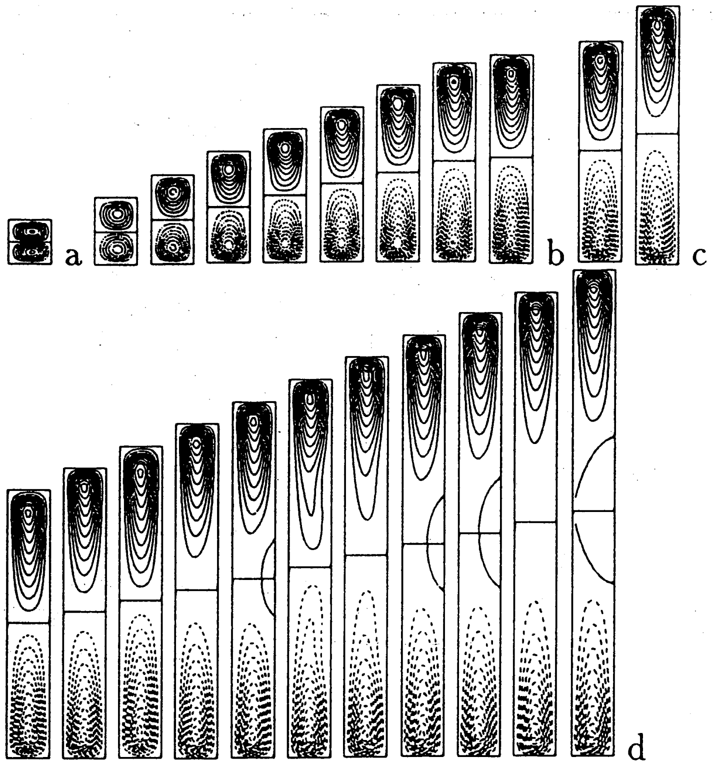

図 3: 2 渦の変化

が発達し，定常解は不安定なものとなる．また $l = 8.75$ 付近では，撹乱が振動して発達し解は振動解になると考えられる．この付近では固有値の実部の最大値が一時的に減少したり，実部が正となる項が急に増えたりしている．これは定常解が２渦と４渦の間を変化することによるものであると考えられる．多渦解についても，チェビシェフ-ルジャンドルの組み合わせの計算を行うことで, 撹乱が発達し始める縦横比の値を確かなのものとした．

4 渦解においては，解の分岐が発生する付近で不安定となる．また一度安定となった後も再び縦横比 $l = 6.3$（図２の f）より大きなところで撹乱が発達するようになる．縦横比 $l = 9.0$ で，正の値を持つ固有値の数が大きく変化しているが，これは新たな付帯渦が発生して８渦となる変化によるものであると考えられる．

3.4 撹乱による渦変化

安定領域に属する縦横比 $l = 5$ の定常解に偶撹乱を時間発展法を用いて加えた。撹乱を加える前の定常 2 渦解、加えた撹乱、4 渦解に発達していく定常解＋撹乱の変化を次に示す。この偶撹乱を加えたときに２渦解は 4 渦解になる．この付近の縦横比では，２渦解は撹乱に対して不安定であるが，4 渦解は撹乱に対して安定であるので，このような変化をし不安定な２渦解から安定な 4 渦解になったと考えられる．

次に２渦解,4 渦解共に不安定な縦横比 $l = 6.0$ の２渦解について同様に偶撹乱を加えてみた。渦は c から i へと移り新たな 6 渦解で収束した。この結果よりこ

