数理解析研究所講究録
1019巻 1997年 40-60

古典確率論の歴史の諸問題

桃山学院大学　　安藤洋美(Hiromi Andoh)

(1)

Michel Loèveは『数学史要約(Abrégé d'Histoire des Mathématiques)』(デュードネ編,1978年)の第XII章で「一有名人によって一人の厳格なヤンセン教徒に対し提起された賭事に関する一問題が確率論の起源となった(ポワソン)・・・・ラプラスの記念碑的な論考『確率の解析的理論』(1812年)は1774年に始まる彼の確率に関する夥しい仕事、さらには彼以前の者たちの仕事の集大成である」と述べている。他の歴史書にも、古典確率論はパスカル・フェルマーの書簡に始まり、ラプラスによって集大成されたという論調は多い。そして古典的確率の定義はラプラスの定義と命名されている。

ラプラスの定義は1795年ラプラスが高等師範学校での講義において、そして後に『確率の哲学的試論』と題して『確率の解析的理論』の序言に組み入れられたもののIX頁に出ている。

> La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire, tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles est la mesure de cette probabilité, qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles.

「偶然の理論は同じ部類に属するすべての事象を、同じ程度に可能ないくつかの場合に分析して、いずれの場合が現実に現れるか否かが、みな同じ程度に不確定であるところの幾つかの場合に還元すること、その後で確率が問題になっている当面の事象に、都合の良い場合の個数を決定することなどから成り立つ。すべての可能な場合の個数に対するこの都合の良い場合の個数の比が、その確率の測度である。確率とは都合の良い場合の個数を分子とし、すべての可能な場合の個数

を分母とする分数に外ならない。」

古典確率論の起源から、ラプラスが確率を定義するまでおよそ 150年以上が経過している。その間、確率の定義や確率に従う諸規則が明確にされないまま、確率に関する問題が研究されて来たことは、定義・公理・諸命題と配列されたユークリッドの論理体系を手本に発展して来た数学の分野では、極めて特異と言わなければならない。

パスカルは「3点ゲーム(先に3点取った方が勝ち)で、2人のプレイヤーが32ピストルを賭ける。甲が2点、乙が1点取った時点でゲームを中止すると、どのように賭金を分配すべきか」をフエルマーと論じあった。この問題の解の過程で、確率概念は2人が同等の技量であるという暗黙の前提の中に包みこまれてしまっている。また、ゲームも特定のゲームではなく、偶然ゲーム一般を対象としたものである。

ホイヘンスは確率という語を定義しないで、期待値を計算した。彼は

「a円得るチャンスがp通り、b円を得るチャンスがq通りある。これらのチャンスが同じなら、チャンスの価値(waerde van kans)は(pa＋qb)/(p＋q)である」と述べた。ここではチャンスは無定義術語である。チャンスの値は平均収益に相当する。彼はチャンスという日常語をうまく利用して、確率を包みこんでしまった。ヤコブ・ベルヌイたちも最終的にはホイヘンスを超越することはできなかった。しかし、ホイヘンスの作り出した期待値計算によって、数多くの偶然ゲームに関する問題を『サイコロ遊びにおける計算について(De Ratiociniis in Ludo Aleae)』(1657年)の中で解いた。彼はこの本の原稿をオランダ語で書いたが、編集者である恩師のスホーテンがチャンスの値をラテン語訳し期待値(expectatio)と呼んだ。

今まで知られていなかったことであるが、ラプラスの定義はド・モワブルが1711年に王立協会の機関誌である哲学会報に載せた論文『運の測定について(De mensura soltis)』の中に既に述べていたのであった。

SI *p* ſit numerus caſuum quibus eventus aliquis contingere poſſit, & *q* numerus caſuum quibus poſſit non-contingere; tam contingentia quam non-contingentia eventus ſuum habent probabilitatis gradum: Quod ſi caſus omnes quibus eventus contingere vel non-contingere poteſt, ſint æque faciles; probabilitas contingentiæ, erit ad probabilitatem non-contingentiæ ut *p* ad *q*.

「もしもpが何らかの方法で事象が起こり得る場合の数、qが起こり得ない場合の数とするならば、起こるものと同様、起こらないものも確からしさの度合をも

つ。もしも起こる場合と起こらない場合の全部の場合が、同等に容易ならば、起こる確からしさと、起こらない確からしさはp:qである。」

ところが、ド・モワブル自身が英語で書いて1718年に出版した『偶然論(Doctorin of Chances)』には、どういう訳か、“aeque faciles”が欠落している。そして以下に与える定義は、『偶然論』第二版(1738年)や第三版(1753年)にもそのまま採録されている。

1. THE Probability of an Event is greater or leſs, according to the number of Chances by which it may happen, compared with the whole number of Chances by which it may either happen or fail.

2. Wherefore, if we conſtitute a Fraction whereof the Numerator be the number of Chances whereby an Event may happen, and the Denominator the number of all the Chances whereby it may either happen or fail, that Fraction will be a proper deſignation of the Probability of happening.

「1つの事象の確率とは、その事象が起こり得るチャンスの数を、その事象が起こるか起こらないかの総数と比較して、より大きくなったり、より小さくなったりするものである。

されば、1つの事象が起こり得るチャンスの数を分子に、その事象が起こるか起こらないチャンスの総数を分母に、1つの分数を構成するならば、それは成功その事象の起こること］の確率を適正に示している。」

しかし『偶然論』の中では、「同等に容易ならば」という言葉が定義に挿入されているかのように、問題が解かれている。従って、ラプラスの定義はド・モワブルの『運の測定について』以後、定着したものと思われるので、ド・モワブルの定義と呼ぶのが適切だと思われる。

(2)

古典確率論が生成されるまで、歴史上の問題として考察されるべきは以下の通りである。

パスカルが分配(点)の問題を確率の問題ととらえて以来、ド・モワブルが確率を定義するまで、およそ70年間、なぜ確率は無定義のまま使用され続けて来たのだろうか？

パスカルは具体的な偶然ゲームを取り扱わないで、抽象的な偶然ゲームに考察を絞ったのはなぜか？

さらにもっと根本的に、数学の世界になぜ確率論は遅れて17世紀に登場したのであろうか？

そもそも確率のモデルは何だったのか？賭事の理論か、保険統計など集団現象の研究理論か、観測値の偶然誤差の処理から生じたのか、判決など法律による決定方式の確立のためか、神の存在と言ったような形而上学的な問題から生じたのか？

