

ニュートン・ステファンセン・シャンクス

近藤 弘一 (Koichi Kondo) 中村 佳正 (Yoshimasa Nakamura)

大阪大学大学院 基礎工学研究科 情報数理系専攻

ステファンセン法は導関数を用いない反復解法で、非線形方程式のひとつの単根を求めるのに用いられる。本稿ではステファンセン型の新しい反復法を提出する。新しい反復法のポイントはシャンクス変換の効果的な利用である。 k 次シャンクス変換に基づく新しい反復法の収束次数は、1 次収束する反復列に対しては $k+1$ である。 $k=1$ のとき新しい反復法はステファンセン法に帰着する。2 次収束する反復列に対しては $(k+2)2^{k-1}$ 次収束する。反復法の局所的な収束性も証明される。なお、シャンクス変換の計算では ε -アルゴリズムの助けにより行列式の直接的な計算を回避している。

1 序論

ニュートンの反復解法は導関数を用いた反復解法で解に 2 次収束する。ニュートン法は考えている関数の線形近似に基づいている。ニュートン法の収束次数をさらに高める試みとしては、ハーレイ法など関数の高次の近似を用いる方法 [3]、ニュートン法の合成による方法 [9]、関数をあらかじめ変形して収束次数を高める方法 ([4], [5]) がある。ニュートン法では導関数が存在するだけでなく、導関数は反復列が収束するためのいくつかの条件を満たさねばならない。非線形方程式

$$f(x) = 0$$

とそのひとつの単根 α に対する通常のニュートン反復を

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \Psi(x_n) \\ &\equiv x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

と書く。 α を含む適当な区間 I で $f(x)$ は C^2 級かつ $f'(\alpha) \neq 0$ であれば、区間 I において $\max |\Psi'(x)| < 1$ が成り立ち、反復列 x_0, x_1, x_2, \dots は α に 2 次収束する。 k 次収束するニュートン型反復法 [5] では、 $f(x)$ は十分な回数微分可能で $f'(\alpha) \neq 0$ に加えて $f''(\alpha) = 0, \dots, f^{(k-1)}(\alpha) = 0, f^{(k)}(\alpha) \neq 0$ をみたさねばならない。

導関数 $f'(x)$ 等を用いることなく2次収束性を実現している反復解法にステファンセン法 [11] がある。まず、

$$\phi(x) = x + f(x) \quad (1)$$

とおき、 ϕ を反復関数とする単純な反復列 y_0, y_1, y_2, \dots を準備する、

$$y_{n+1} = \phi(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

数列 $\{y_n\}$ がある数 α に収束すれば $\alpha = \phi(\alpha)$ より $f(\alpha) = 0$ は明らか。縮小写像の原理より、 α を含む区間 I において $\max |\phi'(x)| < 1$ ならば、反復列 $\{y_n\}$ は α に収束する。ステファンセン法では ϕ を利用して漸化式

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \Phi(x_n) \\ &\equiv x_n - \frac{(\phi(x_n) - x_n)^2}{\phi(\phi(x_n)) - 2\phi(x_n) + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

により反復列 $x_0 = y_0, x_1, x_2, \dots$ を生成する。 Φ が反復関数である。数列 $\{x_n\}$ がある数 α に収束すれば $f(\alpha) = 0$ 。以下に $\{x_n\}$ と単純な反復列 $\{y_n\}$ との関係を見よう。例えば、 x_1 を定めるには3数 y_0, y_1, y_2 が必要であるが、 y_3, \dots 以降は必要ない。もとの反復列 $\{y_n\}$ が発散する場合でも、初期値 x_0 を方程式 $x = \phi(x)$ の根 α を含む適当な区間 I に選べば、 $\phi(x)$ が C^1 級で $\phi'(\alpha) \neq 1$ ならばステファンセン法の反復列 $\{x_n\}$ は根 α に1次以上の収束をする。特に、 $\phi(x)$ が C^2 級ならば2次収束する。この場合、反復関数 ϕ について条件 $\max |\phi'(x)| < 1$ は必要ない。さらに、 $\phi'(\alpha) = 1$ であっても適当な条件のもとで $\{x_n\}$ は α に収束する (cf. [9], p. 245)。