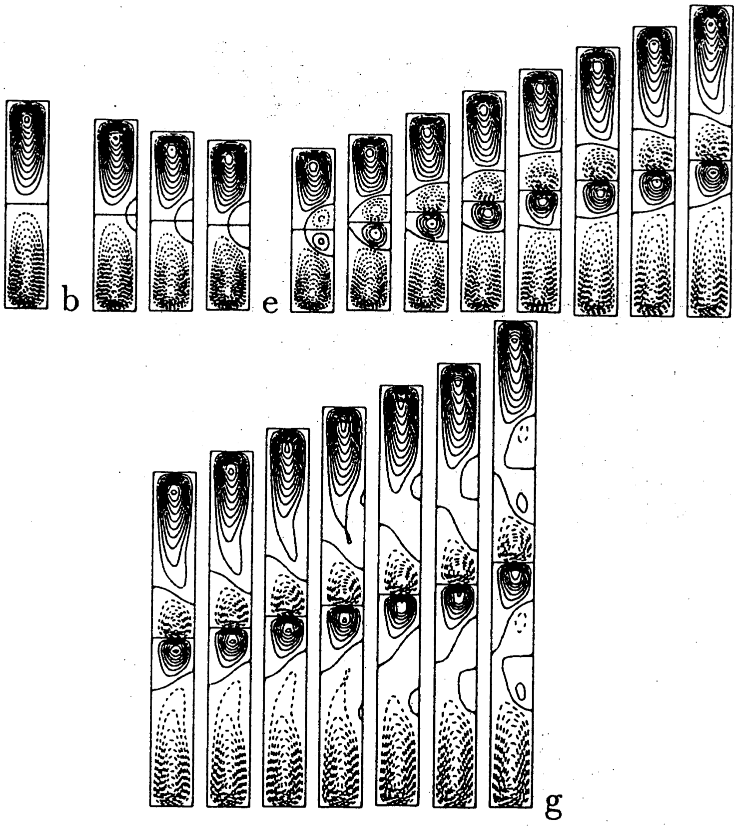

図 4: 4 渦の変化

の付近の縦横比では、不安定な解がいくらか存在すると考えられる。

3.5　6 渦の変化

ここで得られた 6 つ渦の状態からニュートン・ラフソン法を用いて縦横比を変え渦の変化を調べた。2 つ渦の状態からの分岐は縦横比 $l = 5.792$ で起こることがわかった。c から h へ b-e 間と同じような形で渦は発生し 2 つ渦から 4 つ渦へと変化した。中心速度の変わり方も似ている。

4 つ渦から 6 つ渦に変化する際の新渦はこれまでと少し違い矩形間のほぼ中心部より発生している。またこの新渦は発達し、h から i へと渦の形がはっきり定まるまで中心速度は急激に下がる。

次にこの 6 渦の状態から縦横比を伸ばしていった。中心速度の増加とともに縦横比 $l = 8.5$ まで渦は縦に広がっていった。縦横比 $l = 7.5$ で管の中心より見え始めた付帯渦は縦横比 $l = 8.0$ では消えている。$l = 8.5$ （図 2 の j）で再び付帯渦が見え始めている。$l = 8.5$ （図 2 の j）での付帯渦は中心速度を下げながら発達し、$l = 7.07127$(図 2 の k) で完全に 8 渦となる。この新渦の発生の仕方は b-f,c-h 間と似ている。この 8 渦は $l = 8.04$ で中心速度 34.285 の最小値をとり $l = 10.3025$ （図 2 の l）まで中心速度を少しずつ上昇させながら中心から 1 番目と 2 番目の間隔が広がる。8 渦から 10 渦へ変化するときの新しい渦はこれまでと異なり中心から 1 番目と 2 番目の間から発生する。l から m がその変化である