それらについての明確な答は今のところ定説となったものがない。

（3）

確率のモデルが賭博だったというのは、モンチュクラが1802年彼の『数学史』II巻380－381頁で述べたことだった。彼は幾何学的精神が決定論に基づく近代合理主義の支柱とすれば、賭けの精神こそ非決定論の確率を生み出す支柱であると述べた。賭事を確率論のモデルと考え、その起源はいつかを論じた最初の人はF.N.ディヴィットである。彼女の1955年の論文「Dicing and gaming」と1962年発行の『Games, Gods and Gambling』は遥か昔のヘロドトスの『歴史』の記述から説き起こし、娯楽としての賭事のみならず、占いや神意を伺うのにも偶然のカラクリ(mechanism)が用いられたことを、『旧約聖書』から引用して述べている。賭事がギリシャ人たちによって哲学の対象とならなかったのは、当時最も流行していた羊の踝の骨(アストラガルス)のゲームは子供の遊びとされた。遊びには、子供に関するもの、子供用のものとして$\pi\alpha\iota\delta\iota\alpha$、ふざけることを意味する$\alpha\theta\upsilon\rho\nu$、試合や競技を指す$\alpha\gamma\omega\nu$の３通りがあり、プラトンの本の中にも偶然ゲームを餓鬼どもの遊びと半ば軽蔑して表現していることからも、このことは分かる。大人はアゴーンの形式をとる弁論術にこそ命を賭けるべきだとギリシャ人たちは考えた。

賭事は時に身の破滅をもたらすため、多くの古代国家が禁止する処置をとったにもかかわらず、ローマの皇帝たちも賭博をしていたことがスェートニウスの『ローマ皇帝傳』に出ている。時の経過と共に、キリスト教の伝道が広がるにつれ、アウグスティヌスの「すべては神の摂理に従う」[『神国論』V巻, 11章]ので、「randomなものは何もないし、チャンス(偶運)なるものは存在しない」[『八十三問題集』という考え方は社会に浸透した。そして賭博は異教徒のものとされた。サイコロのある目の出現頻度の安定性を把握したと思われるのは、ガリレオの論文「サイコロ遊びについての考察」(1642年以前)まで待たねばならない。3個のサイコロ投げで、9の目と10の目の出る組合せはともに6通りなのに、経験によると9の目より10の目がよく出るのはなぜかというトスカナ大公の質問に答えたのがガリレオである。トスカナ大公はサイコロ投げでのそれぞれの目の出現頻度の安定性を感じ取ったが、それ以前に頻度の安定性を問題にした人を見出し得るかどうかが今後の問題

となるが、冷静な鑑識眼をもって賭事に望むというのは無理なのかも知れない。

ここで注目すべきは、地動説を唱えたとはいえ、ガリレオは異端審判に掛けられたという事実である。パスカルの点の問題の発祥はパチョーリの『算術・幾何・比および比例大全』にある。パチョーリはヴェネティアにいたとは言え、カトリックの僧侶である。従って賭博は非道徳という観点でゲームに対しなければならぬ僧侶として、点の問題で具体的なゲームをモデルにすることはできなかった。当然、ゲームは抽象的なものにならざるを得なかったし、具体的なものを匂わせるとすれば洋弓競技にすぎなかった。パチョーリの問題を不十分ながら論じたカルダノは賭博百科の『サイコロ遊びについて』を書いたり、イエスの星占いをしたりしたこともあって、宗教裁判に掛けられた。パスカルも所属するヤンセン派が破門されたし、フェルマーは非常に慎重に事を運び、点の問題に関するパスカルの手紙や自分の草稿を残していなかった。パスカル以後のホイヘンス、ベルヌイ、ド・モワブルらはいずれもプロテスタントであり、偶然ゲームに関する研究も時に命懸けのことであった。

宗教的制約が16世紀まで確率計算の発展を妨げた大きな原因の一つである。

(4)

もしも宗教的制約がなかったとしたら、偶然ゲームの数学的研究はもっと早くから起こったかもしれない。Ian Hackingの『確率の出現(The Emergency of Probability)』(1975年)によると、前5世紀頃からまとめられ始めた『マハーバーラタ』の挿入説話『ナラ王物語』の中に統計的推定の話が出ていることが分かる。国を賭けて賭博をした結果、身分を失ったナラ王が、ある王の御者として仕えた。ある旅の途中、大きな木の枝についている果実の数は2095個だと言い当てた。ナラ王は一晩中かかって果実の数を数え、王の言うことの正しさを検証した。王はサンプルの小枝になる果物の数（標本平均）から母平均を推定したのだが、実は「サイコロの科学」を勉強すれば訳はないと、王はナラ王に語ったという。もしもこの説話が本当だったとしたら、インドでは確率計算が紀元前に行われていたことを意味する。だが、「サイコロの科学」を裏付ける数学の文献は見つかっていない。

(5)

大数の法則の粗形である事象の出現頻度の安定性が把握できるようになるのには、ゲームの道具の完全さが求められねばならない。F.N.David は初期のサイコロが不完全であったこと、アストラガルスもまた完全に同型というには程遠いものだったことを確率計算の遅れの原因にあげている。出現頻度の安定性が把握さ

れたとして、次に事象の生じ得る場合の数を求めるのに、組合せ論が必要になる。おそらく、最初はあらゆる場合の数を列挙した(ガリレオもそうであった)と思われる。しかし要素の数が多くなるとき、それらの要素の組合せの数の計算は厄介である。n!ですら、n≧10ならば、天文学的数値になる。従って、組合せ論の諸公式はかなり古くから知られていたが、インド記数法が自由に使える時期まで、組合せ論が発展しないのは言うまでもない。ヨーロッパでインド記数法が使用されていくのは14世紀から15世紀にかけてである。そして17世紀初頭、組合せ論はメルセンヌ神父によって人々の共通認識が十分できる程度にまで構築されていた。従って、組合せ的確率計算が誕生するとすれば、16世紀から17世紀にかけてでなければならなかった理由の一つである。

(6)

16世紀から17世紀にかけて確率計算が生まれた理由として、L.E.Maistrovは経済的なものをあげる。14世紀ヨーロッパが世界へ拡張し、通商の範囲を広げると共に、黒死病もまた何年かおきに猖獗を極めた。死亡表が発行されたのは1517年のことである。要するに資本主義社会が始まった頃に、商取引や金融取引が保険数学の演算と結び付き、人口調査から得られる情報と相俟って、与えられた時間間隔毎の死亡確率や、所与の年齢の平均余命といった概念が、確率計算の基本概念の形成に影響を与えたというのが、唯物史観をもつMaistrovの説である。

