数理解析研究所講究録
1019巻 1997年 120-132

数学通史についての私見

吉沢 尚明

§0. 序言

1. 数学を研究し，或いは数学について考える場合，そのテーマについての歴史を調べるのは自然であろう．またそのテーマの，数学(全体)における位置づけを考えるために，(自分が見渡せる規模の)自分用の数学通史を構想することも自然に行われることが多いと思われる．

本稿の筆者は最近の十数年間に長短十回近く，“数学通史”或いは“数学通論”と呼べる様な講義をした．本稿でその一部を材料にした通史の構成と課題についての試案を述べる．1997年5月に数理解析研究所の研究集会で話したことに若干書き加えたが，未定稿であることをご了承いただきたい．

2. “数学通史”と呼べる様なものを暫定的に決めておくとすれば，第一にその“時間”(＝時代)と“空間”(＝対象や範囲)にある幾つかの数学理論が対象であり，第二に，それらから何らかの一般的ルールを見出すことであろう．更にこのルール(或いは対象となる諸理論の間の関係)から，資料として欠けている古代の数学的結果を再現することができれば，価値のある面白いことであろう．好例としては，Kurt von Fritzによる論文[1]がある．近頃通俗書に安易に載せられているが，何故これが良い論文かという観点からは論じられていない．

なおここで取り上げる範囲は，ギリシャから出た数学(及びギリシャに入った数学)に限定する．これは筆者自身がその他の数学を知らないからでもあるが，これが数学の典型であることから不自然ではないであろう．加うるに，推敲の時間が不足したために，以下の論述の中に通俗書にあるようなものと共通点のあるものがあったり，既知のことや妥当でない論や，当然採り上げるべき文献の見落としなど，不適当なことが多いであろうことが気になっているが，ご指摘を得られれば幸いである．

3.　数学史もexact　scienceであるべきであるという主張があるが，これは文末(§∞)で触れる．また通史(個別史もその部分と一応見なすことにして)を，生物のevolutionをmodelとして考察した(§∞参照)．両者が本質的な点で異なっているにも拘わらず，そうした理由の一つは，筆者が，数学は人工的・技術的な性格よりも，生物史と同様な自然な性格の方が強いと考えているからである．

§1. ギリシャ数学の一つの話題

1. ギリシャ数学の2面

周知の様に，彼らは作図問題を2種類に分けた：

(α)Platonの哲学に沿うEuclidの『原論』の立場．(ここでの対象は，表向きには，平面上の2次の問題に限定される．)

(β)いわゆる古代ギリシャの3問題に象徴される高次の問題(イデア論に沿わないように言われることもあるが，重要性は理解されていたであろう．)

本§で扱うのは，(β)に属する(深刻な)問題である．

2. 倍積問題の経過

この経過は，(少なくとも)前半は異様で，後半は異常である．

エジプト王宛てのEratosthenesの手紙の形でEutokiosがこの問題の由来を，以下の(A)の様に偽造(或いは創作)している．

(A)[伝説]　或る無名詩人の詩 ── CretaのMinos王が「息子Glauchosの墓を2倍の大きさにせよ」と命じた．これに応じてgeometer(＝設計技師，測量士)たちが努力したが，この作図題は解けなかった．

(B)[史実]　Hippocratesの指針(BC440頃)：「(立方体の)倍積問題は2個の比例中項を作図出来れば解ける．」(この結果を得たideaはよく判らないが，帰納したのかも知れない．)

(C)[伝説]　ギリシャの昔話に屡々出て来るApollonの神託が，「倍積問題を解かないと，ギリシャを災厄が襲う」という趣旨のことを述べたという話が残されている．Platonは，この神託につい

て,「これは, ギリシャ人は数学をもっと真面目にやれと言う意味だ」というような説教をして, 押しかけた群衆の騒ぎを抑えた. Platonが, 神と人の間の通訳をやったというこの伝承は面白い.

(D)[史実] そうしておいてPlatonは, 早速AkademeiaのArchytasやEudoxos等(有能な後輩や弟子たち)に倍積問題の研究を指示した. 勿論, "正当な"平面幾何学以外の方法で解くことになるのである(!). (*1)

(E)[異常事態] Hippocratesによる2個の比例中項の作図以来途絶えていた倍積問題の解法が, Platonの指示を受けて, その後650年間に渡って続々と得られた. 十数人の解法(そのうちの1篇は誤ってPlatonに着せられたそうである)が記録に残っている[2]. 最初のHippocratesから数えると, 800年間(つまり鎌倉初期から現在までに当たる期間)作図法の工夫が続いたことになる. (あとの方は, 勿論, 惰性であろう.)