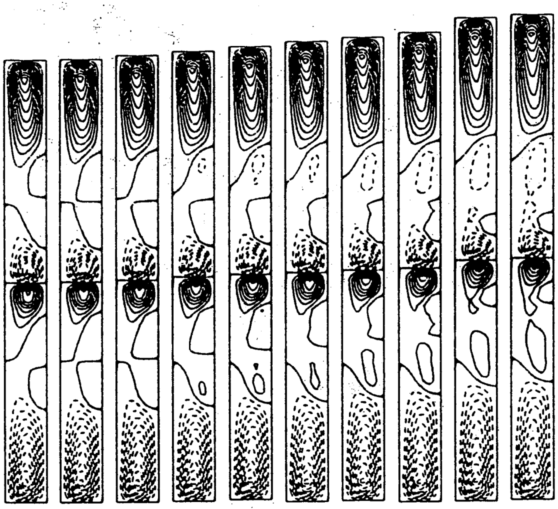

図 5: 4 渦の変化 2

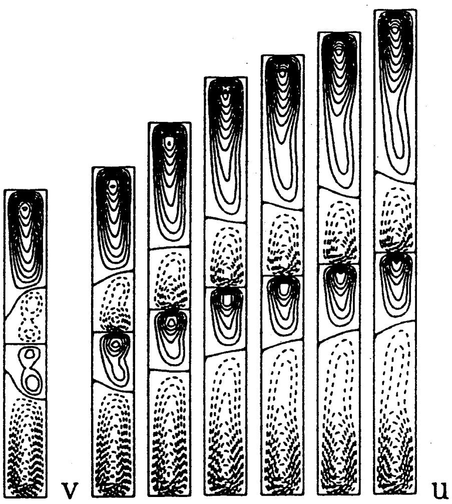

図 6: 4 渦の変化 3

が、完全な 8 渦とならず 12 渦に一度に変化しようとしているのがわかる。

6 渦から 8 渦にかけてすでに現れ始めていた新渦も成長し、渦は 12 渦へと変化する。その際、中心速度は一時 o,p,q と上昇、下降を繰り返す。q で完全に 12 渦の形で落ち着きその後 r まで渦は縦に広がる。$l = 13$ まで現在のところ新渦は発生しないことがわかっている。

4 結言

本研究の計算結果は，展開関数として x, y 方向にチェビシェフ多項式を用いる計算方法と，それぞれにチェビシェフ多項式とルジャンドル多項式を用いる 2 つの方法で解を得，またそれらの解が一致したので信頼性が高い．

$Dn = 100$ の場合，解の分岐は縦横比 $l = 4.736$ と $l = 5.792$ で起こる。

項数		偶攪乱	
x 方向	y 方向	実部	虚部
10	50	-0.95293	0
12	60	-0.99847	0
14	70	-0.99995	0
16	80	-0.99993	0

表 2: l=5.0 における固有値の収束

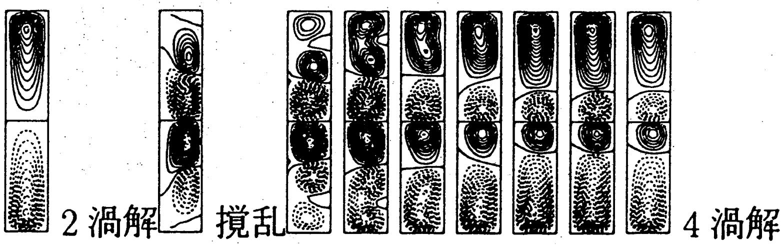

図 7: 縦横比 $l=5$ に偶攪乱を加える

前者は 2 つ渦から 4 つ渦に移る。完全な 4 つ渦になるまで解は不安定な状態となる。解が不安定な時、攪乱を加えると解は安定な 4 つ渦となり定常になる。この安定な 4 つ渦の状態は $l=6.3$ まで続きここより再び攪乱が発達し不安定となる。その不安定な渦は $l=10$ で分岐する。その渦は中央部で複雑な形をとる。

後者は 2 つ渦から 4 つ渦に変化したあと急激に 6 つ渦に変化する。その間、解は分岐せず連続的に変化する。その後 $l=8.5$ まで 6 つ渦の状態と 8 つ渦の状態を繰り返す。$l=8.5$ での付帯渦は中心速度を下げながら発達し、$l=7.07127$ で完全に 8 渦となる。この 8 渦は、$l=9.0$ まで縦に広がり、その中心速度は 34.48 に近づく。8 渦となった渦は中心速度を変化させながら 10 渦、１２渦と変化する。その間、完全な１０渦は見られない。