(7)

ところで、確率の定義が長くなされてこなかった理由として、17世紀中頃から probability が、可能性の度合としての確率と、信頼性の度合としての確率の二面をもったからだというのが、I.Hackingの説(1975年) である。確率のもつ二面性はもっと古い根源をもつとするD.Garberや S.Zabelの説(1979年)説もある。いずれにしても、可能性の度合としての確率の測度が数学者たちの手によって検討され始めた頃、宗教界では信頼性の度合としての確率概念が決疑論(casuistry)に中に瞥見される。決疑論とは個別の倫理問題を解決する方法を書き記したものである。カトリック教会の前衛であるイエズス会は当然籤や賭博を禁止するのにやぶさかではない。イエスが十字架にかけられた時、異教徒のローマの兵士たちがイエスの着物を籤引きで分けたのに対するキリスト教徒の怨念が『新約聖書』に書かれているので、籤は忌むべきものだった。そのことに対し、プロテスタントの第二世代は「事象の偶然性は単にそれ自体起こるのではなく、神の特別の、また直接の摂理の結果だ」(Thomas Gataker;1619年)と述べ、いかなる偶然事象が神の摂理の結果起こるのかを論じた。一方、イエズス会は、会士たちのいい加減な

行動を蓋然説によって正当化した。イエズス会の蓋然説(probabilisme)をPascalは『プロヴァンシャル』(第六の手紙)で皮肉っている。「ミサをあげるように頼まれて金を貰った司祭が、さらに別の人からも金を貰って頼まれたとき、ミサは一回で良いのか？」イエズス会の偉い人達の見解は賛成意見も反対意見もどちらもが蓋然的といってよい場合の一つであると。祭壇につかえる者が祭壇からのあがりで暮らしを立てるのは恥でないから賛成というもの；一方司祭は祭壇から恵みをいただくべきで、それを蔑ろにしてはいけないので反対というもの。さまざまな意見はいずれも、肯定にしろ否定にしろ各々ある程度の蓋然性をもっているのでそのどれに従っても良心を痛めずにすむ。肯定と否定のどちらもが同じ意味において正しいのではなく、ただ蓋然的で、それで確かだという。このような主観的な確率の捉え方にPascalは激しく攻撃し、『パンセ』の中で不信者を信仰に導くべく、神の存在を賭けとして、神の存在に賭ければ無限の利益があり、そうでなければすべてを失うとする論法で、それぞれの可能性の割合を1/2, 1/2とした。

このとき以来、信頼性の度合と可能性の割合という二面性の克服・融合をどうするか巡って多くのためらいがあり、信頼性の度合をかなぐり捨てたド･モワブルが確率を定義できたのである。

(8)

ド･モワブルの確率の定義には、probabilitasとかcontingentiaeという言葉が出て来るし、ホイヘンスの期待値にはkans(chance)という言葉が出てくる。これらは随分古い起源をもつ。

ギリシャの哲学者たちは偶然ゲームには関心をもたなかったけれども、偶然性に関しては哲学的議論を行なった。かれらは「尤もらしい(plausible)」,「確からしい(probable)」という言葉にεἰκόsという言葉を宛てがった。この言葉は、εἰκα(•••・のようである)の現在分詞で、ラテン語ではverisimilitudo（本当のように思われること)、ドイツ語でWahrscheinlichkeit(蓋然性)にあたる。真理の特性の一つは、我々がそれを認めて受け入れるか、それとも認めずに拒否するか、いずれかである。それに対し、εἰκόsは確信に思い違いをさせることがある。アリストテレスは『詩学』1460aで、εἰκόsはἀπίθανον(信じにくいこと､納得しにくいこと)と対比させている。

イギリスのスコラ哲学者で唯名論の創始者**オッカムのウイリアム**(William of Ockham;1285－1349?)は『論理学全集(Summa Totius Logicae)』の中で

「すべての人々によって真であるか、大多数の人々にとって真であるか、あるいは最も賢明な人にとって真であるか、いずれかである命題を蓋然的命題とい

う」(83頁)

と述べている。この文章はアリストテレスの『トピカ』(100b20)から引用されたもので、ウイリアムのいう蓋然的命題(probable proposition)をアリストテレスは通念(ἔνδοξοs)と呼んでいる。つまり

通念＝蓋然的命題＝一般に受け入れられるか、信じられること(臆断)

である。ウイリアムはさらに続けて

「この記述は次のように理解せねばならない；蓋然的命題は、それらが真で、必然ではあるけれども、にもかかわらず、それら自体知られていないし、それら自体によって既知の命題から三段論法の過程によって得ることのできるものでもなければ、経験から明らかに分かるものでもない・・・・それらは真であるが故に、それらはすべてに対し、あるいは大多数に対して真であるように思われる」(『論理学全集』83頁)

と述べている。前者の「エイコス」は主観的な判断、後者の「エンドクソス」は憶測での判断ではあっても、計量的判断も伴う。

(9)

またアリストテレスは「修辞推論は[1]“ありそうなこと”どもからの推論か、[2]“徴候”どもからの推論である。・・・[1]“ありそうなこと”は一般に納得される前提である。・・・・たとえば、“嫉妬する人々は憎む”とか“恋する人々は愛する”とかの類である。これに対し [2]徴候は(イ)必然的に論証の前提たること、あるいは(ロ)一般に納得される論証の前提たることを意図する。それがあると他の事実があり、それが生じると他の事実も、それより先か、後に生じてきた・・・・かの徴候である」[『分析論前書』70a]で述べている。これでεἰκόsは一般的に是認された命題で、どんな種類の証明にも基づかない実証的な命題である。一方徴候から出発した蓋然的命題は主語と述語が因果関係で結ばれて引用されるので、高度の確実さをもつ。

にもかかわらず、プラトンもアリストテレスもεικοsは実証性に欠けると指摘している。

キュレネの**カルネアデス**(Carneades;BC.213?－129)は

「全くのイデアにすぎない完全なる確実性を補うたに、我々は蓋然性(probabilism)をもち、かつそれで十分である。我々は蓋然性のある度合を区別し、そして行動の規則を設定し、その規則によって、もしも何かが非常に蓋然的(probable)であったなら、そのときそれは実際上確実と見なすべきであり、人はそれに応じて行動すれば良い」