ステファンセン法もニュートン法と同様に関数の線形補間公式を利用している。Fig.1. のように、 $f(\alpha) = 0$ なる根 α を関数 $y = f(x)$ と x -軸との交点として考える。2点 $(a_0, f(a_0)), (a_1, f(a_1))$ を結ぶ割線と x -軸との交点 $\bar{\alpha}$ を求めて α の近似値する。ただし、 a_1 は

$$a_1 \equiv \phi(a_0)$$

により定める。割線の方程式

$$y = \frac{f(a_0) - f(a_1)}{a_0 - a_1}(x - a_0) + f(a_0)$$

を解いて近似値

$$\bar{\alpha} = a_0 - \frac{f(a_0)}{\frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}}$$

を得る. $a_1 - a_0 = f(a_0)$ であるから近似値 $\bar{\alpha}$ は

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= a_0 - \frac{f(a_0)^2}{f(a_0 + f(a_0)) - f(a_0)} \\ &= a_0 - \frac{(\phi(a_0) - a_0)^2}{\phi(\phi(a_0)) - 2\phi(a_0) + a_0}\end{aligned}$$

と表せステファンセン法による α の推定値に他ならないことがわかる. 一方, $h \equiv a_1 - a_0$ とおき, 割線が点 $(a_0, f(a_0))$ における接線に近づく極限 ($h \rightarrow 0$) を考えると

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= a_0 - \frac{f(a_0)}{\frac{f(a_0+h) - f(a_0)}{h}} \\ &\rightarrow a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)} \quad \text{as } h \rightarrow 0\end{aligned}$$

と書ける. すなわち, $\bar{\alpha}$ はニュートン反復による α の推定値に移行する. 以上に述べたようにステファンセン法はニュートン法の差分版と位置づけられる. 差分ステップサイズに相当する $h = a_1 - a_0$ は差分点 a_0 ごとに異なるから, ステファンセン法はニュートン法の「不等間隔差分」(cf. [6]) とみなせよう.

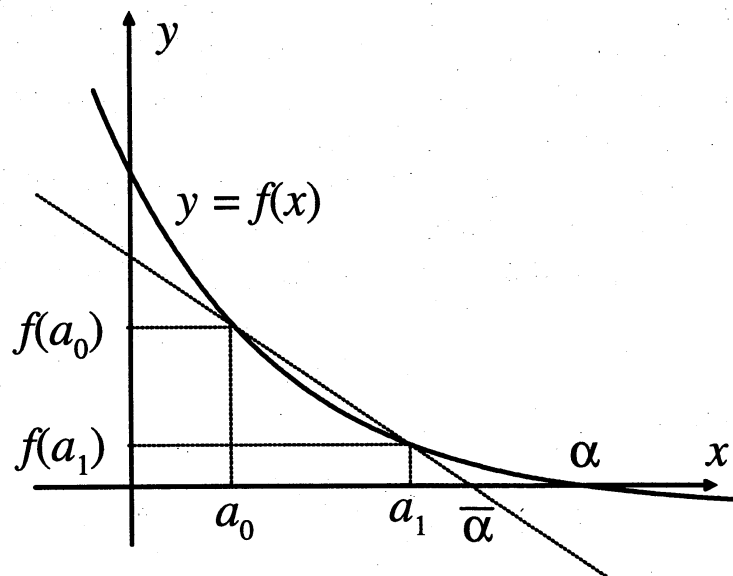


Fig. 1. ステファンセン反復

本稿では高次の収束次数をもつ新しいステファンセン型反復解法を提出する. 出発点となるのは, ステファンセン法の1ステップが3数 y_n, y_{n+1}, y_{n+2} に対するエイトケン変換

\bar{y}_n [1] と一致することである。すなわち、

$$\begin{aligned}\Phi(x_n) &= \bar{y}_n \\ &\equiv \frac{\begin{vmatrix} y_n & y_{n+1} \\ y_{n+1} & y_{n+2} \end{vmatrix}}{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}.\end{aligned}\quad (4)$$

