

# 円理の萌芽 —建部賢弘の円周率計算\*

小川 東†

1997 年 5 月 12 日

## 1 はじめに

円理は、文字通り円に関する種々の計算からはじまり、次第にその研究対象を広げると同時に、微分法、定積分法、極限法、対数法、三角関数法(のようなもの)を駆使するに至った、近世日本における解析的算法の総称である。

円理は、関孝和(164?-1708)によって真に数学的な方法へと飛躍したのに続いて、建部賢弘(1664-1739)や鎌田俊清(?-?)による無限級数の導入により、その後の発展の基礎が確立した<sup>1</sup>。とくに、最大流派である関流の確立者として、建部の意義は大きい。

関、建部、鎌田に共通しているのは、円周率計算と円弧長の級数展開が一組となって述べられていることである。円周率の計算そのものが円理全体のなかでしめる意義は必ずしも最重要ではないが<sup>2</sup>、そこに現れる方法は、初期円理の方法論を考える上で典型である<sup>3</sup>。

本稿では、とくに建部の円周率計算について考察する。

建部は、円周率計算における関の加速法を敷衍して、円周率を小数第 40 位まで求めた。その方法は『綴術算経』<sup>4</sup>(1722)、『不休建部先生綴術』<sup>5</sup>、『大成算経』(1710) 卷十二<sup>6</sup>に記述されている。建部は、まず直径 1 尺の円に内接する正  $2^k$  角形の周長  $b_k$  の 2 乗  $\sigma_k = b_k^2$  を、増約術(無限級数の和を求める方法)を用いて計算すると述べている。この場合、開平計算の回数が少なくできるからである。そしてその計算による結果として、小数第 41 位までの円周率が記載され

\*The Beginnings of Enri —Calculation of Pi by Takebe Katahiro—

†Ogawa Tsukane, Faculty of Environmental and Information Sciences, Yokkaichi University, Japan.

E-mail: ogawa@yokkaichi-u.ac.jp

<sup>1</sup>円理全般に渡る概説として [10] のほか、[6] pp.138-244, [11] pp.200-229, 268-290 などがある。また個別には、[5] に多くの論考がある。

<sup>2</sup>近世日本数学における解析学の主要な対象は多項式と巾級数であった ([3] p.19.)

<sup>3</sup>初期円理を含んで、建部賢弘までの近世日本数学に関する詳細な研究書として、[7] が最近出版された。

<sup>4</sup>国立公文書館, 内閣文庫 194-214.

<sup>5</sup>外題は『建部先生綴術真本』, 東大 T20:74.

<sup>6</sup>学士院 0523 他.

ている<sup>7</sup> これまで、すべての論文、研究書におけるこの個所の引用は、この本文の記述に基づき、 $\sigma_k = b_k^2$  からの加速計算により小数第 40 位まで求めたとしていた。

ところが、そこに示された通りに計算しても、実際には小数第 37 位までしか正しい値は得られない ([17])<sup>8</sup>。  $\sigma_k = b_k^2$  からの加速における誤差は、 $1.97 \times 10^{-38}$  である。 [17] は小数第 38 位からの残りの 3 桁を、差分法を用いて補うことが可能であることを示しているが、和田秀男氏は、もしかすると建部の計算した小数第 40 位までの値は、 $\sigma_k$  より加速したのではなく、 $b_k$  より加速したものかも知れないと述べている。

数式処理システム Mathematica を用いて、 $b_k$  からの加速計算を実行してみると、確かに第 41 位まで正しく求められることが確認できる。 実際、その誤差は  $4.15 \times 10^{-43}$  である。

実は、建部は「初めよりただちに  $b_k^2$  を用いることを察したのではなく、まず  $b_k$  を用いてから後、深く探り、それに達した」<sup>9</sup> と述べているのである。 このことから、

1. 建部はまず  $b_k$  からの加速計算を実行した。
2. その後、開平が省ける  $\sigma_k = b_k^2$  からの加速に気付いた。 しかし、その計算過程は  $b_k$  の場合と同じになるので、実際には計算をしなかった。
3.  $\sigma_k = b_k^2$  からの加速法を示し、値としては  $b_k$  からの加速結果を示した。

と結論づけられる。

本稿では、まず第 2 節において、関、建部、鎌田までの円理を簡単に概観して、建部の円周率計算がどのように位置にあるかを述べる。 第 3 節において、建部の加速計算を再現し、上の結論について述べる。 第 4 節では、[17] にならって誤差を評価しておく。 第 5 節では、建部がどのように数値計算の結果の精度を確信したかの、という問題について考察する。 なお付録において、 $\sigma_k = b_k^2$  による加速計算を再現しておく。

## 2 関、建部、鎌田の円周率および円弧長の級数表現

ここでは、建部賢弘の円周率計算に関連した、円理の成果を概観しておく。 以下、直径  $d$  の円の周を弦で切り取り、弧の高さを  $h$ 、弧の長さを  $s$  とする。 またこの時の弦の長さを  $a$  とする。

最初期の結果は、『堅亥録』(今村知商, 1639) における  $s^2 \approx 4h(d+h/2)$ 、および  $s^2 \approx a^2 + 6h^2$  であろう ([12])。 しかし、円理発展の直接の契機をなしたのは、『算祖』(村松茂清, 1663) による円周率計算である。 村松は、円に内接する正  $2^n$  多角形の周長  $\tau_n$  を  $n = 17$  まで順次計算し、円周率 3.1415926 を得た。

このような素朴な方法から、一躍脱却し、真に数学的な方法への第一歩を踏み出したのが、関

<sup>7</sup>36 位以下は 419712 強 と記載されている。「強」は 1 から 4 のどれかを切り捨てたことを示す。 しがたって、建部は小数第 42 位までは少なくとも求めていたことになる。 ところが、真値の 36 位以下は 419716 であるから、建部が得た正しい値は小数第 40 位までということになる。 上に「40 位まで求めた」としたのは、この事情による。

<sup>8</sup>付録も参照。 なお、このことに気づいたのは、森本光生氏だということである。

<sup>9</sup>(始関氏角面巾ヲ開平方ニシテ各角面ヲ求テ截周巾ヲ求ル者開平方ノ功ヲ省也) 是首ヨリ巾数ヲ用ル事ヲ察スルニ非ス先截周ヲ用テ後玄探テ巾数ヲ用ル事ヲ会ス (『綴術算経』36 丁オ)。