3. 窮極兵器

前項のような騒ぎが発生する場合として, われわれがまず思いつくのは, 何か緊急事態が生じたか, またはこの結果が大いに金になる状況が生じたかではなかろうか. そうして, 実際, 以下に述べるように, この両方が成立する事態が生じたのである. Platonから百数十年後, シラクサにおいて, Romaとの命運を決する戦争が起こった. シラクサの王Hieronは, 戦を予期して有能な技術者を高級で雇っていた. Archimedesはその技師長(?)であった. (*2)(実は, 既にBC399年から, 前任のDionusios1世が長期戦に備えて準備を始めていた.)

当時, 数十キログラムの岩塊を数百メートル射出する投石機(カタパルト)が既に開発されていた. これは例えば動物の筋繊維や腱(ギリシャ語でneuron)の束の様なものの"ねじれ弾性"を利

(*1) この問題を解決する方法上の困難は既に判っていたことで, Platonはそれ(定規とコンパス以外の道具を用いること)を嫌って排除していたと言われている[Plutarchos等]. しかし一方, Platonは『国家』の中で, 空間の幾何学を研究せよと言っている.

(*2) PlutarchosはArchimedesを(数学者を意味する)"哲学者"ではなく, "技師"と呼んでいる[3].

用するものであった．効率を上げる(即ち射程距離を伸ばして正確に命中させる)ために精密な設計が行われ，そのプロセスの中で，或る数の立方根を求めることが必要になった．(これで倍積問題はやっと正気の話になる．)このことは，(数学史からではなく)技術史の研究から，今世紀になって，漸く明らかにされた[4]．(*1)

4．立方根の計算

Archimedesが設計したカタパルトは，のちにRomaで作られたものと本質的には異なっていなかったであろう．腕木を回し切ってから離すと，繊維の束の"ねじれ反動"で，滑走部に置かれた弾丸(岩塊)が打ち出される．できるだけ重い弾丸を発射するためには，ねじれ繊維の束を巻いて作られた円筒の形を最適に決める必要がある．円筒の直径と長さの比は別のルールから一定にしてあるので，条件は弾丸の重さから，繊維束の適切な直径を求める公式に帰する．

この公式は，EgyptのPtolemaios王朝のために働いていたギリシャ人技術者(即ちArchimedesを頂点とするAlexandriaの学者達)が行った多数の実験によって達成された．結果の大要は次の様にまとめられたと思われる：

D=ねじれ繊維の束の直径(単位はdactylos≒19.8mm)

M=弾丸の重さ(単位はmina≒437gram)

とおいて，

$$D=1.1\times\sqrt[3]{M\times100}\ .$$

これが，立方根の計算に，有能な数学者が長年の間，力を注いだ結果であろう．この問題に関与した数学者達のうちの主要な数人を以下に挙げるが，これを見ただけで，古代ギリシャが国家の危機に備えて，長い間，力を結集していたことが感じられると思う．

(*1)　[4]はギリシャ数学の歴史についても，画期的な論考であるが，その手近な解説が[5]にある．

Hippocrates　(BC440. 基本的な指針)

Archytas , Eudoxos (BC4世紀前半. Platonの指示による)

Eratosthenes　(BC3世紀中葉.「自分の研究はカタパルトが目的である」と明言していた)

Archimedes　(BC3世紀後半. カタパルトの設計・製作と実戦)

5. **epilogue**

Archimedesは戦に敗れて死んでしまったが(筆者はArchimedesの死因に疑問を持っている), 高度の数学と強力な兵器との密接な(時として思いがけない)関係は, (Archimedesが最初かも知れないが), その後も文明の歴史の重要な時点で, 時々現れている. (これを,「数学は戦争によって発達してきた」と言う人もいる.)

§2. "Archeomathematics"

考古数学("Archeoastronomy"の真似であるが)を, 暫定的に次の様に定義しておく:「文献に従い目的を決めて, 数学と関連するものを調査・発見すること. 」これによって数学史への材料, 或いは"数学史外伝"等が得られる.

1. **Muzeion**

Alexandriaにあった古代世界の最大の図書館・研究機関の複合体で, Egypt王国の経済を傾けて運営された. Alexandros大王が征服した文明地域(これは当時の全世界である)のあらゆる主要な"書物"五十万点を集めていた. Aristotelesの助言と協力によって造られたが, 数学においても, 東方の全資料が集められていた筈である. またEuclidの『原論』の執筆場所であったであろう. この古代の叡知の集積はCaesarの不注意から完全に焼失した. 原因は機密とされていたが, AD1世紀末にPlutarchosが暴露した[6].