と述べたという。これはカルネアデスの弟子**クレイトマコス**(Kleitomakhos ; BC. 186?－109)が２次資料として残したものを、19世紀の哲学者ブロシャール(V.C.L. Brochard;1848－1907)が『ギリシャ懐疑学派』(1887年)の中で紹介している。このように可能性の多義性が蓋然性の概念の発展にとり最初の障壁となった。つまりある事象の随意性、もしくは非決定性という考え方、事象に非物理的性質・心理的傾向がいつも影響し得るという考え方が、同等の可能性という仮定を突き破った。

(10)

古典確率論の本質的基礎は、排反事象に関する確率の加法性質である。ギリシャ時代でもいくつかの排反な結果がある条件の下で可能であることは分かっていた。仮言的な離接命題はピュタゴラスの偶奇論（その数は奇数か偶数のいずれかである）とか、二量の全順序（ある線分が他の線分に等しいか、大きいか、小さい）というような二成分や三成分の離接は取り扱われていた。各成分の真偽がはっきりしている場合のみをギリシャ人たちは取扱かった。各成分の真偽に可能性が付与されている場合は避けて通った。述語「真である」とか「真でない」が事象の実現まで意味をなさない場合があることも、アリストテレスは知っていた。「明日海戦が起こるのは、真か偽かいずれかである」という二者択一の必然性は認めるが、「明日海戦があるだろう」ということの真偽が今日既に分かっているとは考えていない[『命題論』19ª30]。それに反し、完全に決定できる未来の予測だけは、確認できる前に真偽を決めることができる。例えば天体運行の例である[『生成消滅論』338ᵇ14]。このようにアリストテレスはラプラス的な決定論で予測できない場合を一部含んでいる。

アリストテレス以後**エピクロス**(Epikouros;BC.341-270)学派は不確定の考え方を説いた。この学派の一人である**ルクレティウス**(T.L.Carus;BC.94?-50?)は

「原子は自身のもつ重さで、空間を下に向かって一直線に進むが、その際全く不確定の時に、また不確定な位置で進路を少し外れ、運動に変化をもたらすと言える程のそれ方をする」[『物の本質について』Ⅱ巻,217－219頁]

と述べているが、原因が分からずに存在するこのズレは“同等に可能な場合”というものを明確に定義しようとする考え方を排除する。

一方、**ストア**学派は**プルタルコス**(Lucius Mestrius Plutarchus;50?－120?)は

「可能性とは、たとえそれが起こらなくても、何物かによって生起を妨げられないこと」[『ストア学派の矛盾について』]

と述べた。アフロディシアスの**アレクサンドロス**(Alexandros Aphrodisias;2世紀の

人)は

「２つの互いに排反な可能性ＡとＢが存在すると仮定する。そのときＡが実現しないことは、Ｂが実現することを意味する。それゆえ、Ｂを生起に導くところの因果関係がＡの生起を妨げる根拠であり、ＡとＢの両方が因果の方としては然るべきものをもっている。しかしながら、Ａは生起しなかったけれども、可能なものと仮定できるという事実は、未来の、すなわち完全な因果関係を知らないことに原因があるとされている。可能性のカテゴリーに意味を与えるのもこの無知であるし、首尾一貫した決定論者として“同等に可能な場合”の存在と、そのうちの一つのみが起こる筈であることが必要条件で有るとするのもこの無知である」[『運命について(De Fato)』10章]

と推論した。これは全くラプラスの考え方と同じである。このようにいくつかの排反な結果が、ある条件の下で可能であることは明らかにされたが、その次の段階、ある確かな結果の可能性をすべての可能性の和で割るところで行き詰まってしまった。その理由は次の２つと思われる。

(1)頻度の安定性を直観的に把握させるゲームに対する哲学者の軽蔑。

(2)記数法の不備と、分数概念（乗除の概念）の欠如

(11)

アリストテレスは偶然性についてかなり明確な考えをもっていた。彼は偶然とは何かという問題を『自然学』の中で論じている。

「テュケー(τύκη；偶運）とかアウトマトン(αὐτόμᾰτον；自己偶発）とかも、原因のうちに数えられている。すなわち多くの物事が偶運とか自己偶発とかによって存在するとか、生成するとか言われている」[『自然学』Ⅱ巻, 196b 31-32]

というように、偶然事象は２つに分類される。テュケーとは、ある事柄が“偶然に”起こったとか、それが起こったのは“運”だという場合、その物事を起こしたもの(原因)と考えられるものをいう。アウトマトンは、なにものかが、他に別に原因らしいものが見当たらず、ひとりでに生じたような場合を指すが、それよりももっと偶然的・非科学的に実体化された原因を指す。

アリストテレスは偶運も自己偶発も、自然による、また思想による何ものかを原因としているが、原因の数は不定であるとする。そして

「明らかに、本質的なものが存在するのと同種の原因と原理は、偶運には存在しない；というのも、もしも存在すれば、すべてのものは必然のものであるから‥‥そして、起こるとか起こらないとかいう正真正銘の偶運と可能性は、事

象の範囲から全く除外されるであろう・・・・偶運の科学(επιστημη;scientia)など存在しないことは明らかである。なぜなら、すべての科学は常に存在するところのものか、大部分存在するところのものであるから。・・・しかし偶運的なものはかかる規則に反するものである・・・・我々は偶運的なものは科学的に取り扱えないと見なさねばならない。」[『形而上学』VI巻,1026b3,1027a20;XI巻1065a6]

こうして科学として偶然性が研究されることは否定された。

(12)

科学として偶運を研究することはアリストテレスによって否定されたけれども、偶運は宗教の中では生き残った。**ソクラテス**は

「この人達は必然性の娘、運命である。彼女達は白い衣服を着、頭に花の冠を付けている。ラケシス、クロート、アトロポスは魅惑的な声でハーモニーを響かせた。ラケシスは過去を、クロートは現在を、アトロポスは未来を歌う。これらの運命の女神は、まず魂をクロートの所へ導き、彼女の手に任せ、紡ぎ糸の開店に見守らせて籤で決まった運命を決定ならしめる。クロートと会った後に、それから今度は、アトロポスが糸を紡いでいる所へ連れて来て、紡がれた運命の縒りが戻らないようにする」[プラトン『国家編』X巻,617-620]

と述べている。こうして人間の生命の糸を紡ぐ神クロート、その糸の長さを決める神ラケシス、鋏でその糸を断ち切る神アトロポスの性格が出来上がった。そしていつの頃からか、彼女達はテュケー(Tyche)と呼ばれるようになった。英語のchance、オランダ語のkansの語源である。