孝和である。関は『括要算法』(1712)において、 $\tau_{15}, \tau_{16}, \tau_{17}$  が

$$\tau_{16} \approx \tau_{15} + \tau_{15}\rho \quad (1)$$

$$\tau_{17} \approx \tau_{15} + \tau_{15}\rho + \tau_{15}\rho^2 \quad (2)$$

となっているとして、これから加速計算を行い、円周率 3.1415926539 微弱 を得た。すなわち、まず未計算の  $\tau_{18}, \tau_{19}, \dots$  の部分が、 $\tau_{15+i} = \sum_{j=0}^i \tau_{15}\rho^j$ ,  $\rho = \frac{\tau_{16} - \tau_{15}}{\tau_{15}}$  となっていると仮定する。ここで、 $\tau_i - \tau_{i-1} = (\tau_{i-1} - \tau_{i-2})\rho$ ,  $i \geq 17$  であるから、

$$\tau_{\infty} - \tau_{16} = (\tau_{16} - \tau_{15}) \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = (\tau_{16} - \tau_{15}) \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (3)$$

が得られる。ここに、 $\rho = \frac{\tau_{17} - \tau_{16}}{\tau_{16} - \tau_{15}}$  代入して、公式

$$\tau_{\infty} = \tau_{16} + \frac{(\tau_{16} - \tau_{15})(\tau_{17} - \tau_{16})}{(\tau_{16} - \tau_{15}) - (\tau_{17} - \tau_{16})} \quad (4)$$

を得たのである。関自身、弧長を求める計算においてこの公式を用い、またさらに、建部もこの公式を利用した。

なお、「微弱」とは末尾の 9 が次の桁の 9 を切り上げたことを示す。したがって正確には、末尾は 89... である。実際に計算をしてみると、関の計算では小数第 18 位まで正しい値が得られる。

関はさらに、 $h = 1, 2, 3, 4, 4.5$  の場合の円弧に対して、上の方法を適用して、5 つの弧長  $s \approx s_1, s_2, s_3, s_4, s_{4.5}$  を計算し、さらにこれらの値を利用して、補間法により

$$\begin{aligned} s^2 \approx & a^2 + 100A_0 \left(\frac{c}{d}\right)^2 - 100A_1 \frac{d-2h}{d-h} \left(\frac{c}{d}\right)^2 + 100A_2 \frac{(d-2h)(h-1)}{(d-h)^2} \left(\frac{c}{d}\right)^2 \\ & - 100A_3 \frac{(d-2h)(h-1)(h-2)}{(d-h)^3} \left(\frac{c}{d}\right)^2 + 100A_4 \frac{(d-2h)(h-1)(h-2)(h-3)}{(d-h)^4} \left(\frac{c}{d}\right)^2 \\ & - 100A_5 \frac{(d-2h)(h-1)(h-2)(h-3)(h-4)}{(d-h)^5} \left(\frac{c}{d}\right)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

を得た。ここで  $A_i$  は定数であり、関はこれらの値を大体小数第 10 位まで計算している。この方法は巧妙なものではあったが、建部はこれを失敗とみなしている。

さて、この関の加速法を敷衍して、円周率を小数第 40 位まで求めたのが建部賢弘である。本稿の主題はこの点にあり、詳細は以下に述べる。建部は『綴術算経』において、その方法を述べるとともに、さらにその方法を利用して、初めて円弧長が無限級数

$$s^2 = 4hd \left\{ 1 + \frac{2^2}{3 \cdot 4} \left(\frac{h}{d}\right) + \frac{2^2 \cdot 4^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{h}{d}\right)^2 + \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \left(\frac{h}{d}\right)^3 + \dots \right\} \quad (6)$$

に展開されることを指摘した。これらの方法は、『大成算経』、『不休建部先生綴術』などにも述べられている<sup>10</sup>。

<sup>10</sup> 建部にはもう一書、『算暦雑考』がある。昭和 16 年に藤原松三郎が水戸彰考館で発見し、報告している ([9])。原書は焼失したが、そのコピーの陰影が最近出版された ([1])。

一方、関流に対抗した宅間流の鎌田俊清は、『宅間流円理』、『平円周率起源』(1722)において、円周率を内接、外接  $2^{44}$  正多角形から評価し

$$3.14159265358979323846264336658 < \pi < 3.14159265358979323846264341667 \quad (7)$$

を得、また、

$$s = 2\sqrt{hd} \left\{ 1 + \frac{1}{3!} \left(\frac{h}{d}\right) + \frac{3^2}{5!} \left(\frac{h}{d}\right)^2 + \frac{3^2 \cdot 5^2}{7!} \left(\frac{h}{d}\right)^3 + \dots \right\} \quad (8)$$

を得ている。円周率の桁では、建部に及ばないが、値の評価は、関、建部ともに記述のないところであるから、この鎌田の結果は興味深い<sup>11</sup>。

なお、松永良弼は『方円算経』(1739)、『方円雑算』において、

$$\pi = 3d \left\{ 1 + \frac{1^2}{4 \cdot 6} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \dots \right\} \quad (9)$$

$$\pi^2 = 9d^2 \left\{ 1 + \frac{1^2}{3 \cdot 4} + \frac{1^2 \cdot 2^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \dots \right\} \quad (10)$$

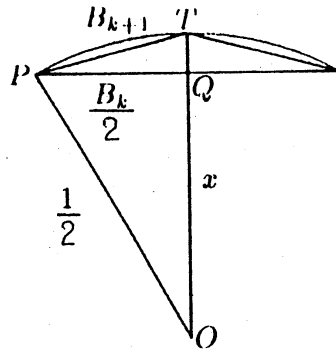
$$s^2 = 4hd \left\{ 1 + \frac{2}{6} \left(\frac{h}{d}\right) + \frac{2 \cdot 8}{6 \cdot 15} \left(\frac{h}{d}\right)^2 + \frac{2 \cdot 8 \cdot 18}{6 \cdot 15 \cdot 28} \left(\frac{h}{d}\right)^3 + \dots \right\} \quad (11)$$

などを得ている。

### 3 建部賢弘の円周率計算

#### 3.1 加速計算 ( $b_k$ からの)

直径 1 尺の円に内接する正  $2^k$  角形の、周長を  $b_k$  とする。たとえば  $b_2 = 2\sqrt{2}$  である。また、一辺の長さを  $B_k$  とする。すなわち  $B_k = b_k/2^k$  である。



<sup>11</sup> 宅間流円理については、[4], [10] 第三巻, pp.407-423 がある。

$\Delta OPQ$  において  $x^2 = (1 - B_k^2)/4 = (1 - b_k^2/2^{2k})/4$  であるから,  $x = 2^{-1}\sqrt{1 - b_k^2/2^{2k}}$ .  
 また  $\Delta QPT$  において  $B_{k+1}^2 = (1/2 - x)^2 + B_k^2/4 = 1/4 - x + (x^2 + B_k^2/4) = 1/2 - x$  であるから,  $b_{k+1}^2/2^{2k+2} = 2^{-1}(1 - \sqrt{1 - b_k^2/2^{2k}})$ , すなわち

$$b_{k+1} = \sqrt{2^{k+1} \left( 2^k - \sqrt{2^{2k} - b_k^2} \right)} \quad (12)$$

となる.