注意しなければならないのは、数列 $\{y_n\}$ に対するエイトケン加速列 $\{\bar{y}_n\}$ とステファンセン反復列 $\{\Phi(x_n)\}$ の違いである [13]. $x_{n+1} = \bar{y}_n$ であるが、 x_{n+2} と \bar{y}_{n+1} は異なる。また、エイトケン加速ではあらかじめ単純な反復列 $\{y_n\}$ を準備する必要があり、加速列 $\{\bar{y}_n\}$ は α に必ずしも収束するとは限らない。収束する場合も本質的に1次収束にすぎない [7]. 具体例についてステファンセン反復とエイトケン加速の相違を確認しよう。反復関数

$$\phi(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

によって数列 $y_{n+1} = \phi(y_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, を生成し、エイトケン加速による加速列 $\{\bar{y}_n\}$ とステファンセン反復による反復列 $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, $x_0 = y_0, x_1, x_2, \dots$, とを比較すれば、Table 1. のように

$$\bar{y}_n = y_{2n+3}, \quad x_n = y_{3(2^n-1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

の関係にあることがわかる。

Table 1. エイトケン加速とステファンセン反復

単純な反復列	エイトケン加速列	ステファンセン反復列
y_0		$x_0 = y_0$
y_1		
y_2		
y_3	$\bar{y}_0 = y_3$	$x_1 = y_3$
y_4		
y_5	$\bar{y}_1 = y_5$	
y_6		
y_7	$\bar{y}_2 = y_7$	
y_8		
y_9	$\bar{y}_3 = y_9$	$x_2 = y_9$
y_{10}		
...
y_{20}		
y_{21}	$\bar{y}_9 = y_{21}$	$x_3 = y_{21}$
y_{22}		
...

エイトケン変換の拡張に k 次シャンクス変換 [10] がある。これは $2k+1$ 数 y_n, \dots, y_{n+2k} を用いたハンケル行列式の比で表される変換である。次節では、シャンクス変換による

新しい反復解法を定式化し、その局所収束性を示す。3節では、新しい反復解法による反復列が収束する場合、 $\phi'(\alpha) \neq \pm 1$ ならば少なくとも $k+1$ 次収束することを証明する。 $k=1$ の場合がステファンセン法である。さらに、 $y_{n+1} = \phi(y_n)$ で定義される数列が2次収束する場合には、シャンクス変換を用いた反復列は $(k+2)2^{k-1}$ 次収束する。4節では新しい反復法の数値計算例を与える。

2 新しい反復解法とその局所収束性

数列 $\{y_n\}$ に対する k -次シャンクス変換 [10] とは $\{y_n\}$ のなすハンケル行列式の比として

$$\bar{y}_n^{(k)} \equiv \frac{\left| \begin{array}{cccc} y_n & y_{n+1} & \cdots & y_{n+k} \\ y_{n+1} & y_{n+2} & \cdots & y_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n+k} & y_{n+k+1} & \cdots & y_{n+2k} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc} \Delta^2 y_n & \cdots & \Delta^2 y_{n+k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^2 y_{n+k-1} & \cdots & \Delta^2 y_{n+2k-2} \end{array} \right|}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

のように表される。ここに、 Δ は前進差分演算子で

$$\Delta y_n \equiv y_{n+1} - y_n, \quad \Delta^2 y_n \equiv y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

と定義される。 $k=1$ のときはエイトケン変換 [1] に帰着する。シャンクス変換もエイトケン変換と同じく、通常、数列 $\{y_n\}$ に対する収束の加速法として用いられる。前節の例について、もとの単純な反復列と2次のシャンクス変換 $\bar{y}_n^{(2)}$ 、3次のシャンクス変換 $\bar{y}_n^{(3)}$ との間には

$$\bar{y}_n^{(2)} = y_{3n+8}, \quad \bar{y}_n^{(3)} = y_{4n+15}$$

の関係があり、収束は加速されているものの本質的にはシャンクス変換列は1次収束に過ぎない。なお、フィボナッチ数列を含むより一般の数列に対する同様な議論とその加法公式への応用が [7] にある。

シャンクス変換の計算では行列式の値を必要とする。行列式計算は一般に多くの計算量を必要とし、桁落ちも発生しやすい。本稿では ε -アルゴリズム (cf. [12], [2] pp. 40-51) によって、行列式を直接的に計算をすることなく数列 $\{\bar{y}_n^{(k)}\}$ を計算する。

$$\varepsilon_n^{(0)} = 0, \quad \varepsilon_n^{(1)} = y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

とおけば数列 $\{\bar{y}_n^{(k)} | n = 0, 1, \dots\}$ は漸化式

$$\varepsilon_n^{(j+1)} = \varepsilon_{n-1}^{(j-1)} + \frac{1}{\varepsilon_n^{(j)} - \varepsilon_{n-1}^{(j)}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