マルティヌス・カペラ(Martinus Capella,5世紀,カルタゴの人)は運にまつわる哲学的含意を神話的な表現で人々に認識できるようにした。

「宇宙は天上の元老院により支配され、元老院会議にはアドラスティーア(nymph,超自然的霊格)や3人の運命の女神が出席していて、ゼウスやヘーラーのすぐ隣に座る。これらの権力者たちは、いつまでも天上のゼウスの許に留まれる。アドラスティーアが定める法は、物質世界で威力を発揮するが、同時に神々にも拘束力をもつ。そして3人の運命の女神の仕事は、集会が催される時に、ゼウスの命令を必然的に従わざるを得ない出来事の法則を示している。幸運の女神ネメシス(Nemesis)も神々の秘密会議に参加するが、予期せぬ行動をして皆をびっくりさせる。彼女は不測の突発事故を誘導するので、記録するモイラ(運命の神)たちの邪魔になる。彼女はそれだけで満足せず、予測可能な因果の何らかの支配をも主張するので、因果応報の女神とされた。」

この幸運の女神ネメシスは、ローマ帝国時代に入ると、**フォルトゥーナ**(Fortuna)と呼ばれ、英語のfortuneの語源となった。しかし一方で、テュケーとフォルテューナは同一の概念の神であるという説もある。古代人たちは、見かけ上、我々の生命に影響を与える手に負えない要素を“運命”と分類し、運命はより高い存在によって支配されているという認知を行なった。

(13)

2世紀の地理学者**パウサニアス**の『ギリシャ誌』の中に「アルゴスにテュケーの寺があり、パラメデスが発明したサイコロを献納した寺だという記述がある。また**キケロ**(M.T.Cicero;BC.106-43)も『占いについて(De Devinatione)』の中でイタリアのプラエネステにフォルトゥーナを祭る寺があり、籤がオリーブの木箱に保存されていると書いている。キケロは

「サイコロ投げほど、予測不可能なものはない。それでも勝負事をする人なら誰でも、あるときにヴィーナスの目を出すことがあろう。時には2回も続けてその投げを出すこともあろうし、3回出すこともあろう。このことは全く幸運だったと思うのではなく、ヴィーナス神の介入で起こったと信ずる程、我々は意志薄弱になりつつあるのだろうか？」[『占いについて』II巻,121節]

と嘆いた。彼はヴィーナスの投げの連が起こる外的な原因を探すことはできないこと、勝負事を十分長く続けるならば稀な事象も起こるだろうということ、すべての予言と占いを神の意志とする解釈はしないこと、などを述べた。蓋然推測(probabili conjectura)などという言葉が初めて使われたのも、このキケロの本においてである。

「大体、通常起こるところのもの、あるいは人間によくある信頼の一部であるもの、あるいはこれらの質に少しでも似ているものを含むものは、かかる類似性が真か偽かいずれであろうとも、確からしい。」[『独創力について』46]

この場合、事象の出現の頻度と、事象の信頼が、ともにprobabilis(形容詞)の名称の下に括られている。

偶然事象について、古代で最も現代的な解釈をした人はキケロであった。彼はギリシャ時代以来の多神教の世界に生きていた。この後、ローマ帝国においてキリスト教が勢力を得るとともに、アウグスティヌスらの神学により、キケロ風の偶然現象に対する感覚は急速に萎んで行く。こうして、古代蓋然論は没落した。

(14)

アウグスティヌスの神学は中世のヨーロッパに計り知れぬ影響を及ぼした。それは千年以上にわたり、ヨーロッパの最も重要で、絶対的な神学体系だった。数

学的思考に関する限り、中世は概して澱んでいた。数学は寺院数学として、祭日決定の計算とか寺院建設に関する最小限の知識とかが、修道院から修道院へ、神学の中心から別の神学の中心へと、伝えられたにすぎない。共通語としてのラテン語が話され、学者たちは西欧全域にわたって分布し、また放浪した。このようなさまよえる学者の旅は、大学が逐次設立され、教授免許制度が導入された11世紀頃には終焉した。

中世は相変わらず、賭博は厳しく禁止されていた。ローマ教皇や世俗の王たちは何回も禁止令を出しているが、賭博の習慣はなくならなかった。1350年頃にはカード・ゲームがオリエントの方から輸入された。アストラガルスに代わり東方からやってきたサイコロを使うゲームも「ザラのゲーム」としてヨーロッパに再上陸した。ザラとはアラビヤ語のal-zharに由来するサイコロ・ゲームのことで、フランスに入り、hazart, hazardとなり、後に偶然を意味するフランス語に変化する。これらのゲームはいずれも十字軍とともにヨーロッパにやってきたのは皮肉である。

14，15世紀になるとダンテの『神曲』や、チョーサーの『カンターベリ物語』、ラブレーの『ガルガンチュワ物語』など文学の中に、ゲームの情景や、ゲームの名称などの記述が見られるようになる。これらを見ると

(1) 他愛のない賭事(gaming)は法を無視して民衆の支持を受けていたこと；

(2) 下層あるいは中流階級のみならず、賭事は教養ある階級や支配階級にまで及んでいたこと

は、貨幣経済の発展と伴う不可避の現象となった。この事実から、利口な現実主義者たちは

(3) 賭事が不正義だとしても、撲滅できないのなら、悪を転じて善となす方法を案出しよう

とした。それはサイコロ投げの結果や、引いたカードの数字が神意の現れと見て古典古代の占いの復活を図ろうとした。そんな雰囲気の中で、12－13世紀頃３個のサイコロの目の出方をすべて列挙するという、組合せの知識が再発見される。さらにもっと賢明な合理主義者たちは

(4) 賭事を神事や占星術的意味付けから救済し、神秘のヴェールをはいで、純粋に科学的な思考のみで考察しよう

とした。そのような合理主義者として15世紀のパチョーリ、16世紀のカルダノ、タルタニア、ガリレオなどを上げることができる。

「賭事がよしんば悪事だとしても、勝負をする人はたくさんいるのだから、そ

れは必要悪と見なすべきである。そんなわけで、賭博は不治の病のようなものであるからこそ、一人の医者により論じられるべきものである」[『サイコロ遊びについて』5節]

というカルダノの言葉は、このことを雄弁に物語っている。

ところで、このような合理主義者が出て来る前に、偶然論にとって千年以上にわたって無視されてきた不毛の偶然論の土壌を耕し始めた人達の努力も無視する訳には行かない。

(15)