この式を基本として建部は次のような加速法を用いた.

Step 1<sub>0</sub>.  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 10$ ) を計算する<sup>12</sup>.

(1)

$b = 2.;$

```
b = Prepend[ Table[ b = Sqrt[ 2^(i+1) (2^i - Sqrt[ 2^(2 i)
- b^2 ] ) ], {i, 9}], 2. ]
```

{2.,

```
2.82842 71247 46190 09760 33774 48419 39615 71393 43750,
3.06146 74589 20718 17382 76798 72243 19093 40907 56499,
3.12144 51522 58052 28557 25578 95632 35585 48430 65884,
3.13654 84905 45939 26381 42580 44436 53906 75563 73541,
3.14033 11569 54752 91231 71185 24331 69013 21437 03233,
3.14127 72509 32772 86806 20197 70788 21440 83796 63262,
3.14151 38011 44301 07632 85150 59456 82230 79353 13815,
3.14157 29403 67091 38413 58001 10270 76142 95336 37794,
3.14158 77252 77159 70062 88542 62701 91873 93992 80858}
```

Step 2<sub>0</sub>.  $\Delta_k = b_{k+1} - b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 9$ ) を計算する.

(2)

```
d = Table[ b[[i+1]] - b[[i]], {i, 9} ]
```

```
{0.82842 71247 46190 098,
0.23304 03341 74528 07622 43024 23823 79477 69514 12749,
0.05997 76933 37334 11174 48780 23389 16492 07523 09384,
0.01510 33382 87886 97824 17001 48804 18321 27133 07657,
0.00378 26664 08813 64850 28604 79895 15106 45873 29692,
```

<sup>12</sup> 『綴術算経』では,  $k = 2$ , すなわち内接 4 角形から計算を始めるとするが, 『大成算経』では,  $k = 1$  のとき  $b_1 = 2$  (直径の 2 倍) として, 計算を始めている.  $k = 2$  から計算を始めた場合, 以下を見ればわかるように,  $k = 1$  の場合にくらべて加速計算は 1 回少なくなり, 再現計算 (25) の b8 の第 2 項目 の値が最終結果となる. ここでは  $b_1 = 2$  から始めておく.

なお, 以下の数式処理システム Mathematica による計算においては, 大体小数第 45 まで示した. また Mathematica の表現は, 出力を見やすくするための部分を省いている.

```

0.00094 60939 78019 95574 49012 46456 52427 62359 60029,
0.00023 65502 11528 20826 64952 88668 60789 95556 50552,
0.00005 91392 22790 30780 72850 50813 93912 15983 23979,
0.00001 47849 10068 31649 30541 52431 15730 98656 43064}

```

Step 3<sub>0</sub>.  $\epsilon_k = \Delta_k / \Delta_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) を計算する.

(3)

```

e = Table[ d[[i]] / d[[i+1]], {i, 8} ]
{3.55486 5846209121037,
 3.88545 00933 17747 65438 05476 61665 26636 07702 84087,
 3.97115 47337 47624 22161 58561 42353 19888 01248 83468,
 3.99277 56390 82541 67167 43801 62627 68131 04618 82098,
 3.99819 30935 97580 83294 63029 04091 44508 81433 25777,
 3.99954 82223 74493 30195 90586 32058 93864 55512 74018,
 3.99988 70524 04346 82623 56273 66653 51865 66984 40970,
 3.99997 17629 01753 48568 01506 89128 80751 52798 92518}

```

ここで建部は  $\epsilon_k$  の値が 4 に近づくことを観察した. よって

$$b_\infty = b_9 + (b_{10} - b_9) + (b_{10} - b_9) \cdot \frac{1}{\epsilon_9} + (b_{10} - b_9) \cdot \frac{1}{\epsilon_9} \cdot \frac{1}{\epsilon_{10}} + \dots \quad (13)$$

において,  $\epsilon_9 = \epsilon_{10} = \dots = 4$  とおくと,

$$b_\infty = b_9 + \frac{b_{10} - b_9}{1 - 1/4} = \frac{1}{4 - 1}(4b_{10} - b_9) \quad (14)$$

となる.

さて,

$$b^{(1)}_k = \frac{1}{4 - 1}(4b_{k+1} - b_k) \quad (15)$$

とにおいて, 上述の Step 1<sub>0</sub>, 2<sub>0</sub>, 3<sub>0</sub> と同様の計算を実行する. すなわち,

Step 1<sub>1</sub>.  $b^{(1)}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 9$ ) を計算する.

(4)

```

b1 = Table[ (4 b[[i+1]] - b[[i]]) / 3, {i, 9} ]
{3.10456 94996 61586 7968,
 3.13914 75703 12227 53256 91140 13517 78919 30745 60749,
 3.14143 77167 03830 32282 08505 70095 41082 84271 69012,
 3.14158 29366 41901 58989 48247 60704 60013 84608 09427,
 3.14159 20457 57690 79515 14053 50963 40715 36728 13131,

```

```

3.14159 26155 92112 85331 03201 86273 72250 04583 16605,
3.14159 26512 14810 47908 40134 89013 02494 11205 30666,
3.14159 26534 41354 82007 15617 93875 40780 33997 45787,
3.14159 26535 80515 80612 65389 80178 97117 60211 61879}

```

Step 2<sub>1</sub>.  $\Delta^{(1)}_k = b^{(1)}_{k+1} - b^{(1)}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8$ ) を計算する.

(5)

```

d1 = Table[ b1[[i+1]] - b1[[i]], {i, 8} ]
{0.03457 80706 50640 7358,
 0.00229 01463 91602 79025 17365 56577 62163 53526 08262,
 0.00014 52199 38071 26707 39741 90609 18931 00336 40415,
 0.00000 91091 15789 20525 65805 90258 80701 52120 03703,
 0.00000 05698 34422 05815 89148 35310 31534 67855 03474,
 0.00000 00356 22697 62577 36933 02739 30244 06622 14060,
 0.00000 00022 26544 34098 75483 04862 38286 22792 15121,
 0.00000 00001 39160 98605 49771 86303 56337 26214 16092}

```

Step 3<sub>1</sub>.  $\epsilon^{(1)}_k = \Delta^{(1)}_k / \Delta^{(1)}_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, 7$ ) を計算する.

(6)

```

e1 = Table[ d1[[i]] / d1[[i+1]], {i, 7} ]
{15.09862 89686 22744,
 15.77019 25921 41822 63102 98558 96589 02108 75824 90883,
 15.94226 50267 94338 75049 26503 15588 87737 19533 28524,
 15.98554 84972 36192 63376 78777 25229 40940 35534 23891,
 15.99638 60133 34177 35818 54333 92360 73694 71019 22183,
 15.99909 64338 81847 93127 87854 93761 92951 03117 17904,
 15.99977 41041 29484 56059 89557 53853 99682 27728 18987}

```

ここで建部は,  $\epsilon^{(1)}_k$  の値が  $4^2$  に近づくことを観察した. よって, さきほどと同様にして,

$$b^{(1)}_{\infty} = \frac{1}{4^2 - 1} (4^2 b^{(1)}_9 - b^{(1)}_8) \quad (16)$$

が得られる.

