

# Théorèmes de convergence pour les groupes kleinien décomposables

Ken'ichi Ohshika

le 20 mai, 1997

Dans cette note, on annoncera quelques résultats sur la convergence des groupes kleinien qu'on a expliqués à la conférence du RIMS. Une partie des résultats est déjà apparue dans [6], et on a un plan d'en publier le reste dans [7].

L'un des buts les plus importants de la théorie de groupe kleinien est de déterminer le type topologique de l'espace de déformation pour un groupe kleinien donné. Il semble que la première étape pour cela soit de distinguer les suites convergentes dans l'espace de déformation des divergentes. Il s'agirait des théorèmes de convergence pour les groupes kleinien. Le premier exemple des théorèmes de ce type serait celui de Bers [1], dans lequel il a montré que la "tranche" de Bers est précompacte dans l'espace de déformation. On peut interpréter ce théorème comme celui de convergence comme suivant:

Soit  $QH_0(S)$  l'espace de groupes fuchsien isomorphes au groupe fondamental d'une surface de type hyperbolique  $S$  préservant la parabolicité. D'après les théorèmes d'Ahlfors, Bers, Kra, Maskit, et Sullivan, parmi les autres, on sait que  $QH_0(S)$  est homéomorphe au produit direct des espaces de Teichmüller,  $\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S)$ . Appelons l'homéomorphisme ci-dessus celui d'Ahlfors-Bers. Prenons une suite des structures conformes  $\{m_i\}$  dans  $\mathcal{T}(S)$  et un point  $n \in \mathcal{T}(S)$ . Soient  $\Gamma_i$  des groupes kleinien avec des isomorphismes  $\phi_i : \pi_1(S) \rightarrow \Gamma_i$ , qui correspondent  $(m_i, n) \in \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S)$  par l'homéomorphisme d'Ahlfors-Bers. Alors la suite  $\{\phi_i\}$  contient une sous-suite qui converge modulo conjugaison.

Les œuvres révolutionnaire de Thurston pendant la décennie 75-84 ont introduit des nouveaux outils dans l'étude de l'espace de déformation. En particulier, il a démontré que les espaces de déformation des groupes kleinien qui sont isomorphes aux groupes fondamentaux des variétés acylindriques sont compactes. Ce résultat-

ci et sa généralisation donnée dans [11], avec sa technique de surface plissée, ont fait possible de prouver une sorte de généralisation de théorème de Bers pour les groupes kleinien indécomposables (voir [4] [5]).

D'autre part, même les résultats puissants de Thurston ne suffisent pas à obtenir des théorèmes de convergence pour les groupes kleinien décomposables aussi généraux que ceux de cas des groupes indécomposables. Jusqu'à maintenant, essentiellement on n'a eu que trois résultats, de Canary, d'Otal, et de l'auteur [2] [8] [6]. Les œuvres de Canary et Otal ont traité la convergence des suites de groupes Schottky, c'est-à-dire groupes kleinien libres géométriquement finis. Le théorème principal de [6] est celui de convergence pour les groupes kleinien géométriquement finis qui sont isomorphes aux produits libres de deux groupes de surface. Son énoncé précise est comme suivant. Rappelons que lorsqu'un groupe kleinien est décomposable, on a revêtement universel de  $QH_0(\Gamma)$  par l'espace de Teichmüller du domaine de discontinuité au lieu de l'homéomorphisme d'Ahlfors-Bers, lequel on appellera le revêtement universel d'Ahlfors-Bers.

**Théorème 1** *Soit  $\Gamma$  un groupe kleinien géométriquement fini qui est isomorphe à un produit libre de deux groupes de surface close  $\pi_1(S) \times \pi_1(T)$ . On note  $\Sigma$  la somme connexe de  $S$  et  $T$ . Soit  $q : \mathcal{T}(\Sigma) \times \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(T) \rightarrow QH_0(\Gamma)$  le revêtement universel d'Ahlfors-Bers. Considérons une suite  $\{(m_i, n_i, r_i)\}$  dans  $\mathcal{T}(\Sigma) \times \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(T)$  telle qu'il y a un ensemble compact dans  $\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(T)$  qui contient tout les  $(n_i, r_i)$ , et que  $\{m_i\}$  converge vers une lamination mesurée maximale dans le domaine de Masur. Alors  $\{q(m_i, n_i, r_i)\}$  converge dans l'espace de déformation quitte à en extraire une sous-suite.*

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans [6].