現在、完全に 4 つの形で変化する渦を計算中である。

参考文献

(1) S.Yanase and K.Nishiyama:On the Bifurcation of Laminar Flows through a Curved Rectangular Tube, J.Phys.Soc.Jpn.Vol.57(1988)pp.3790-3795

(2) S.Thangama and N.Hur:Laminar secondary flows in curved rectangular ducts,J.Fluid Mech,Vol.217(1990) pp.421-440

(3) 秋山光庸・ほか５名:水力学的不安定流れと境界壁形二次流れの相互干渉とその段階的な遷移発達, 機論Ｂ編,47 巻 421 号 (1981)pp.1705-1714

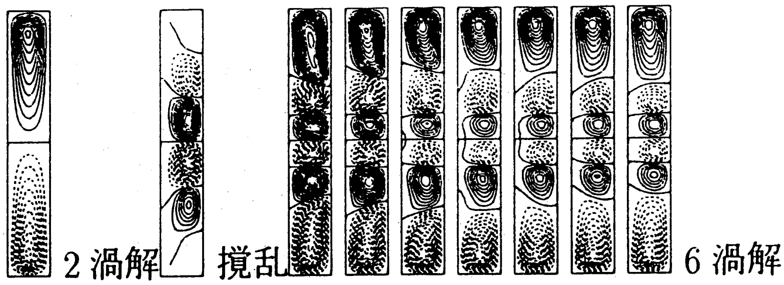

図 8: ell6 に偶撹乱を加える

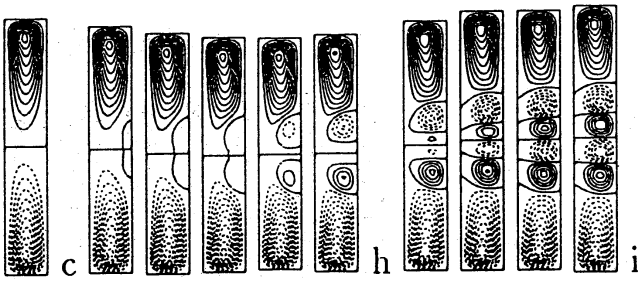

図 9: 2 渦から 4 渦への変化

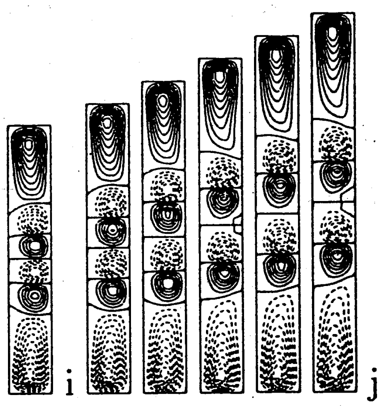

図 10: 4 渦から 6 渦への変化

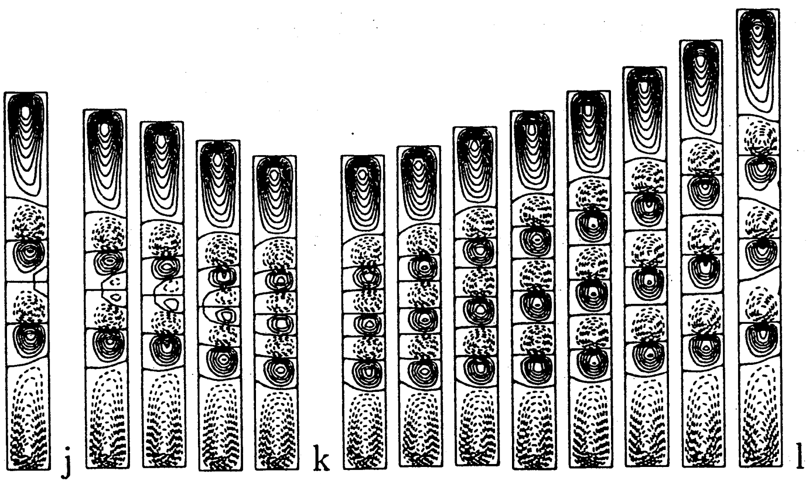

図 11: 6 渦から 8 渦への変化

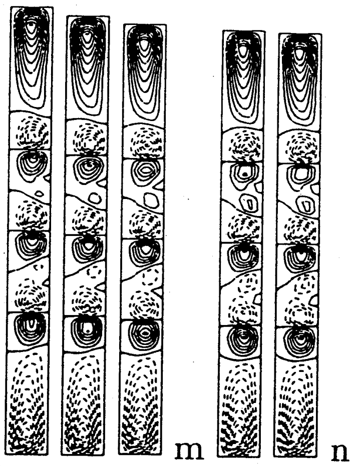

図 12: 8 渦から 10 渦への変化

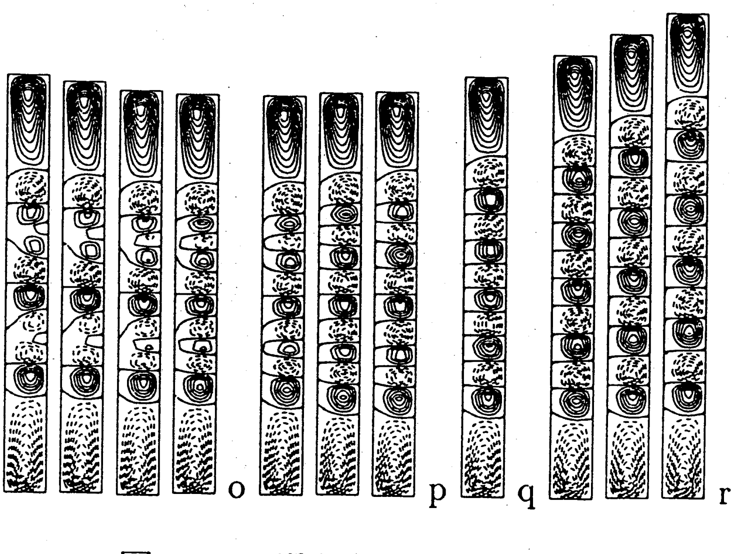

図 13: 10 渦から 12 渦への変化

チェビシェフ-チェビシェフ

縦横比 l	偶撹乱			奇撹乱		
	実部	虚部	正の個数	実部	虚部	正の個数
1.0	-7.9286	0	-	-10.279	0	-
2.0	-4.8091	0	-	-7.2224	14.326	-
3.0	-4.0369	0	-	-5.5375	0	-
4.0	-2.4243	0	-	-2.4367	0	-