ギリシャの末裔を以て任じるヨーロッパ人は, この事件のせいで, 図書館の火事の話が好きになった様である(ウンベルト・エーコ『薔薇の名前』等). 一方, 近頃は, 水没した可能性があるとも

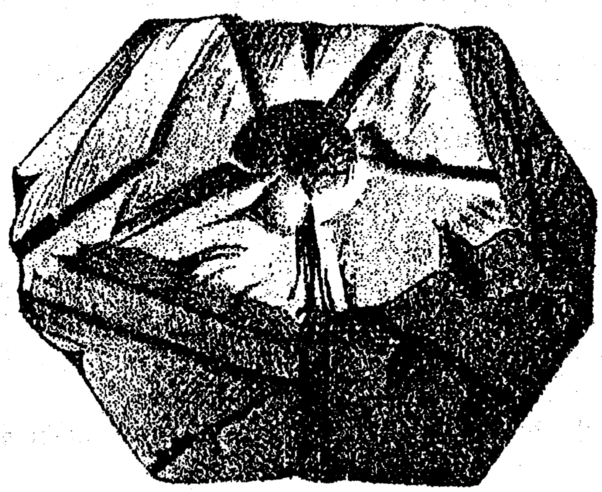
言われる.(あまり信は置けないが)調査すべきであろう.(なお,UNESCOによる最近の新Alexandria図書館建設計画は(趣意書を見た限りでは),低俗な政治的宣伝の様に思われる.)

2. 正十二面体

鉱物の(単)結晶に,正十二面体のものが存在し得ないことは,19世紀に数学の結晶の理論によって証明されているが[7],BC第1Millenium初頭(即ち約3,000年前)に,正十二面体の物品が製作された.(なお鉱物の結晶に限らなければ,本質的には正十二面体を為す生物は沢山存在するが,何れも顕微鏡或いは電子顕微鏡によって発見されたものである.)

正十二面体に関する(19世紀後葉から20世紀初頭にかけての)考古学的発見について,F.Lindemannによる研究報告2篇(1897と1934)[8]の関連する部分の概要を,“100周年記念”として記しておくのは無意味ではあるまい.正十二面体が,Platonを中心としてギリシャで重視されるに至った理由と背景は,以下の様にこの研究報告によって明らかになる.

(a) Etruria人がBC第1Millenium初期に製作したと見られる正十二面体の石製品(おもり)が,19世紀後期にイタリアのMonte Loffaで発掘された(次の図.ほぼ実物大).



(b) この作品のヒントと考えられるのは,黄鉄鉱の結晶である.黄鉄鉱の結晶には種々の形のものがあるが,正十二面体に近い形のものが,特定の地域(Elba島およびAlpsの南部,特に

Piemonteの南の渓谷)で採掘されていた. 当時(鉄器時代初頭), これは(見事な形と素材としての重要性から)注目される貴重品であった筈であり, これを模して12面体の物品が製作されたと思われる. 他の正多面体の鉱物結晶を手本として, 試行錯誤を経て正十二面体に近いものが作られたことはあり得るであろう. これが上記(a)の発掘品かも知れない.

(c) この種の製品は, 南AlpsあるいはElba島から, 一方は東のEtruria地方に伝播し, 他方は北のEtruria人を経て, スイス地方のCeltic人からさらにGalia地方へ伝わったと思われる. (これらの民族のうち, とくにEtruria人とCeltic人は, 対称図形に強い嗜好をもっていた.)なおこの時代, エジプトやバビロニアでは, 正多面体は知られていなかった(または関心がなかった)ようである.

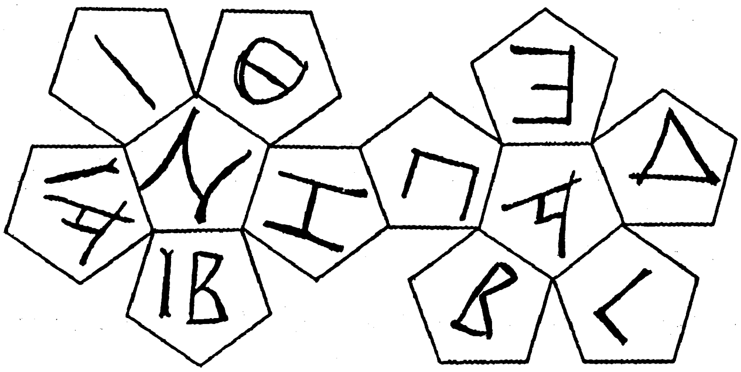
(d) PythagorasはBC500年頃迄生きていたから, 正十二面体の存在を知ったことは確かであろう. 彼の教団の教条に, 「正多面体と四大とが対応している」という一条があったが, 新たに正十二面体に"エーテル"あるいは"世界"(=宇宙)を対応させることにしたという.