アリストテレスによって否定され、アウグスティヌスによって枠を嵌められた偶然の科学が16世紀に誕生して来る下地は、3つの方向から作られた。一つは賭事の経験が豊富に蓄積されて来た。第二は地中海沿岸からヨーロッパ内陸部にかけて広く分布したユダヤ人の影響である。第三はカトリック内部の意識変革である。

すべてのユダヤ人は神ヤハウェと同じ契約の中にあり、契約によって成立するユダヤ人たちの生活共同体としての具体化して、彼らに一様に妥当な権利と義務の表現としての律法があるというのが、考え方の基礎だった。しかも律法は元来籤を引く(籤を投げる)ことにより与えられた指図だった。籤を投げることにより人為的に操作されないという意味で、公平な結果を人々は期待したであろう。同じ契約、一様で妥当な権利・義務という宗教的概念が、無作為性・公平性・等確率性の概念に転化して行ったとしても不思議ではない。まして政治的に弾圧された民族にとって、公平という語ほど、実感をもつ言葉はない。『旧約聖書』には数多くの籤の例が出ている。

「すべての産まれた子の半分は男で、半分は女だということは、確実で必然である。というのは、種の保存のために、創造主がそのことを研究したのだから」

とラビたちは言う。彼らは男女出生の等頻度は経験的に知られた既知の法則であると同時に、種の保存のために設計された神学的法則であるとした。神学的法則は、そうあって欲しいという願望を、そうあらねばならぬという強制にまで高めたもので、極めて主観的である。産まれる子が男か女かの対立仮説を採択するのに、その判断は主観的であるが、しかし神学的法則によってその確率は 1/2である。そのことを等頻度の形、半々という言葉で表現した。

また、主観的確率は法廷での裁判官の判決に証人が及ぼす影響の中にも見られる。法廷に出される証拠や証言の相対的有効性の測度の客観的基準はなく、その採否は裁判官の心証による。だからこそ、真理の探究者は、義務として課せられ

る責任の重さに戦慄を覚える。

このようなことは中世最大の律法学者**ラビ・モーゼス・ベン・マイモニデス**(Rabbi Moses ben Maimonides;1135?－1204)の『迷える者の案内』II部、23章に載っている。マイモニデスにより代表されるユダヤ人学者の間では、いくつかの仮説のうちの一つを採択するとき、蓋然性の測度としての確率概念を朧げながらつかみつつあったように思われる。主観的な信頼の度合と、安定した長期にわたる頻度の傾向という客観的な仕掛が混在したものだった。

(16)

ヨークの**アルクィン**(Alcuin;735?-804.5.19)は「神学はその教義に対してではなく、他から学ぶべきである」という考え方の下に、『若者の心を鋭くするための諸命題(propositiones ad acuendos Juvenes)』を書き、数論を神学の領域へ持ち込む試みをした。

信仰と理性を統一し、異教徒たるアリストテレスをキリスト教徒に改造するという大胆な試みをしたのが**トマス・アクィナス**(Thamas Aquinas;1225－1274.3.7)である。彼は『神学大全』の中で偶然性を縷々説明している。偶然と必然との間の関連について次のように述べている:

「非必然的(contingens)ということは、およそいかなる場合でも素材(materia)の面に基づく。けだし、非必然的なものとは、“存在することも、存在しないことも可能なもの(quod potest esse et non esse)”のことであり、しかるに可能態は素材に属する。これに対して必然性は形(forma) を伴う。すなわち形に基づくものは、必然的な仕方で内在するのだから。しかし素材は個体化の根源であるし、これに対し普遍的概念は個別的素材から形を切り離し、抽象することによって始めて得られるものである・・・・非必然的なものは、それが非必然的なものである限りにおいて、直接的には間隔によって認識され、間接的には知性によって認識される。しかし非必然的なものにあっても、その普遍的・必然的な特性は知性によって認識される。それゆえ、“知識される事柄(scibilia)”の普遍的特質に着目して言えば、すべての知識(scientia)は必然的なものにかかわる。だが、知識される事柄それ自身に着目して言うならば、この意味では、ある知識は必然的なものにかかわるし、ある知識は非必然的なものにかかわる。」
[86問題、第三項]

ここで言う偶然性にかかわる知識(学)には、自由意志に基づく人間活動 (actus humani)に関する倫理学、生成・消滅すべきものを扱う部分として自然学がある。こうして神の御手のもとに抑圧されていた偶然性の考え方は、アクィナスによっ

て、市民権を回復する契機にはなった。

「哲学者たちが自然理性によって真理を知り得た場合には、聖なる教[神学]は彼らの権威をも用いる・・・・しかし聖なる教えはかかる権威を、いわば教えの外の蓋然的論拠(argumenta probabilia)として用いるに過ぎない。」[『神学大全』I部、問1,7頁]

ここでいう蓋然的論拠とは、絶対に真であるということではなく、真だという意見(臆断;opinio)に過ぎない。

「もしも論証的学によって認識できることが、何らかの蓋然的理由によって捉えられ、臆断として持たれている場合は、そのことは把握されていない。例えば、三角形の内角の和は２直角に等しいことが論証によって知られる場合、このことをその人は把握している。ところが、もしも誰か、知者や多くの人々にそう言われたからというだけの理由で、蓋然的な仕方でこのことを臆断として抱いている場合には、その人はこの事を把握していない。」[『神学大全』I巻,12問]

トマスのprobabilisは臆断確率(opinion-probability) に意味に取られ、確実でなく、証明されず、科学的でないものと捉えられている。言い換えると精度を問題にしないで、覚醒もしくは意識を含む意味をもち、確信の度合と同じものと考えられている。このことについて、**バイルン**(Edmund F.Byrne;1933－　)は

「臆断に対して確からしさを付与することは、いろいろな含蓄をもつものである。まず第一に、それは所与の臆断を受け入れた人々の権威が引き合いに出される；そしてこの観点から、“確からしさ”は受け入れられた命題に関して実証(approbation) を示唆するし、それを受け入れた権威者たちに関しては正直さ(probity) を示唆する。第二に“確からしさ”は件の臆断を支持して提示された推論にかかわりがある：そしてこの観点から(必ずしも論証されないけれども)probability、すなわち証明されるための可能性を示唆する。第三に、“確からしさ”は件の命題が単に蓋然的(probable) である限り、まさしく若干偽であるかもしれぬ(perjorative)という含みも帯びている;なぜなら、この観点から命題は試みのもの(probationary)にすぎないのであって、全く科学的である命題のように、厳密に証明されたものではない。」[『確率と臆断』188頁]