以下同様に,  $i = 2, 3, 4, \dots, 8$  に対して,

$$b^{(i)}_k = \frac{1}{4^i - 1} (4^i b^{(i-1)}_{k+1} - b^{(i-1)}_k) \quad (17)$$

とにおいて, 各  $i$  について次の計算を繰り返す. ただし  $i = 8$  のとき Step 3<sub>8</sub> は実行しない.

Step 1<sub>i</sub>.  $b^{(i)}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 10-i$ ) を計算する. (以下の (7), (10), (13), (16), (19), (22), (25).)

Step 2<sub>i</sub>.  $\Delta^{(i)}_k = b^{(i)}_{k+1} - b^{(i)}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 9-i$ ) を計算する. (以下の (8), (11), (14), (17), (20), (23), (26).)

Step 3<sub>i</sub>.  $\epsilon^{(i)}_k = \Delta^{(i)}_k / \Delta^{(i)}_{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, 8-i$ ) を計算する. (以下の (9), (12), (15), (18), (21), (24).)

(7)

```
b2 = Table[ (4^2 b1[[i+1]] - b1[[i]]) / (4^2 - 1), {i, 8} ]
{3.14145 27750 22270 24829,
 3.14159 03931 29937 17550 42996 73867 25227 07840 09562,
 3.14159 26179 71106 34103 30897 06745 21275 91297 18788,
 3.14159 26530 32076 74216 85107 23647 32762 13536 13378,
 3.14159 26535 81074 32385 42478 41961 07685 69106 83503,
 3.14159 26535 89656 98746 89263 75862 31177 04980 11603,
 3.14159 26535 89791 10947 07316 80866 23332 75516 93462,
 3.14159 26535 89793 20519 68707 92599 20873 41959 22952}
```

(8)

```
d2 = Table[ b2[[i+1]] - b2[[i]], {i, 7} ]
{0.00013 76181 07666 92722,
 0.00000 22248 41169 16552 87900 32877 96048 83457 09225,
 0.00000 00350 60970 40113 54210 16902 11486 22238 94589,
 0.00000 00005 48997 58168 57371 18313 74923 55570 70125,
 0.00000 00000 08582 66361 46785 33901 23491 35873 28099,
 0.00000 00000 00134 12200 18053 05003 92155 70536 81858,
 0.00000 00000 00002 09572 61391 11732 97540 66442 29490}
```

(9)

```
e2 = Table[ d2[[i]] / d2[[i+1]], {i, 6} ]
{61.85525 04215 58696,
 63.45634 88605 97398 57858 24999 41806 67054 90446 15328,
 63.86361 53796 49130 80621 36680 82975 13377 29984 67964,
 63.96587 42708 74587 73364 79189 97753 91807 05998 54303,
 63.99146 67180 21046 71054 51765 70913 21039 09556 58006,
 63.99786 65638 78522 04514 47142 71870 90704 25325 32061}
```

(10)

```
b3 = Table[ (4^3 b2[[i+1]] - b2[[i]]) / (4^3 - 1), {i, 7} ]
```



```
{3.14159 25775 44344 58704 74,
 3.14159 26532 86045 53413 67212 94568 67244 94209 20521,
 3.14159 26535 88600 08186 90729 62010 85325 40873 25990,
 3.14159 26535 89788 57118 25928 75585 10462 25544 46521,
 3.14159 26535 89793 22022 47149 24019 47422 94438 42208,
 3.14159 26535 89793 23839 13952 57136 13684 43303 23333,
 3.14159 26535 89793 23846 23650 64214 01786 76347 20246}
```

(11)

```
d3 = Table[ b3[[i+1]] - b3[[i]], {i, 6} ]
{0.00000 00757 41700 94708 93,
 0.00000 00003 02554 54773 23516 67442 18080 46664 05468,
 0.00000 00000 01188 48931 35199 13574 25136 84671 20531,
 0.00000 00000 00004 64904 21220 48434 36960 68893 95686,
 0.00000 00000 00000 01816 66803 33116 66261 48864 81124,
 0.00000 00000 00000 00007 09698 07077 88102 33043 96913}
```

(12)

```
e3 = Table[ d3[[i]] / d3[[i+1]], {i, 5} ]
{250.34064 60579 55,
 254.57069 26352 45352 63073 40638 50801 04854 49234 89135,
 255.64176 06722 49664 49293 28874 69259 55691 20382 72872,
 255.91038 30089 16414 73176 72899 87800 78107 22412 55320,
 255.97759 21777 67452 47576 00813 33877 09653 79966 27373}
```

(13)

```
b4 = Table[ (4^4 b3[[i+1]] - b3[[i]]) / (4^4 - 1), {i, 6} ]
{3.14159 26535 83071 81236 0601,
 3.14159 26535 89786 57029 15527 72471 41082 58703 31502,
 3.14159 26535 89793 23192 49988 36030 49384 36072 58759,
 3.14159 26535 89793 23845 62526 57542 74626 71179 18270,
 3.14159 26535 89793 23846 26371 40795 41787 41926 23258,
 3.14159 26535 89793 23846 26433 77182 95073 43927 76704}
```

(14)

```
d4 = Table[ b4[[i+1]] - b4[[i]], {i, 5} ]
{0.00000 00000 06714 75793 0952,
```

```

0.00000 00000 00006 66163 34460 63559 08301 77369 27257,
0.00000 00000 00000 00653 12538 21512 25242 35106 59510,
0.00000 00000 00000 00000 63844 83252 67160 70747 04988,
0.00000 00000 00000 00000 00062 36387 53286 02001 53445}

```

(15)

```

e4 = Table[ d4[[i]] / d4[[i+1]], {i, 4} ]
{1007.97469 3492,
 1019.96241 88730 60799 70831 02633 90661 02144 55772 47329,
 1022.98863 71429 08745 69634 89932 72370 85428 45596 80801,
 1023.74703 60895 75024 37183 43624 17706 88274 14151 28834}

```

(16)

```

b5 = Table[ (4^5 b4[[i+1]] - b4[[i]]) / (4^5 - 1), {i, 5} ]
{3.14159 26535 89793 13408 22966 16,
 3.14159 26535 89793 23843 68594 87119 01689 64105 20662,
 3.14159 26535 89793 23846 26370 69880 49040 43843 02101,
 3.14159 26535 89793 23846 26433 81737 01383 86179 16225,
 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 12623 08348 10090}