(e) 正十二面体の概念を, Pythagoras教団から伝承したPlatonは, これを哲学と数学の対象として, 理論化した. 彼は, 正十二面体が, 人智によって構成されたことを極めて重視し, (Pythagorasを受け継いで)正十二面体を"世界"の形とした. 彼は対話篇『パイドン』において, 死に臨むSocratesに, 「正十二面体をなす世界を空中から俯瞰する」ミュートスを語らせている.

この"世界観"と関連する興味ある見解を, Plutarchosが("Symposia"の一篇で)述べている. 或る時の宴会で, 「今日はPlatonの誕生日だから, 彼にも議論に加わってもらおう」という趣向で, 「Platonは『神は常に幾何学をやっている』と言っていたといわれているが, これはどんな意味か」という議論になり, 最後に長老のPlutarchosが次の様な意味のことを語る: 神の仕事は世界の材料と形を作ることである. 既に作り出した材料を用いて, 神は世界の形を正十二面体と定めた. 従って, 『原論』にある「(空間における)相似形の存在定理」は幾何学の最も重要な定理である, と自分(Plutarchos)は考えている.

(f) 今世紀初頭に, アレクサンドリア地域において, 滑石製の正十二面体が発掘されている. 下の図はその展開図である. これには, ギリシャ文字によって順番を付けてあり, この字形からヘレニズム期のもの, 恐らくBC200頃の製品といわれる. それが正しければ, EuclidがAlexandria図書

館にいた時期である.



Dodecahedron. Black steatite.
From Egypt. Collection of Flinders Petrie, London.

§3. Newtonの数学の周辺

Newtonの最も重要な業績である"Principia"や解析学を，ここで正面から話題にするのは困難なので，この§では周辺の未解決のことを述べるだけにする．随想的になるのは寛恕して頂きたい．

1．17世紀前半の数学とNewtonの数学

17世紀前半は，多くの研究者が，数学の雑多な結果を展開したという印象を与える時期である．A.Weilの(Bourbakiの)解析学の生成に関する長い歴史を，筆者は講義のために，数編の文献を調べて整理したことがあるが，プリントが数十枚になった．この中で例えば，「放物線の長さが双曲線の下の面積で表される」というFermatの手紙等も面白い．その他，Napier, Cavalieri, Wallis等々が，“古き良き時代”に活躍しているとでも言う光景である．

それに続く1660年代の1年余りの間に，Newtonが(次の項目の例から判るように)「無限小計算法」を“完成”したのは驚くべきことである．

○函数の連続性を定義するために，("Principia"の冒頭で)“ε-δ論法”を(誰にでも判る書き方で)丁寧に解説している．

○扱う函数はすべて冪級数で表される“実解析関数”．

○常微分方程式の解法.

○複素数の重要性の指摘.

○Fourier級数.

○Radon変換.

Newtonが如何にして短期間にこの様な境地に達することが出来たかは，数学の進歩ということを理解するために，是非とも解明したいことである.

Weilは，17世紀前半の流れについては，(Hegelの語を借りて)"Zeitgeist"を持ち出しているが，この“説明”は感覚的には兎も角としても，論理的にはtautologyであろう．更に17世紀前半とNewtonの関係については，殆んど分析していない．これはおそらく，執筆当時には資料がなかったことによるのであろう．その後多くのNewton文書の英訳書が出版されたが，1990年代にNewtonの殆どすべての手稿がmicrofilmで刊行された(約3万枚)[9]．その極く一部を抜き出して見ると，$\log x$の値を，双曲線の下の面積によって(小数50桁くらいまで)計算した表が，数十枚続いている．これはNewtonの思索の断片であろうが，(Gaussの場合と同様に)筆算による数値計算が，発見と何らかの関連を持つように思われる.