On énoncera ci-dessous dans Théorème 2 une condition suffisante de convergence pour les groupes kleinien tels que les variétés hyperboliques correspondantes contiennent des cœurs homéomorphes aux bretzels creux. Ceci est une généralisation du théorème ci-dessus. On note  $\partial_e C$  le bord extérieur d'un bretzel creux  $C$ , et  $\partial_i C$  son bord intérieur.

**Théorème 2** *Soit  $\Gamma$  un groupe kleinien géométriquement fini qui est isomorphe à un produit libre des groupes de surface close et un groupe libre de rang au plus 2 tel que  $\mathbf{H}^3 / \Gamma$  contiens un cœur  $C$  homéomorphe à un bretzel creux. Soit  $QH_0(\Gamma)$  l'espace des déformations quasi-conformes de  $\Gamma$  modulo conjugaison conforme, et soit  $q : \mathcal{T}(\partial C) \rightarrow QH_0(\Gamma)$  le revêtement universel d'Ahlfors-Bers.*

Considérons la factorisation  $T(\partial_i C) \times T(\partial_e C)$  et une suite  $\{(m_i, n_i)\}$  ( $m_i \in T(\partial_i C)$ ,  $n_i \in T(\partial_e C)$ ) comme suivant. On suppose qu'il y ait un sous-ensemble compact de  $T(\partial_i C)$  contenant tout les points de  $\{m_i\}$ , et que  $\{n_i\}$  converge vers une lamination mesurée maximale et connexe dans le domaine de Masur.

Alors  $\{q(m_i, n_i)\}$  converge dans l'espace de déformation  $AH(\Gamma)$  quitte à en extraire une sous-suite.

Les techniques qu'on utilise pour démontrer ce théorème sont essentiellement similaires à celles d'Otal [8] et Ohshika [6]. D'abord, on suppose qu'une sous-suite de  $\{q(m_i, n_i)\}$  diverge dans l'espace de déformation. Alors, d'après les théorèmes de Morgan-Shalen, Bestivina, et Paulin, il doit y avoir une action de  $\Gamma$  sur un arbre réel  $T$  munie du petit stabilisateur. En analysant l'action de  $\Gamma$  sur  $T$  selon les types d'isomorphe de  $\Gamma$ , on peut montrer que l'existence de telle action contredirait l'assomption que  $\{n_i\}$  converge vers une lamination mesurée dans le domaine de Masur.

On doit supposer que  $\Gamma$  ne contienne pas un groupe libre de rang 3 comme un facteur d'un produit libre parce qu'il y a des actions avec petits stabilisateurs d'un groupe libre de rang 3 sur un arbre réel, qui ne sont pas duals aux laminations mesurées. (Voir Levitt [3].)

On peut considérer une généralisation de ce théorème en éliminant l'assomption qu'il y ait un ensemble compact contenant  $\{m_i\}$ . Même dans cette situation générale, on peut prouver un théorème similaire si l'on suppose que chaque coordonnée de  $\{m_i\}$  converge vers une lamination mesurée maximale connexe. On a aussi besoin d'utiliser le fait que les actions libres d'un groupe de surface sur un arbre réel sont duals aux laminations mesurées, que Skora a démontré dans [10].

## Bibliographie

- [1] L. Bers, On boundaries of Teichmüller spaces and on kleinian groups I, Ann. of Math. **91**, (1970), 570-600
- [2] R. Canary, Algebraic convergence of Schottky groups, Trans. Amer. math. Soc. **337**, (1993), 235-258
- [3] K. Levitt, Constructing free actions on  $\mathbf{R}$ -trees, Duke Math. **69** (1993), 615-633

- [4] K. Ohshika, On limits of quasi-conformal deformations of Kleinian groups, *Math. Z.* **201**, (1989), 167-176
- [5] K. Ohshika, Limits of geometrically tame Kleinian groups, *Inv. Math.* **99**, (1990), 185-203
- [6] K. Ohshika, Convergence theorem for Kleinian groups which are free products, *Math. Ann.* (1997)
- [7] K. Ohshika, Convergence theorem for Kleinian groups which are free products II, en préparation
- [8] J-P. Otal, Sur la dégénérescence des groupes de Schottky, *Duke Math. J.* **74**, (1994), 777-792
- [9] J-P. Otal, Courants géodésiques et surfaces, Thèse, Université de Paris-Sud
- [10] R. Skora, Splittings of surfaces, *J. AMS*
- [11] W. Thurston : Hyperbolic structures on 3-manifolds III: Deformations of 3-manifolds with incompressible boundary, preprint, Princeton Univ.