```

(17)

```

d5 = Table[ b5[[i+1]] - b5[[i]], {i, 4} ]
{0.00000 00000 00000 10435 45628 71,
 0.00000 00000 00000 00002 57775 82761 47350 79737 81438,
 0.00000 00000 00000 00000 00063 11856 52343 42336 14124,
 0.00000 00000 00000 00000 00000 01542 11239 22168 93864}

```

(18)

```

e5 = Table[ d5[[i]] / d5[[i+1]], {i, 3} ]
{4048.26797 907,
 4083.99377 67546 27379 54893 06673 80692 70945 17933 10900,
 4092.99384 09745 22408 39986 16906 69684 34375 66527 34511}

```

(19)

```

b6 = Table[ (4^6 b5[[i+1]] - b5[[i]]) / (4^6 - 1), {i, 4} ]
{3.14159 26535 89793 23846 23428 96855 6,
 3.14159 26535 89793 23846 26433 64772 49564 82201 93134,

```

3.14159 26535 89793 23846 26433 83278 37074 29974 60453,  
 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50281 50575 73678}

(20)

d6 = Table[ b6[[i+1]] - b6[[i]], {i, 3} ]  
 {0.00000 00000 00000 00000 03004 67916 9,  
 0.00000 00000 00000 00000 00000 18505 87509 47772 67319,  
 0.00000 00000 00000 00000 00000 00001 13207 20601 13224}

(21)

e6 = Table[ d6[[i]] / d6[[i+1]], {i, 2} ]  
 {16236.3528,  
 16346.90559 62094 79570 94457 46857 69597 59872 64364}

(22)

b7 = Table[ (4<sup>7</sup> b6[[i+1]] - b6[[i]]) / (4<sup>7</sup> - 1), {i, 3} ]  
 {3.14159 26535 89793 23846 26433 83112 72131,  
 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50032 09193 78128,  
 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41579 86308}

(23)

d7 = Table[ b7[[i+1]] - b7[[i]], {i, 2} ]  
 {0.00000 00000 00000 00000 00000 00166 77902,  
 0.00000 00000 00000 00000 00000 00000 00256 32386 08179}

(24)

e7 = Table[ d7[[i]] / d7[[i+1]], {i, 1} ]  
 {65065.74}

(25)

b8 = Table[ (4<sup>8</sup> b7[[i+1]] - b7[[i]]) / (4<sup>8</sup> - 1), {i, 2} ]  
 {3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50286 58047,  
 3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41970 98822}

(26)

d8 = Table[ b8[[i+1]] - b8[[i]], {i, 1} ]  
 {0.00000 00000 00000 00000 00000 00000 00001 83924}

ここで建部は、各  $i$  に対して、毎回  $c^{(i)}_k$  の値が  $4^{i+1}$  に近づくことを観察する。原文には、 $i = 4$  のときまでの値が実際に記載されている。しかしこの後の計算のためには、必ず以上の計算を実行せねばならない。

最後に

$$b^{(9)}_1 = \frac{1}{4^9 - 1} (4^9 b^{(8)}_2 - b^{(8)}_1) \quad (18)$$

とおき、これを計算すると、

(27)

```
b9 = Table[ (4^9 b8[[i+1]] - b8[[i]]) / (4^9 - 1), {i, 1} ]
{3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 68984}
```

となる。π の正確な値は

(28)

```
N[ Pi, 46 ]
3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399
```

であるから、この値は小数第 41 位まで正しい。

### 3.2 綴術本文の記述

$\sigma_k = b_k^2$  とおくと、(12) は

$$\sigma_{k+1} = 2^{k+1} \left( 2^k - \sqrt{2^{2k} - \sigma_k} \right), \quad \sigma_1 = 4 \quad (19)$$

となる。

建部は (12) に基づく以上の数値計算を実行した後、(19) を基本式として用いれば、開平計算の回数を減らせることに気づいたと思われる。そこで、『綴術算経』本文には「初めよりただちに  $\sigma_k = b_k^2$  を用いることを察したのではなく、まず  $b_k$  を用いてから後、深く探り、それに達した」と記述した。しかし、計算過程はどちらも同じになるので、あらためて  $\sigma_k = b_k^2$  を用いた計算は実行せずに、 $b_k$  による最終の値を記載した。しかし、 $b_k$  からの加速結果と  $\sigma_k$  からの加速結果では、値が異なるのである。以上、あらためてまとめておくと、次のようになる。

1. 建部はまず  $b_k$  からの加速計算を実行した。
2. その後、開平が省ける  $\sigma_k = b_k^2$  からの加速に気付いた。しかし、その計算過程は  $b_k$  の場合と同じになるので、実際には計算をしなかった。
3.  $\sigma = b_k^2$  からの加速法を示し、値としては  $b_k$  からの加速結果を示した。

## 4 誤差

ここで、建部の得た結果の誤差を評価しておく。以下の計算は [2] と同様である。  $\theta = 2\pi/2^k$  とおくと  $b_k = 2^k \sin(\theta/2)$  であるから

$$\begin{aligned}
 b_k &= 2^k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\theta^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!} \\
 &= 2^{k-1} \theta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\theta^{2n-2}}{2^{2n-2}(2n-1)!} \\
 &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\pi^{2n-2}}{2^{(2n-2)k}(2n-1)!} \\
 &= \pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2nk}(2n+1)!}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

ここで  $\alpha_n = (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ,  $r = 1/4$  とおくと,  $b_k = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r^{nk}$  となる。  $b_{k+1} = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r^{n(k+1)}$  であるから,

$$b_{k+1} - rb_k = \pi(1-r) + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n r^{nk} (r^n - r), \tag{21}$$

したがって

$$b^{(1)}_k \equiv \frac{b_{k+1} - rb_k}{1-r} = \pi + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \frac{r^n - r}{1-r} r^{nk} \tag{22}$$

となる。ここで  $\alpha^{(1)}_n = \alpha_n \frac{r^n - r}{1-r}$  とおくと  $b^{(1)}_k = \pi + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^{(1)}_n r^{nk}$ 。さきほどと同様にして,

$$b^{(2)}_k \equiv \frac{b^{(1)}_{k+1} - r^2 b^{(1)}_k}{1-r^2} = \pi + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha^{(1)}_n \frac{r^n - r^2}{1-r^2} r^{nk} \tag{23}$$

を得る。これは  $\alpha^{(2)}_n = \alpha^{(1)}_n \frac{r^n - r^2}{1-r^2}$  とおくと  $b^{(2)}_k = \pi + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha^{(2)}_n r^{nk}$  となる。以下同様にして,  $b^{(i)}_k = \pi + \sum_{n=i+1}^{\infty} \alpha^{(i)}_n r^{nk}$  を得る。ただし

$$\alpha^{(i)}_n = \frac{r^n - r^i}{1-r^i} \alpha^{(i-1)}_n = \cdots = \prod_{j=1}^i \frac{r^n - r^j}{1-r^j} \alpha_n \tag{24}$$