から

$$\bar{y}_n^{(k)} = \varepsilon_n^{(2k+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

によって得ることができる。項 $\bar{y}_n^{(k)}$ を得るために必要な ε -アルゴリズムによる漸化式の計算回数は、 $k(2k+2n+1)$ 回である。一方、シャングス変換の行列式を直接計算すると $k!(k^2+2k-1)$ 回の積が必要である。ゆえに、 ε -アルゴリズムを用いることにより計算量を大幅に低減できる。なお、 ε -アルゴリズムは離散時間可積分系とひとつ差分 KdV 方程式に同値である。加速法と離散時間可積分系の関わりについては解説 [7], [8] を参照されたい。

さて、適当な初期値 x_0 から反復計算によって非線形方程式 $f(x) = 0$ のあるひとつの実根 α を求める問題を考えよう。ある自然数 k について反復列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \Phi_k(x_n) \\ &\equiv \frac{\begin{vmatrix} \phi^{(0)} & \phi^{(1)} & \dots & \phi^{(k)} \\ \phi^{(1)} & \phi^{(2)} & \dots & \phi^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^{(k)} & \phi^{(k+1)} & \dots & \phi^{(2k)} \end{vmatrix} (x_n)}{\begin{vmatrix} \Delta^2 \phi^{(0)} & \dots & \Delta^2 \phi^{(k-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^2 \phi^{(k-1)} & \dots & \Delta^2 \phi^{(2k-2)} \end{vmatrix} (x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

により定める。ただし、 $\phi^{(j)}(x_n)$ は反復関数 $\phi = x + f$ の j 回の合成

$$\phi^{(j)}(x_n) \equiv \overbrace{\phi(\phi(\dots\phi(x_n)\dots))}^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2k \quad (8)$$

である。 $\Delta^2 \phi^{(j)}(x_n)$ は

$$\Delta^2 \phi^{(j)}(x_n) \equiv \phi^{(j+2)}(x_n) - 2\phi^{(j+1)}(x_n) + \phi^{(j)}(x_n), \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2k-2 \quad (9)$$

によって定義される。 $k=1$ のとき反復関数 Φ_k はステファンセン法の反復関数 (3) に帰着する。

$\Phi_k(x_n)$ は数列 $\{y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+2k}\}$ に対する k 次シャングス変換に一致する。シャングス変換を数列の加速法に用いる際には数列 $\{\bar{y}_n^{(k)}\}$ は必ずしも収束しないが、反復法としては、初期値を十分解 α に近くとることで反復法 (7) の定める数列 $\{x_n\}$ は常に α に局所収束することがわかる。

定理 1

反復計算 $y_{n+1} = \phi(y_n)$ による反復列 $\{y_n\}$ が非線形方程式 $f(x) = 0$ のある根 α に局所収束し、 $\phi'(\alpha) \neq 0$ であれば、シャングス変換に基づく反復法もまた α に局所収束する。□

3 収束次数

前節で定式化した新しい反復法 (7) の収束次数について以下が証明できる。

定理 2

反復計算 (7) により定まる数列 $\{x_n\}$ が $f(x) = 0$ の根 α に収束するとき、もし $\phi'(\alpha) \neq \pm 1$ であれば、 $\{x_n\}$ は α に少なくとも $k+1$ 次収束する。ただし、 $\phi(x) = x + f(x)$ 。□

定理 2 では非線形方程式 $f(x) = 0$ の根 α に収束する数列を $y_{n+1} = \phi(y_n)$, $\phi(x) = x + f(x)$, なる形の単純な反復によって生成した。 $\phi(x) = x + f(x)$ の代わりに、ニュートン法の反復関数 $\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$ を選んでみよう。ただし、 $f(x)$ は α を含む区間で C^2 級で $f'(\alpha) \neq 0$, $f''(\alpha) \neq 0$ とする。このとき、 $\phi(x)$ は条件 $\phi'(\alpha) = 0$, $\phi''(\alpha) \neq 0$ を満たし、数列 $\{y_{n+1} = \phi(y_n)\}$ は根 α に局所 2 次収束する。対応する新しい反復法の収束次数については以下が成り立つ。