4.5	-0.7740	0	-	-0.7342	0	-
4.6	-0.4893	0	-	-0.4681	0	-
4.7	-0.4565	0	-	-0.4434	0	-
4.8	0.0635	0	1	0.0475	0	1
5.0	0.6390	0	1	0.6206	0	1
6.0	2.4604	0	2	2.4633	0	2
7.0	4.8222	0	3(3)	4.8245	0	3(3)
8.0	6.9887	0	4(4)	6.9908	0	4(4)
8.5	6.1783	1.7795	6(0)	6.1793	1.7790	6(0)
8.75	6.3733	1.5743	6(2)	6.3745	1.5747	6(2)
9.0	6.4530	0.8335	6(4)	6.4540	0.8349	6(4)
9.25	7.6718	0	6(4)	7.6715	0	6(4)
9.5	7.8921	0	6(4)	7.8915	0	7(5)
10.0	7.9616	0	7(5)	7.9616	0	7(5)
11.0	8.2829	0	9(7)	8.2829	0	9(7)
4.6736	1.2297	0	1	1.1661	0	1
4.0366	1.2639	0	1	0.8516	0	1
3.675	0.3178	0	1	-0.2610	0	-
4.0	-0.7984	0	-	-1.3538	0	-
5.0	-0.9985	0	-	-1.9386	0	-
6.0	-0.7174	3.7554	-	0.72163	3.7868	-
6.2	-0.0915	3.4764	-	0.0948	3.5016	-
6.3	0.2039	3.3491	2	0.2006	3.3725	2
7.0	1.9572	2.5996	2	1.9489	2.6093	2
8.0	3.8604	1.6871	2	3.8556	1.6884	2
9.0	5.0968	1.0741	4(0)	5.0949	1.0730	4(0)
10.0	6.2353	0	4(2)	6.2328	0	4(2)
11.0	6.9133	0	5(3)	6.9139	0	5(3)