である。

とくに

$$\alpha^{(i)}_{i+1} = \prod_{j=1}^i \frac{r^{i+1} - r^j}{1-r^j} \alpha_{i+1} = (-1)^i \prod_{j=1}^i \frac{r^j (1 - r^{i+1-j})}{1-r^j} \alpha_{i+1} = (-1)^i r^{1+2+\cdots+i} \alpha_{i+1} \tag{25}$$

である。

$$b^{(9)}_1 = \pi + \sum_{n=10}^{\infty} \alpha^{(9)}_n r^n \quad (26)$$

であるから

$$\begin{aligned} \pi - b^{(9)}_1 &\approx \alpha^{(9)}_{10} r^{10} \\ &= -(-1)^9 r^{1+2+\dots+9} (-1)^{10} \frac{\pi^{21}}{21!} \cdot \frac{1}{4^{10}} \\ &= \frac{\pi^{21}}{4^{55} \cdot 21!} \\ &\approx 4.15 \times 10^{-43} \quad (\pi \approx 3.1415). \end{aligned} \quad (27)$$

すなわち、建部の方法ではどのように精度を上げて計算しても、小数第 42 位までしか求まらない。計算値  $b^{(9)}_1$  の小数第 41 位以下は 68984 であるから、これに誤差を加えると、小数第 41 位以下は  $68984 + 00415 = 69399$  となり、真値 69399 とよく合う。

## 5 精度の決定

建部が誤差の評価をしたという証拠はないが、建部はほぼ限界までの精度をもって、最終結果を記述している。この理由に関しては、確かなことは言えない。たとえば、[17] におけるように差分法に似た方法を取ったのかもしれないし、第 3 節で得た結果 (1), (4), (7), (10), (13), (16), (19), (22), (25) を観察した結果かも知れないのである。すなわち、これらの各段階  $(3n+1)$ ,  $0 \leq n \leq 8$  で得られた  $10-n$  個の円周率の値を観察すると、共通の桁が順に、0, 2, 4, 7, 12, 16, 22, 28, 35 となっていることから、最後の (27) においては (25) より 6 桁ないし 7 桁伸びると推測したのかもしれないのである。いずれにせよ、これらは推測の域を出ないものであり、断言できないのが現状である。

## 6 おわりに

『綴術算経』は、多くの数学書のように個別の問題とその解答に重点を置いている訳ではなく、むしろ解答の方法論を提示するのが目的であるように思われる点で、特異な書物である。全 12 章が 4 章ずつ 3 編にわけられて、整然と配列されている上、要所要所に数学論とも言うべき解題が置かれており、さらに、序、跋 (自質説) も、形式的なものではなく、しっかりとした内容を持っている<sup>13</sup>。

その中で、この円周率の計算は、第 3 編の「員数ヲ探ル」の 3 番目に位置する。第 3 編の全 4 章は、最初の 2 章が「理ニヨツテ数ヲ探ル」章、後の 2 章が「数ニヨツテ数ヲ探ル」章となって

<sup>13</sup> そのため従来から多くの研究がなされてきた (たとえば [2], [8], [10], [13], [14])。

いる。つまり、円周率の計算は、「数によって数を求める」という方法の典型とされているのである。ちなみに、もう一つの問題は円弧長の計算である。

以上見てきたように、円周率の計算は、そのように配置されるのにふさわしく、膨大な計算と、丹念な観察にもとづいて実行されたものである。村松茂清や関孝和による円理研究も実は、そのような種類の研究であった。これまでは、それらの計算を正確に再現することが難しかったため、書かれていることを精密に理解することができなかった。しかし、コンピュータの利用によって、それが可能となり、円理研究に新たな展望が開けてきた<sup>14</sup>。とくに、初期円理の詳細な解明が待たれる。

## 参考文献

- [1] 佐藤健一, 『建部賢弘の『算暦雑考』—日本初の三角関数表—』, 研成社, 1995.
- [2] 杉浦光夫, 和算家の思想について, 東京大学教養学部・教養学科紀要, 第 8 号, pp.35-64, 1976.
- [3] ———, 円理—和算の解析学について—, 東京大学教養学部紀要・比較文化研究, 第 20 集, pp.1-20, 1982.
- [4] Nakamura Kunimitsu: “On the Sprout and Setback of the Concept of Mathematical “Proof” in the Edo Period in Japan: Regarding the Method of Calculating Number  $\pi$ ”, *HISTORIA SCIENTIARUM*, Vol.3-3, pp. 185-199, 1994.
- [5] 林博士遺著刊行会, 『林鶴一博士和算研究集録』, 東京開成館, 1937.
- [6] 平山諦, 『円周率の歴史改訂新版』, 大阪教育図書, 1980.
- [7] Horiuchi, Annick: *Les Mathématiques Japonaises à l'époque d'Edo*, Librairie Philosophique J. Vrin, 1994.
- [8] ———, “The Tetsujutsu Sankei(1722), an 18th Century Treatise on the Methods of Investigation in Mathematics”, *The Intersection of History and Mathematics*, Birkhäuser, pp.149-164, 1994.
- [9] 藤原松三郎, 建部賢弘の著と考へられる算暦雑考, 科学史研究第 1 号, pp.84-92, 1941.
- [10] 藤原松三郎, 『明治前日本数学史新訂版』全五巻, 日本学士院編, 1979.
- [11] Mikami, Yoshio: *The Development of Mathematics in China and Japan*, Second Edition, Chelsea Publishing Company, New York, 1974.
- [12] 嶺井政行, 今村知商の「弧矢弦の式」について, 科学史研究 No.173, pp. 37-43, 1990.
- [13] 村田全, 『日本の数学 世界の数学』(中公新書 611), 中央公論社, 1981.
- [14] ———, 建部賢弘の数学とその思想, 全 6 回, 数学セミナー, 1982 年 8 月号, pp.70-75, 9 月号, pp.69-75, 10 月号, pp.62-67, 11 月号, pp.63-69, 12 月号, pp.60-64, 1983 年 1 月号, pp.76-81.

<sup>14</sup> 数値計算の分野では、科学史とは異なった視点から、すでに関や建部のアルゴリズムの再現がなされてきた([15],[16],[17]).

- [15] 森本光生, 『UBASIC による解析入門』, 日本評論社, 1992.
- [16] 森本光生, 斎藤美千代, 正多角形の周の長さによる円周率の近似計算, 「記号数式処理と先端的科学技術計算」予稿集 pp.1-10, 1990年3月.
- [17] 和田秀男, 『高速乗算法と素数判定法 (マイコンによる円周率の計算)』, 上智大学数学講究録, No.15, 1983.