上に述べた様に，Newtonの記述は，初めから(ギリシャ的)公理と厳密さを備えている．「17世紀と18世紀は新しいことの発見に夢中で，ギリシャ的厳密性は19世紀になって回復した」(高木及びWeil)と言ったのは，歴史的資料の不足のためだったのでないとすれば，17世紀と18世紀の数学者達が，Newtonを読まなかったせいであろう.

2．解析と総合

"analysis"と"synthesis"はNewtonの造語(意味を明確に特定したこと)である．(Euclidの『原論』を中心とした)ギリシャ数学へのNewtonの傾倒は，彼の著述の中で顕著である.

"Principia"の成立過程で無限小解析(即ちanalyticな計算)を用いた痕跡はないといわれているが，これははっきりさせるべきことである．同書を初めからsyntheticに書いたとすれば，これは驚嘆に値する．尤も，18世紀にanalyticに書き直した数学者がいたことは，それが，Newtonが回避した問題(例えばchaosの発生)への通路を(意識はしていなかったであろうが)つけたとすれば，大き

な意義があったと考えるべきであろう.

数学のanalysis/synthesis観は, 欧米では現在も明確に伝承されている様である. 筆者の個人的経験の一つは, 1989年にGelfandが来日したとき, SL(2,C)の表現を考えていたときの回想談を散歩中に聞いたことである ── 「既約表現は"infinitesimal"には容易に数え挙げたが, "integral"に書き直す時に, Naimarkが黒板の図を見て, 重要な質問を発した:表現1はどこへ行った？」.

V.Arnoldは過激で, Moscow大学の教育・研究分野を「幾何学, 数学, 物理学, 計算機, …」と述べていた.

これと比べて思い出したのは, 1940年代に, 大学の幾何の講義の中で, 「解析幾何は現在から見ると, 代数幾何と呼んだ方が良かったのだ」という話であった.

3. ラテン語の翻訳(提案)

Newtonの膨大な手稿を見て思ったことは, この何万ページものラテン語は, 翻訳しておく必要があるということである. ヨーロッパでは, CopernicusやKeplerの主著の現代語への正確な翻訳が90年代に開始された様であるが, この様な正確な(＝完全な)翻訳は人手と時間がかかるものである. すべての古典について, こういうものが将来いつかは出来るとしても, 当面, 多少の不備があっても, 全部を翻訳しておくことは重要である. これで想い出すのは, Weilが夏休みのかなりの日数を京大に滞在したときのことである:彼は暇にまかせて教室の図書室に入って, Gauss全集をあちこち読んで, 面白いことを発見したと言っていた. もう一つは, ソ連邦でEuler全集のロシア語訳が出版されたことである. ラテン語が自由に読めないのは大きなhandicapになるであろう.

なお, これに関しては, 日本語でなく, 英語への翻訳をすることと, 機械翻訳を採用することを主張したい. その理由は, 翻訳が英語でないと, 需要が少ないことに加えて, その訳を材料として論文が書けないことである. またこれは日本で実行しようとしない方がよいであろう. 機械翻訳は, 論理的な文で, かつ内容が限定されていれば(数学の論文・手記はこの範疇に属する), 使用に耐えるものが得られる. これは既に十年以上前に先例がある. EUの事務局で, 所属国の海事法の相互翻訳がうまく出来たという. 日常の会話を機械翻訳することは, 難事中の難事で, 百年や

二百年では，ものにならないといわれるが，ここで言っている問題はその様なこととは別のことである．勿論ラテン語以外の（数学にとって）重要な古代語（例えばギリシャ語とその方言など）についても同様である．

§∞．通史から見た問題若干

数学史（通史でも各論でも）には，他の多くの歴史とは多少異なった目的・性格などがあると思われる．この観点から，通史自身に関する課題と，数学自体についての課題若干を，網羅的でなくまた形式的には区別せずに挙げる．何れも解答はまだ出ていない．

(1)　数学史のexactness ── 数学自体のexactnessは，数学特有の属性で，規則が出来ているが，数学史の場合は，難しい技術的課題である．これは，数学史の記述の原則が明確でないからであると言ってよいであろう．筆者はこの原則（exactnessの定義）を考えることを通史の目的の一つと思っているが，そういうものがあるか無いかも未だ判らない．

数学史のjournalである"Archive"は，投稿論文に，数学並みのexactnessを要求しているが，確かに立派な論文が載っている一方で，この主義のために除外された面白い論文もあると思われる．