チェビシェフ-ルジャンドル

縦横比 l	偶撹乱			奇撹乱		
	実部	虚部	正の個数	実部	虚部	正の個数
4.7	-0.9420	0	-	-0.2133	0	-
4.8	0.0555	0	1	0.0431	0	1
6.2	-0.0916	3.4764	-	-0.0948	3.5016	-
6.3	0.2039	3.3491	2	0.2006	3.3725	2
6.5	0.7591	3.1156	2	0.7541	3.1356	2

表 3：固有値の実部と虚部

チェビシェフ-チェビシェフ

縦横比 l	偶撹乱			奇撹乱		
	実部	虚部	正の個数	実部	虚部	正の個数
5.79218(c)	3.9087	0	2(2)	3.9326	0	2(2)
5.59464	4.3111	0	2(2)	4.431	0	2(2)
5.43881	4.4082	0	2(2)	4.7127	0	2(2)
5.32701	4.3422	0	2(2)	4.9613	0	2(2)
5.23936	4.0428	0	1	5.2343	0	2(2)
5.38918(h)	1.4707	0	1	5.5311	0	1
5.67172	3.3544	0	1	5.5006	0	2(2)
5.89825	-0.48021	0	-	3.9835	0	1
5.9	-1.5614	0	-	1.7837	0	1
6(i)	-1.7881	0	-	1.103	0	1
6.5	-1.8865	0	-	-0.013093	0	-
7	-1.8081	0	-	-0.32929	0	-
7.5	-1.3902	-4.1335	-	-0.37102	0	-
8	-0.1053	3.5957	-	-0.10202	3.5991	-
8.5(j)	2.2762	0	3(1)	1.1796	0	3(1)
8.09967	4.0864	0	3(1)	1.4825	0	3(1)
7.82570	4.3830	0	1	1.5716	0	1
7.41194	4.3306	0	1	1.4574	0	1
7.07173(k)	3.0516	0	1	0.70464	0	1
7.07324	2.3063	0	1	0.30322	0	1
7.24314	1.3514	0	1	-0.22064	0	-
7.67936	0.51932	0	1	-0.72628	0	-
8.04631	0.16077	0	1	-0.94197	0	-
8.5	-0.09712	0	-	-1.0414	0	-
9.0	-0.20354	0	-	-0.98973	0	-
9.60471	-0.061135	0	-	-0.46887	-3.7509	-
10.3025(l)	2.2921	0	4(4)	1.9762	0	3(1)
10.01805	3.0881	0	4(4)	2.7728	0	3(1)
9.98204	3.7023	0	4(4)	3.4035	0	4(2)
9.80398(m)	3.806	0	2(2)	3.5378	0	2(2)
9.7	4.0006	0	2(2)	3.8286	0	2(2)
9.65194(n)	4.1482	0	2(2)	3.9804	0	2(2)
9.42382	4.6939	0	2(2)	4.5048	0	2(2)
9.29136	4.9296	0	2(2)	4.7041	0	2(2)
9.13136	5.1148	0	2(2)	4.7946	0	2(2)
9.01906(o)	4.868	0	2(2)	4.3473	0	2(2)
9.00998	4.4824	0	2(2)	3.9045	0	2(2)
9.1	3.1298	0	2(2)	2.6208	0	1
9.17(p)	2.8199	0	2.6208	2.4619	0	1
9.5(q)	2.2199	0	2(2)	1.2324	0	1
10	1.1722	0	1	0.519533	0	1
10.5	0.69139	0	1	0.041117	0	1
11(r)	?	?	?	?	?	?

表 4：多渦解における固有値の実部と虚部