トマス・アクィナスは非必然性(contingentia) の問題に関して、頻度による確率の萌芽のような考えも述べている。『イザヤ書』41,23の解釈として「未来を知るとはどういうことか」を論じているところがある。

「未来は２通りの仕方で認識される。第一には、その原因(causa) においてである。この場合それが、未来の事柄といえども、その原因から必然的に(ex necessitate)起こり来るものである限り、確実な知識(certa scientia)をもって認識される。“太陽が明日昇る”というようなことは、すなわちそれである。だがもしもその原因から大概の場合において(ut in pluribus)起こり来るのでしかないような事柄であれば、これは確実性(certitudo) をもって認識されず、憶測(conjectura)をもって認識されるにとどまる。医師が病人の健康を予知するような場合がそうである・・・・それはちょうど、病気の原因をより的確に知っている医師であればある程、それだけ病気の先行きをよりよく察知できるのに似ている———また、もしもその原因からしてごく少数の場合において(ut in paucioribus)しか起こらないような事柄であれば、これは知識されることの全くないものである。偶然的な事柄(casualia)、運・不運による事柄(fortuita)がそれである。」[『神学大全』I巻,問57]

以上の説明の下線部は一種の数学的解釈で、朧げながらカルナップのいう(確率)$_2$に相当すると、バイルンは指摘する。

トマス・アクィナスは今日的な意味での確率概念をもっていた訳ではない。しかし偶然の教理を考えることが異端とは言えない下地は作った。また

「・・・・他人を疑うことによってその人を誤って判断するという危険を犯すよりも、他の人々に善意をもつことによって欺かれる危険を犯す方がずっとよい。」[『神学大全』II部、問25]

というように、第一種過誤と第二種過誤の概念も紹介されている。しかしこの過誤が量的に扱われるのは、20世紀に入ってからのことである。

(17)

こうして、16世紀に入る頃には、確率計算を作り上げるもろもろの障害は排除されていたように思われる。しかし主観的な面と頻度による客観的な面を総合した形で確率を定義することは、依然として難問題だった。パスカルもホイヘンスも定義を避けて通る工夫をしたことは前述した。ヤコブ・ベルヌイは偶然ゲームに関する問題には、ホイヘンスのチャンスの値を用いたが、そうでない問題では主観的確率を処理しようとした。そのことは彼の死後出版された『推論術』(1713年)の第４部は「社会・道徳・経済への応用」となっている。

第一章は「事象の確実さ、確からしさ、必然性、偶発性についての最初の準備」と題されており、初めてprobabilitasという言葉が定義される。

「確からしさ(probabilitas)は確実さの程度で、全体と部分の関係のように、確実さとは異なる。実際、全体とか絶対的確実さが文字a、または単位１で記される。議論のため、５の確からしさ、もしくは５つの部分からなると仮定し、

そのうちの3つがある事象として存在するか、将来存在することを表すなら、そのとき事象は、沿うでない事象に対して確実さの3a/5、または3/5をもつという。」[『推論術』211頁]

こういった考え方で確率を数値表現しようという考えは、17世紀後半から人々の意識の中に芽生え始めたらしい。ライプニッツも1687年プラッシウス(Vincenz Plaaccius;1642-1699)宛の手紙で

「確実さ、もしくは真理を全体として、私は確からしさを部分として考えます。すると確からしさと真理との関係は、鋭角と直角との関係と同じようなものです。このことが数学の限界でしょう」[Dutens編『ライプニッツ全集』IV巻,36頁]

と書いている。全体と部分関係を数で表すと、**あるもの**の分数ということになる。この**あるもの**は客観的確実さでも主観的確実さでも、どちらでも構わない。

(18)

第二章は「知識と推測について・・・」と題がついている。

「確からしさは論拠の重さ(pondere argumentorum)に伴う数(numero)から評価される。すべての点から見て、その論拠はある事柄が過去・現在・未来に存在することを証明して見せるものである。重さとは証明の力を意味する。」[『推論術』214頁]

確からしさを生ずる論拠は、もちろん偶然論拠である。偶然論拠にもいろいろな方があることは、第三章「一般的論拠について、事象の確からしさの計算における論拠の重さに着手すること」で論じられる。

しかしベルヌイのいう論拠の存在とはいかなるものか、現在でははっきりしない。次にベルヌイは純粋論拠と混合論拠の2通りの論拠があることを説明する。

「・・・・ある事柄はある場合には証明し得るが、他の場合には積極的に何も証明していないようなものを純粋論拠(argumentum pura);その事柄がある場合には証明され、残りの場合には反対であることも証明し得る方法で存在するものを混合論拠(argumentum mixta)と呼ぶ。」[『推論術』218頁]

次にベルヌイは論拠から生ずる確率の計算に入る。

「任意に与えられた論拠がもつ証明の力は多数の辞令に依拠する・・・・実際、論拠を生成する確実さ、または確からしさの度合は、第一部の諸命題から計算される・・・・所与の論拠が存在する事例の数をb, 存在しない事例の数をcとし、両方の事例の数を$a=b+c$と仮定する。同じように、論拠が証明される事例の数をβ, 証明されないかそれとも反対の事柄が証明される事例の数をγとし、両方の事例の数を$\alpha=\beta+\gamma$とする。なお、すべての事例は同等に起こり得るか、

同等の容易さで起こり得るものと仮定する・・・・そして

1)論拠が偶然的に存在し、必然的に証明されるとする。論拠が存在し、その事柄を証明する(すなわち1)事例があり、それが存在せず何も証明されない（すなわち0)事例がcある。このことは

$$(b\cdot 1+c\cdot 0)/a=b/a$$

の価値がある。それでかかる論拠は・・・・事物の確実さのb/aを確立する・・・・

2)論拠が必然的に存在し、偶然的に証明されたとする。仮定により、それが事柄を証明している事柄がβ個あり、証明していないか反対のことを証明したのがγ個ある。事柄を証明するための論拠の強さは

$$(\beta\cdot 1+\gamma\cdot 0)/\alpha=\beta/\alpha,$$

・・・・なおその上、もしも論拠が混合であるあるなら、反対のことを証明するのは、確実さの

$$(\beta\cdot 0+\gamma\cdot 1)/\alpha=\gamma/\alpha,$$

を確立する。・・・・

3)ある論拠が偶然的に存在し、偶然的に証明されたならば、・・・論拠が存在し、それが事柄のβ/αを証明するために、この論拠は

$$\{b(\beta/\alpha)+c\cdot 0\}/a=b\beta/a\alpha$$

の価値がある；ただし論拠が存在するのはb事例、論拠が存在しないのはc事例ある。そしてもしも論拠が混合であれば、反対を証明するのに

$$\{b(\gamma/\alpha)+c\cdot 0\}/a=b\gamma/a\alpha$$

の価値がある。」[『推論術』218-219頁]