定理 3

反復計算 (7) により定まる数列 $\{x_n\}$ が α に収束するとき、もし $\phi'(\alpha) = 0$, $\phi''(\alpha) \neq 0$ であれば、 $\{x_n\}$ は α に少なくとも $(k+2)2^{k-1}$ 次収束する。ただし、 $\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$ 。□

文献 [9] p. 252 には 2 段の合成ニュートン法によって 3 次収束する反復法が与えられている。定理 3 で扱った反復法の $k = 1$ の場合はニュートン列によるステファンセン反復で 3 次収束するが、これは文献 [9] の反復法などとは異なっている。

4 数値計算例

この節では加速法と本稿で考案したシャンクス変換による反復解法の数値計算例を示す。なお使用した計算機の仕様は以下の通りである。

CPU: Intel Pentium Pro 200MHz
 言語: GNU C Ver. 2.7.2
 数値型: 四倍精度浮動小数点数

例 1. 定理 2 の応用として非線形方程式

$$f(x) = \exp(-x) - x = 0, \quad \alpha \simeq 0.56714329040978104129$$

を考える。関数 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \exp(-x)$$

とする。 $\phi'(\alpha) \neq 0, \pm 1$ だから定理 1, 2 の仮定が満たされている。初期値を $x_0 = 1$ とし、単純な反復法 $x_{n+1} = \phi(x_n)$, ステファンセンの反復法 $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ とシャンクス変換を用いた反復法 $x_{n+1} = \Phi_k(x_n)$, $k = 2, 3, 4$, による反復計算の結果を Fig. 2. と Table 2. に与える。 Fig. 2. は誤差 $\log_{10} |f(x_n)|$ の減少の様子を、 Table 2. では反復回数と収

束次数の推定値の変化をそれぞれ表している. Table 2. における反復回数 n とは, 反復計算の終了条件

$$|f(x_n)| < 10^{-r}, \quad r = 14$$

を満たすまでにかかった反復回数である. 単純な反復法よりもステファンセンの反復法の方が少ない反復回数で収束し, 新しく定式化した反復法の反復回数がさらに少なくなることが確認できる. しかも, k が大きくなるにつれて反復回数はより減少する. Table 2. における収束次数については, 単純な反復法とステファンセンの反復法では理論的な収束次数が数値計算結果に反映されている. 新しく定式化した反復法でも $k=2$ の場合に理論値に近い収束次数が現れている. しかし, $k=2$ の $n=2$ ステップ以降と $k=3, 4$ の場合には, 数値の精度が計算機の精度の限界に達しているため, 収束次数をチェックできない. 例えば, 反復法の収束次数が 3, 4, 5 次で, あるステップで誤差が $O(10^{-6})$ である

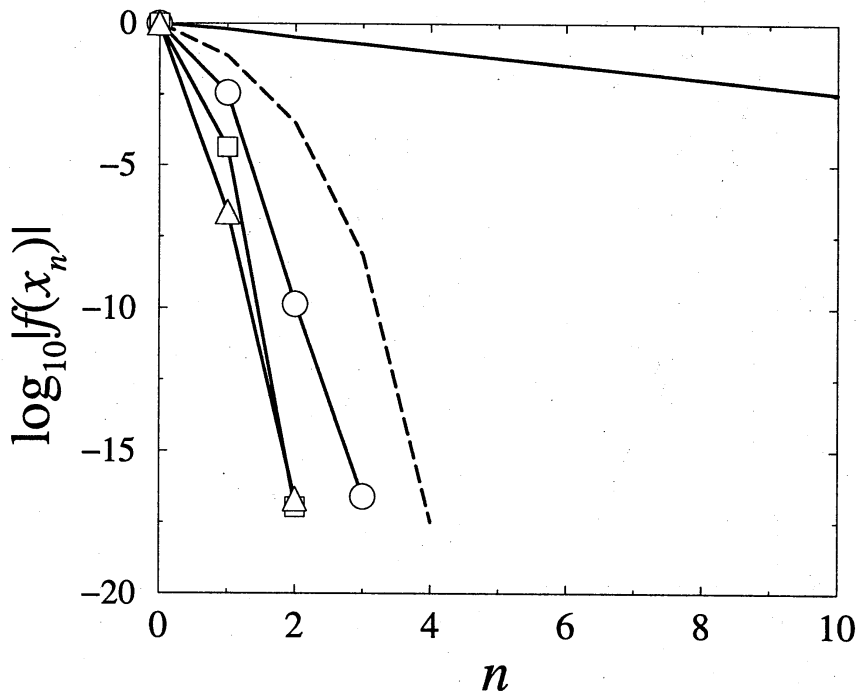


Fig. 2.