## 付録

この付録では, 通常 of 解釈に基づく計算 (すなわち  $\sigma = b_k^2$  による加速計算) を再現しておく。すでに述べたように, この方法では, 建部が最後に記述している小数第 41 位まで, あるいは建部が得た正しい 40 位までの数値は得られない。なお, 誤差は  $1.97 \times 10^{-38}$  である [17].

```
s = 4.;
s = Prepend[ Table[s = 2^(i+1) (2^i - Sqrt[ 2^(2 i) - s]),
              {i, 10} ], 4. ]
{4.,
 8.,
9.37258 30020 30479 21917 29804 12644 83074 28852 49993 9688,
9.74341 98385 55295 21559 25517 57211 09928 67306 71889 4538,
9.83793 64335 46010 04739 46950 99269 61306 93459 29782 612,
9.86167 97753 40776 97057 39200 31785 12061 34274 68841 253,
9.86762 27672 27758 88059 10138 13447 11112 12759 88339 82,
9.86910 89627 80115 24659 11917 38869 45361 71984 89346 72,
9.86948 05396 46732 31795 11059 07658 01791 73089 21155 7,
9.86957 34356 12118 65179 73841 64689 22260 92723 36896 44,
9.86959 66597 12762 14671 62277 42152 41265 28781 73961 9}

d = Table[s[ [i+1]] - s[[i]], {i, 9} ]
{4.,
 1.37258 30020 30479 21917 29804 12644 83074 28852 49993 9688,
 0.37083 68365 24815 99641 95713 44566 26854 38454 21895 4849,
 0.09451 65949 90714 83180 21433 42058 51378 26152 57893 158,
 0.02374 33417 94766 92317 92249 32515 50754 40815 39058 641,
 0.00594 29918 86981 91001 70937 81661 99050 78485 19498 567,
 0.00148 61955 52356 36600 01779 25422 34249 59225 01006 9,
 0.00037 15768 66617 07135 99141 68788 56430 01104 31808 99,
 0.00009 28959 65386 33384 62782 57031 20469 19634 15740 74}
```



```
e = Table[ d[[i]] / d[[i+1]], {i, 8} ]
{2.91421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85696 71875 3769,
 3.70131 24556 15847 27445 67885 59846 00109 32872 51220 569,
 3.92351 03270 62104 27631 64560 66966 87221 73590 75774 72,
 3.98076 20935 46008 99705 27650 24286 07936 16379 16602 9,
 3.99518 32757 46443 22855 19616 86072 94134 96741 44664,
 3.99879 53654 94994 63658 89171 01711 89474 09217 2397,
 3.99969 88130 26391 19190 11758 07225 85254 71262 435,
 3.99992 47014 84774 55577 48041 21055 32704 45231 38}
```

```
s1 = Table[ (4 s[[i+1]] - s[[i]]) / 3, {i, 9} ]
{9.33333 33333 33333 33333 33333 33333 33333 33333 33333 3333,
 9.83011 06693 73972 29223 06405 50193 10765 71803 33325 2918,
 9.86703 21173 96900 54773 24088 72066 52213 46791 45854 615,
 9.86944 19652 09581 65799 54095 46622 45099 68843 49080 331,
 9.86959 42226 05699 27830 03283 42623 62312 81213 15194 133,
 9.86960 37645 23419 51726 33784 07334 44129 05588 28172 68,
 9.86960 43612 97567 36859 12510 47343 56778 25059 89682 35,
 9.86960 43986 02271 34173 77439 63920 87268 40123 98425 37,
 9.86960 44009 33914 09641 28102 50366 29083 99268 0881}
```

```
d1 = Table[ s1[[i+1]] - s1[[i]], {i, 8} ]
{0.49677 73360 40638 95889 73072 16859 77432 38469 99991 9584,
 0.03692 14480 22928 25550 17683 21873 41447 74988 12529 324,
 0.00240 98478 12681 11026 30006 74555 92886 22052 03225 716,
 0.00015 22573 96117 62030 49187 96001 17213 12369 66113 802,
 0.00000 95419 17720 23896 30500 64710 81816 24375 12978 54,
 0.00000 05967 74147 85132 78726 40009 12649 19471 61509 67,
 0.00000 00373 04703 97314 64929 16577 30490 15064 08743 02,
 0.00000 00023 31642 75467 50662 86445 41815 59144 10384 7}
```

```
e1 = Table[ d1[[i]] / d1[[i+1]], {i, 7} ]
{13.45497 97649 36081 19258 29688 77136 17438 03813 27069 5,
 15.32107 04130 94168 12386 40390 37465 80545 77608 2777,
 15.82745 97762 03447 07611 86956 98036 15787 47505 333,
 15.95668 71756 47459 50066 46974 35978 59304 06646 3,
```

```

15.98916 06474 48330 11469 77685 21715 88497 43805,
15.99728 94646 45295 09721 95038 00744 40513 427,
15.99932 23225 76475 54297 34760 13443 86560 86}

```

```

s2 = Table[ (4^2 s1[[i+1]] - s1[[i]]) / (4^2 - 1), {i, 8} ]
{9.86322 91584 43348 22282 37943 64650 42594 54367 99991 4223,
 9.86949 35472 65095 76476 58600 93524 74976 65124 00023 237,
 9.86960 26217 30427 06534 62762 58259 51292 10313 62628 712,
 9.86960 43730 98773 78632 06562 62357 03460 35371 12935 053,
 9.86960 44006 51267 53319 42484 11648 49583 47213 29037 91,
 9.86960 44010 82510 55867 97758 90010 84288 19691 33782 99,
 9.86960 44010 89251 60661 41768 25026 02634 41128 25674 9,
 9.86960 44010 89356 94672 44813 36129 31871 69877 69502 3}

```

```

d2 = Table[ s2[[i+1]] - s2[[i]], {i, 7} ]
{0.00626 43888 21747 54194 20657 28874 32382 10756 00031 815,
 0.00010 90744 65331 30058 04161 64734 76315 45189 62605 475,
 0.00000 17513 68346 72097 43800 04097 52168 25057 50306 341,
 0.00000 00275 52493 74687 35921 49291 46123 11842 16102 86,
 0.00000 00004 31243 02548 55274 78362 34704 72478 04745 08,
 0.00000 00000 06741 04793 44009 35015 18346 21436 91891 91,
 0.00000 00000 00105 34011 03045 11103 29237 28749 43827 4}

```

```

e2 = Table[ d2[[i]] / d2[[i+1]], {i, 6} ]
{57.43222 12143 80595 12051 57711 44146 88808 68789 23,
 62.27956 87357 92719 96272 22238 24093 95368 75335,
 63.56478 51991 51123 06229 36089 33522 49931 468,
 63.89087 38659 66451 91138 33558 48195 10178 6,
 63.97269 82632 48781 04817 88446 08167 0085,
 63.99317 33023 09093 94073 44405 25015}