以上のことから、偶然に存在する混合論拠の場合、その事柄に対する確率bβ/aαと、その反対に対する確率bγ/aαの和はb/aとなって１以下である。ベルヌイは非加法的確率を計算していたが、そのことに当惑した感じはもっていない。

ヤコブ・ベルヌイの『推論術』で最も大事な主張は「同等に起こり得る」か「同等の容易さで起こる」場合の枚挙に我々の関心を向けさせ、そして偶然ゲームについて認められることを命題とか証言のような場合にも認めさせようとした。しかしそのことにベルヌイは失敗した。このことを彼は第四章「場合の数を考察する２通りの方法について、感じたままのことを経験によって貞女られたものとすること・・・・」で述べている。

「しかしここで我々は深い水中に入ってしまう。なぜなら[同等に起こり得る]ことは、偶然ゲームを除けば、殆ど達成し得なかったから。これらのゲームの最初の発明者たちは、演技者すべてが同等に勝つ見込みをもち、起こり得る場

合を列挙することで公平さを確保しようと骨折った。それで損得が生じる場合の数は既知となり、決定できた‥‥もっと別の事柄、自然法則や人間の意志によって支配されるような大多数の他の現象に対しては、決してそのような状況にない。」「『推論術』223頁]

そこで彼は、異なる事例の相対的な容易さが先験的に求められないとき、それらを度重なる観測・観察により事後に求めることは可能だと考えた。そのために必要なものが、後世ベルヌイの大数の法則と呼ばれるものだった。そして

「この型の予測は“大量観察”を要する‥‥ほかは、すべて事物の性質からそうなることを我々は認めているけれども、この原理の科学的証明は全く簡単でなく、それゆえここでそれを提示するのは私に課せられた義務だと思う‥‥観察数が増えることによって、好都合の場合と不都合な場合との記録された比率が真の比率に近付くであろう確からしさを増加させ続ける。それでこの確からしさは究極的に任意に望ましい確実さの度合を越えるだろう‥‥このことは、観測値の数をどれ程増やしても、決して超えることのできないものとして、真の比率が求められるということが、特別な確実さをもって存在することを意味する。」[『推論術』227頁]

この後、第5章で大数の法則の数学的証明が、二項分布の中程の項の和と、両裾の項の和の比を使って、かなり不器用に証明される。しかし、ベルヌイが『推論術』を生前出版しなかったのは、偶然ゲーム以外に大数の法則を適用できる具体例を、道徳・社会・経済の分野で容易に見出せなかったからである。

ベルヌイの苦悩をよそに、ド・モワブルは『偶然論』で確率研究の対象を偶然ゲームに限定して古典確率論を展開したので、彼は大数の法則を全面に立てて論を展開する必要はなかった。

ベルヌイの社会現象への確率の適用は、ハレーやド・モワブルによる死亡表と年金計算によって実用化された。こうして、確率の定義を巡る人類の長い旅は一応終了する。

Reference

(1)I. Todhunter“A History of the Mathematical Theory of Probability”(1865年), 邦訳. 安藤洋美訳『確率論史』(現代数学社, 1975年)

(2)F. N. David“Games Gods and Gambling”(Griffin, 1962年);邦訳, 安藤洋美訳『確率論の歴史』(海鳴社, 1975年)

(3)Ian Hacking“The Emergency of Probability”(Camb. Univ. Press, 1975年)

(4)L. E. Maistrov“Probability Theory, A historical sketch”(Acad. Press, 1974

年)
(5)O. B. Sheynin 'On the prehistory of the theory of probability' (Arch. Hist Ex. Sci. 12巻, 97-114頁, 1974年)
(6)『ナラ王物語』(鎧淳訳, 岩波文庫, 1989年)
(7)N. L. Rabinovich "Probability and statistical inference in Acient and Medieval Jewish Literatire" (Univ. Tronto Prs. 1973年)
(8)E. F. Byrne "Probability and opinion" (Martinus Nijhoff, 1968年)
(9)S. Sambursky 'On the possible and the probable in Acient Greece' (Osiris, 12巻, 1956年, 35-48頁)
(10)『アリストテレス全集』(全17巻, 1968-1971年, 岩波書店)のうち『形而上学』,『自然学』
(11)ホイジンガ, 高橋英夫訳『ホモ・ルーデンス』(中公文庫, 1973年)
(12)プラトン『パイドーン』(藤沢令夫訳、筑摩書房, 1959年)
(13)M. G. Kendall 'The beginnings of a probability calculus' (Biom. 43巻, 1956年, 1-14頁)
(14)Rabbi Mosis Majemonidis "Liber Doctor Perplexorum" (1629年; リプリント 1969年)
(15)D. Garber & S. Zeble 'On the Emergence of Probability" (Arch. Hist, Ex. Sci; 21巻, 1979年, 33-52頁)
(16)Cicero "De Divinatione" (W. A. Falconer英訳付; Loeb Classical Lib. No. 154, 1971年; Harv. Univ. Press)
(17)高田三郎監訳『神学大全』(全24册, 1960-1996年; 創文社)
(18)G. Cardano "Opera Omnia" の第一巻(Johnson Rep. 1967年)
(19)O. Ore "Cardano; The gambling scholar"; 邦訳, 安藤洋美訳『カルダノの生涯』(1978年, 東京図書)
(20)市倉宏裕「パスカルにおける確率の概念と数学的帰納法の操作について」(専修大学人文論集; 490号, 1992年, 1-36頁)
(21)B. L. van der Waerden編『ヤコブ・ベルヌイ全集』第三巻(1975年, Birkhäuser)の中の "Ars Conjectandi" は107-286頁を占める。
(22)G. Shaffer 'Non-additive probability in the Work of Bernoulli and Lambert' (Arch Hist. Ex. Sci. 19巻, 1978年, 309-370頁)
(23)オランダ科学協会編 "Oeuvres complètes de C. Huygens" 第14巻(1920年, Martinus Nijhoff)