(2) 数学のevolution ── 経時的変化は勿論“進歩”とは限らない．（“進歩”については，後で論じる．）数学の場合，形式的には（特に経時変化の機構を考えないとすれば，§0でも述べた様に）biologyにおけるevolutionと対比できると筆者は考えている．（生物の場合に，外来語"evolution"を“進化”と誤訳したのは愚劣であった．）そうすれば，数学史は「evolutionの記述と原因を叙述することである」と言うことはできる．“進歩”もこのcontextで述べられるかも知れない．ただし今迄に数人の（高名な）biologistにこのevolution論への感想を求めたところ，「全然違う」という人と，「全く同じだ」という人がいた．数学者にはこれまで尋ねていない．

(3) 進歩と時代区分 ── 一般に歴史学では，時代区分は歴史の前提と考えられているようである．数学を時代区分するために，取り敢えず“naiveな”意味での（公認された）“進歩”を用いる．

この“進歩”には，筆者は学生の時に，高木先生の講演集『過渡期の数学』[10]で遭遇した．こ

の講演の冒頭に出て来る"Treppenfunktion"のグラフの水平の線分は，垂直の線分（大進歩を意味する）をつなぐためだけに画かれたものと思うべきだったのである．

高木先生のグラフにKolmogorovの意見を加味すると，数学史は（細部は無視して）次の3回の大進歩で4期に区分されることになるのである：

（第1）純粋数学の誕生（Platon/Euclidを象徴と見ることにしておく）

（第2）近代数学（と自然科学）の誕生（Newtonが象徴である）

（第3）現代数学の誕生（Gaussを象徴とすることに異議はないとする）

(4) 進歩の機序について（試論による序論）―― 通史の観点からの重要な問題として，上述の3回の進歩の構造についての試論を述べる．この考察は，通史でない各論にも適用できると思われる．（このほかにも重要な問題があることは承知しているが，本稿の表題の「私見」に免じてご海容願いたい．）

興味があるのは，これらの進歩の詳細と原動力であるが，その目標（詳論）には，まだまだ達していないし，達しないかも知れない．3回目の進歩については，（高木先生の）Gaussを中心に置いた史談がある．本稿でNewtonについて述べたが（§3），次の2点が共通していると思われる：(i)或る期間，数学の研究が多様化する．ついで(ii)特別な人物（または少数の人物達）によって，急速に進歩する．第Ⅱ期については，本稿§1で純粋数学と異なる面を強調したが，基本的には(i),(ii)は変わらないと思われる．

勿論以上のような枠だけで（大雑把な理屈で）進歩の機構が判る訳ではない．（biologyのevolutionに期待するのは，詳細で具体的な結果を示す方法であるが，成否は不明である．）以下に，今後調べようと思っている論点・疑問の一部を列挙して，本稿を未定稿としておきたい．

○多様化は今迄の大進歩にとって，外観では，必要であった様であるが，充分でもあったのか？即ち，多様性が生じれば，必ず進歩がそれに続くのか？

○大進歩より現実的な小／中進歩の場合も同様か？

○多様化する原因は何か？

○そもそも進歩とは何か？

引用文献　(カッコ内は引用箇所のページ)

[1] Kurt von Fritz : The discovery of incommeusurability by Hippasos of Metapentum , —— Ann.Math. 48.

[2] T.Heath:"A History of Greek Mathematics", vol1 . Oxford(1921) at the Clarendon Press, (pp.244～270).

[3] 『プルターク英雄伝4』, (河野与一訳)　岩波文庫(pp.158～166).

[4] E.W.Marsden : "Greek and Roman Artillery". Oxford at the Clarendon Press , (1969～71).

[5] W.スウェデル, V.フォレイ:古代の兵器"カタパルト" —— サイエンス, (1979年5月号)　日本経済新聞社, (pp.112～122).

[6] 『プルターク英雄伝9』, (河野与一訳)　岩波文庫(pp.159).

[7] J.F.C.Hessel(1830),E.S.Fëdorov(1885,1889),A.Schoenflies(1887,1889)等による. (文献は数が多く煩雑なので省略する.)

[8] Carl Louis Ferdinand von Lindemann(1852～1939)の正多面体に関する論文:

Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen —— Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenshaftlichen Abteilung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München (1897), (pp.625～756).

Zur Geschichte der Polyeder —— 同上(1934),(pp.265～275).

[9] Sir Isaac Newton Manuscripts and Papers , 43 reels, Chadwyck-Healey Ltd.(1991).

[10] 高木貞治『過渡期の数学』(大阪帝国大学数学講演集, 1)　岩波書店 (1934).