```

```

s3 = Table[ (4^3 s2[[i+1]] - s2[[i]]) / (4^3 - 1), {i, 7} ]
{9.86959 29820 08298 10670 14484 38427 51681 12913 77801 52,
 9.86960 43530 71146 60979 99336 57699 74725 68173 77908 164,
 9.86960 44008 98271 35332 02495 95755 40796 35768 86749 439,
 9.86960 44010 88608 70377 95435 25129 31267 96607 61039 54,
 9.86960 44010 89355 68606 84350 56334 05473 98619 56080 53,

```

```
9.86960 44010 89358 60737 50403 31931 02925 62103 44593 82,
9.86960 44010 89358 61878 97242 64876 99002 44937 20991 7}
```

```
d3 = Table[ s3[[i+1]] - s3[[i]], {i, 6} ]
{0.00001 13710 62848 50309 84852 19272 23044 55260 00106 645,
 0.00000 00478 27124 74352 03159 38055 66070 67595 08841 275,
 0.00000 00001 90337 35045 92939 29373 90471 60838 74290 11,
 0.00000 00000 00746 98228 88915 31204 74206 02011 95040 99,
 0.00000 00000 00002 92130 66052 75596 97451 63483 88513 29,
 0.00000 00000 00000 01141 46839 32945 96076 82833 76397 8}
```

```
e3 = Table[ d3[[i]] / d3[[i+1]], {i, 5} ]
{237.75342 77772 71214 31986 75366 72289 27639 959,
 251.27556 21958 11676 59161 13189 51746 23895,
 254.80838 47365 92714 43302 52570 64665 105,
 255.70143 42632 00408 94154 32056 00238,
 255.92531 71122 76014 69759 67124 78}
```

```
s4 = Table[ (4^4 s3[[i+1]] - s3[[i]]) / (4^4 - 1), {i, 6} ]
{9.86960 43976 63549 93726 30649 72285 12855 26821 85751 72,
 9.86960 44010 85828 70525 56233 83747 78310 36033 94627 248,
 9.86960 44010 89355 12476 17368 34656 26916 87434 42899 51,
 9.86960 44010 89358 61541 07444 34887 79882 63725 49002 26,
 9.86960 44010 89358 61883 11446 66345 13503 86273 97097 8,
 9.86960 44010 89358 61883 44877 31280 69967 45654 20506 9}
```

```
d4 = Table[ s4[[i+1]] - s4[[i]], {i, 5} ]
{0.00000 00034 22278 76799 25584 11462 65455 09212 08875 529,
 0.00000 00000 03526 41950 61134 50908 48606 51400 48272 26,
 0.00000 00000 00003 49064 90076 00231 52965 76291 06102 76,
 0.00000 00000 00000 00342 04002 31457 33621 22548 48095 53,
 0.00000 00000 00000 00000 33430 64935 56463 59380 23409 1}
```

```
e4 = Table[ d4[[i]] / d4[[i+1]], {i, 4} ]
{ 970.46842 04643 39924 59430 84731 08221 315,
 1010.24752 08579 65337 59278 10777 88726,
 1020.53817 43039 36440 86968 51323,
```

```
1023.13305 22688 87059 94107 51}
```

```
s5 = Table[ (4^5 s4[[i+1]] - s4[[i]]) / (4^5 - 1), {i, 5} ]
{9.86960 44010 89174 04129 47167 93729 66253 13169 05095 357,
 9.86960 44010 89358 57189 71289 29916 19926 26487 60639 75,
 9.86960 44010 89358 61882 29135 52776 58820 04269 27405 1,
 9.86960 44010 89358 61883 44881 66082 62999 09365 41621 84,
 9.86960 44010 89358 61883 44909 99183 86249 43463 96091 9}
```

```
d5 = Table[ s5[[i+1]] - s5[[i]], {i, 4} ]
{0.00000 00000 00184 53060 24121 36186 53673 13318 55544 4,
 0.00000 00000 00000 04692 57846 22860 38893 77781 66765 35,
 0.00000 00000 00000 00001 15746 13306 04179 05096 14216 74,
 0.00000 00000 00000 00000 00028 33101 23250 34098 54470 1}
```

```
e5 = Table[ d5[[i]] / d5[[i+1]], {i, 3} ]
{3932.39247 66564 30057 09855 70754 78,
 4054.19890 77393 85855 15509 376,
 4085.49231 25405 33115 3799}
```

```
s6 = Table[ (4^6 s5[[i+1]] - s5[[i]]) / (4^6 - 1), {i, 4} ]
{9.86960 44010 89358 61695 95471 01378 02747 67467 65976 88,
 9.86960 44010 89358 61883 43728 40840 77877 15961 04002 6,
 9.86960 44010 89358 61883 44909 92606 02584 97376 42870 73,
 9.86960 44010 89358 61883 44909 99875 70650 71677 41599 7}
```

```
d6 = Table[ s6[[i+1]] - s6[[i]], {i, 3} ]
{0.00000 00000 00000 00187 48257 39462 75129 48493 38025 72,
 0.00000 00000 00000 00000 01181 51765 24707 81415 38868 13,
 0.00000 00000 00000 00000 00000 07269 68065 74300 98729}
```

```
e6 = Table[ d6[[i]] / d6[[i+1]], {i, 2} ]
{15867.94522 74126 32202 48696 8,
 16252.67612 35817 35785 1}
```

```
s7 = Table[ (4^7 s6[[i+1]] - s6[[i]]) / (4^7 - 1), {i, 3} ]
{9.86960 44010 89358 61883 44872 78107 42485 29789 30672 81,
```

```
9.86960 44010 89358 61883 44909 99817 87747 92974 39094 8,
9.86960 44010 89358 61883 44909 99876 15024 03458 79309 4}
```

```
d7 = Table[ s7[[i+1]] - s7[[i]], {i, 2} ]
{0.00000 00000 00000 00000 00037 21710 45262 63185 08421 99,
0.00000 00000 00000 00000 00000 00058 27276 10484 40214 7}
```

```
e7 = Table[ d7[[i]] / d7[[i+1]], {i, 1} ]
{63867.06903 30355 8888}
```

```
s8 = Table[ (4^8 s7[[i+1]] - s7[[i]]) / (4^8 - 1), {i, 2} ]
{9.86960 44010 89358 61883 44909 99874 66714 05872 28039 76,
9.86960 44010 89358 61883 44909 99876 15112 95312 16128 6}
```

```
d8 = Table[ s8[[i+1]] - s8[[i]], {i, 1} ]
{0.00000 00000 00000 00000 00000 00001 48398 89439 88088 8}
```

```
s9 = Table[ (4^9 s8[[i+1]] - s8[[i]]) / (4^9 - 1), {i, 1} ]
{9.86960 44010 89358 61883 44909 99876 15113 51922 06290 4}
```

```
N[ Sqrt[s9], 50 ]
{3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41778 33169 27}
```

```
N[ Pi, 50 ]
3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 3751
```