種々の反復法における誤差 $\log_{10} |f(x_n)|$ の比較. $\phi'(\alpha) \neq 0, \pm 1$ の場合.

実線: 単純な反復法. 破線: ステファンセン反復. $\circ, \square, \triangle$: 新しい反復法 (それぞれ, $k=2, 3, 4$)

Table 2. 反復回数と収束次数

	反復回数 n	収束次数	
		数値結果	理論値
単純な反復法	57	1.00	1
ステファンセンの反復法	4	2.14	2
\circ 新しい反復法 ($k=2$)	3	3.09	3
\square 新しい反復法 ($k=3$)	2	—	4
\triangle 新しい反復法 ($k=4$)	2	—	5

とすると、次のステップで誤差はそれぞれ $O(10^{-18}), O(10^{-24}), O(10^{-30})$ となる。四倍精度浮動小数点型の精度はこの計算機の仕様では $O(10^{-18})$ なので、数値の精度がこの数値型の精度を越えてしまう。

例2. 定理3の応用として条件 $\phi'(\alpha) = 0, \phi''(\alpha) \neq 0$ を満たす非線形方程式の数値例を与える。方程式 $f(x) = \exp(-x) - x = 0$ に対してニュートン法の反復関数 $\Psi(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \Psi(x) \\ &= x + \frac{\exp(-x) - x}{\exp(-x) + 1} \end{aligned}$$

とおく。 $\phi'(\alpha) = 0, \phi''(\alpha) \neq 0$ は明らか。ニュートン法 $x_{n+1} = \Psi(x_n)$ とシャunks変換 $x_{n+1} = \Phi_k(x_n), k = 1, 2, 3, 4$, による反復計算の結果を Fig. 3. と Table 3. に表す。シャ

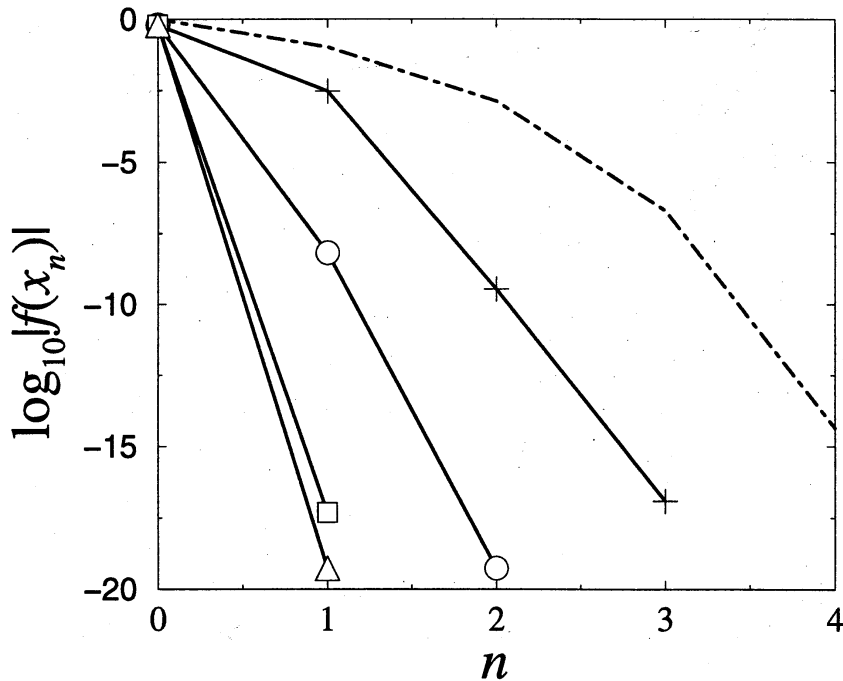


Fig. 3. 種々の反復法における誤差 $\log_{10}|f(x_n)|$ の比較。 $\phi'(\alpha) = 0, \phi''(\alpha) \neq 0$ の場合。破線：ニュートン法。 +, O, square, triangle：新しい反復法 (それぞれ, $k = 1, 2, 3, 4$)

Table 3. 反復回数と収束次数

	反復回数 n	収束次数	
		数値結果	理論値
ニュートン法	4	2.06	2
+ 新しい反復法 ($k = 1$)	3	2.94	3
O 新しい反復法 ($k = 2$)	2	—	8
square 新しい反復法 ($k = 3$)	1	—	20
triangle 新しい反復法 ($k = 4$)	1	—	48

ンクス変換を用いた反復法では k が大きくなるにつれて収束が速くなっている。例 1 と同様な理由により、3 次収束する場合に限り理論的な収束回数に近い数値計算結果が現れている。

5 結論

本稿では、シャンクス変換を反復解法に応用することで、高次の収束回数をもつステファンセン型の反復解法を提出した。新しい反復法は導関数を必要としない反復解法である。もとの反復列 $\{\phi(x_n)\}$ が 1 次収束するならば、この反復解法により得られる数値列 $\{\Phi_k(x_n)\}$ は、解の近くから出発する限り必ず正しい解に収束する (定理 1)。 k 次シャンクス変換を用いた場合、収束回数は少なくとも $k+1$ 次である (定理 2)。 $k=1$ の場合はステファンセンの反復法に相当する。ニュートン法のような 2 次収束する反復列 $\{\phi(x_n)\}$ を用いた場合、反復列 $\{\Phi_k(x_n)\}$ は $(k+2)2^{k-1}$ 次収束する (定理 3)。なお、 ε -アルゴリズムを利用することで行列式の直接的な計算を回避している。

反復法についての計算例 1, 2 では、新しい反復法がニュートン法やステファンセンの反復法より少ない反復回数で収束すること、および、計算機の精度の限界内では定理 2, 定理 3 で示した収束回数が、数値計算結果に反映されていることが確認できる。本稿で定式化した反復解法は、任意多倍長精度の数値型を持つような計算機で非常に高い精度の解を必要とする場合にとりわけ有効な手段となるであろう。

また、ニュートン法とステファンセン法の関係、エイトケン加速とステファンセン反復の相違についても解説した。加速法と離散時間可積分系の密接な関連については最近の可積分系研究においてよく調べられているが、第 1 節で指摘したように、ステファンセン法をニュートン法の「不等間隔差分」とみなすことで、数値計算法や最適化アルゴリズムなどの離散解析と可積分系との新しい接点が明らかとなった。

謝辞

本報告の結果の一部は中村を研究代表者とする文部省科学研究費 08211106, 08874013, 09440077, 09559011 の援助を得てなされた。ここに感謝の念を表したい。

参考文献

- [1] A. C. Aitken, On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **46** (1926) 289-305.
- [2] C. Brezinski, *Accélération de la convergence and analyse numérique*, Lecture Note in Math. **584**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [3] J. E. Dennis and R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1983.

- [4] W. F. Ford and J. A. Penline, Accelerated convergence in Newton's method, *SIAM Rev.* **38** (1996) 658–659.
- [5] J. Gerlach, Accelerated convergence in Newton's method, *SIAM Rev.* **36** (1994) 272–276.
- [6] R. Hirota, Conserved quantities of “random-time Toda equation”, 数理解析研究所講究録 **1005** (1997) 22–27.
- [7] 亀高 惟倫, フィボナッチ・コーシー・エイトケン, 数学セミナー, No. 1-5, (1986).
- [8] A. Nagai and J. Satsuma, Acceleration methods and discrete soliton equations, 数理解析研究所講究録 **933** (1995) 44–60.
- [9] A. M. Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of Equations, Second Edition*, Academic Press, New York, 1966.
- [10] D. Shanks, Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences, *J. Math. and Phys.* **34** (1955) 1-42.
- [11] J. F. Steffensen, Remarks on iteration, *Skand. Aktuar Tidsskr.* **16** (1933) 64-72.
- [12] P. Wynn, On a device for computing the $e_m(S_m)$ transformation, *Math. Tables Aids Comput.* **10** (1956) 91-96.
- [13] 山本 哲朗, 数値解析入門, サイエンス社, 1976.

近藤 弘一

E-mail address: kon@sigmath.es.osaka-u.ac.jp

中村 佳正

E-mail address: naka@sigmath.es.osaka-u.ac.jp