数理解析研究所講究録
1022 巻 1997 年 123-130

CLIFFORD 数による SCHWARZ 微分の一般化

奈良女子大学理学部　和田 昌昭 (MASAAKI WADA)

Lars V. Ahlfors をしのんで

この原稿は、[3] を日本語訳したものである．ここでは、n 次元ユークリッド空間から自分自身への C^3 級局所写像に対して Schwarz 微分を拡張する試みを紹介する．

そのような試みとしては、[1] において Ahlfors が cross-ratio の $\mathbb{R}^n$ への一般化との関連で定義したものが知られている．その論文で Ahlfors は、古典的 Schwarz 微分の実部と虚部を別々に、いくぶん違った仕方で拡張している．実は、これら 2 つの Schwarz 微分の $\mathbb{R}^n$ への拡張は、Clifford 数を用いることにより統一的にとりあつかうことができる．ここではそのようにして、Clifford 数に値をもち、Ahlfors の Schwarz 微分を含むような Schwarz 微分の一般理論を展開する．

最初に Clifford 数と Möbius 変換との関係および高次微分に関する準備をした後、Schwarz 微分を定義する．主定理は Möbius 変換と Schwarz 微分の関係を示す公式である．その後 Schwarz 導関数を定義し、Möbius 変換に対して恒等的に 0 になることを示す．最後に低次元の場合の例をあげる．

1. Clifford 数と Möbius 変換.

ここでは Clifford 数と Möbius 変換について、後で必要になることがらを手短に述べる．詳しくは [2] を参照のこと．

Clifford 代数 Cl_n は基本関係式

$$\begin{cases} \mathbf{i}_j^2 = -1 \quad (j = 1, \dots, n) \\ \mathbf{i}_j\,\mathbf{i}_k = -\mathbf{i}_k\,\mathbf{i}_j \quad (j, k = 1, \dots, n,\ j \neq k) \end{cases}$$

をみたす n 個の元 $\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n$ によって生成される実結合的代数である．Cl_n の元を Clifford 数と呼ぶ．任意の Clifford 数は生成元の積

$$I = \mathbf{i}_{j_1} \cdots \mathbf{i}_{j_r} \quad (j_1 < \cdots < j_r)$$

の一次結合として一意的に

$$a = \sum a_I\, I$$

と表わすことができる．このとき a のノルムは

$$|a|^2 = \sum a_I^2$$

によって定義される．

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53A55; Secondary 30G35, 53A20, 57R35.

上記の積 I のうち異なる r 個の生成元の積になっているもの全部によって張られる Cl_n の部分ベクトル空間を $Cl_n^{(r)}$ で表わすことにする．するとベクトル空間としての直和分解

$$Cl_n = \bigoplus_{r=0}^{n} Cl_n^{(r)}$$

が得られるが、それにしたがって任意の Clifford 数 a は一意的に

$$a = a^{(0)} + a^{(1)} + \cdots + a^{(n)}$$

と書かれる．このとき成分 $a^{(r)} \in Cl_n^{(r)}$ を a の r-部と呼ぶことにする．部分空間 $Cl_n^{(0)}$ は自然に $\mathbb{R}$ と同一視することができ、したがって 0-部のことを実部とも呼ぶ．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を $Cl_n^{(1)}$ と同一視することにより、$\mathbb{R}^n$ のベクトルを常に Clifford 数であるとみなす．とくに、以下ではベクトルどうしの積は常に Clifford 数としての積であるものとする．ベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ に対しては $v^2 = -|v|^2$ が成り立つ．

0 でないベクトル全体により生成される Cl_n の乗法群を Clifford 群と呼び、Γ_n で表わす．Cl_n の反自己同型でベクトルを不変に保つものがただ一つ存在するが、それを $a \mapsto a^*$ で表わす．Clifford 群の元 $a \in \Gamma_n$ に対しては $aa^* = a^*a \in \mathbb{R}$ であり、したがって a の逆元は $a^{-1} = (1/aa^*)a^*$ と表わすことができる．

ベクトル $u \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、$v \mapsto uvu$ $(v \in \mathbb{R}^n)$ によって定まる $\mathbb{R}^n$ の変換は、u に直交する超平面に関しての面対称と原点を中心とした $|u|^2$ 倍変換との合成である．よって $a \in \Gamma_n$ に対して $v \mapsto ava^*$ $(v \in \mathbb{R}^n)$ で与えられる $\mathbb{R}^n$ の変換は、いくつかの面対称とスカラー倍変換との合成、つまり原点を保つ $\mathbb{R}^n$ の相似変換である．

Clifford 数係数の 2×2 行列

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

で次の条件を満たすものを Clifford 行列と呼ぶ:

(1) $a, b, c, d \in \Gamma_n \cup \{0\}$,
(2) $ab^*, cd^*, a^*c, b^*d \in \mathbb{R}^n$,
(3) $ad^* - bc^* = d^*a - b^*c = 1$.

ここでは次の事実が最も重要である: $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ の任意の Möbius 変換は、向きを保つ保たないにかかわらず、Clifford 行列を用いて

$$g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1} \qquad (x \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\})$$

と表わされる．

2. 高次微分．

一般に滑らかな多様体 X に対して X 内の滑らかな道の $0 \in \mathbb{R}$ における芽全体の集合を ${}^{\#}X$ と表わすことにする．すなわち ${}^{\#}X$ は X 内の滑らかな道

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow X$$

全体からなり、2 つの滑らかな道は $0 \in \mathbb{R}$ の十分小さな近傍上で一致するときに ${}^{\#}X$ の同じ元を表わすものと考える．以下では道のパラメータとして常に文字 t を用いることにする．$t = 0$ における値を評価することにより射影

$$\flat : {}^{\#}X \longrightarrow X, \qquad \flat(x) = x(0) \quad (x \in {}^{\#}X)$$

が定義される.

滑らかな写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

に対しては、写像の合成により、自然な拡張

$${}^{\#}f : {}^{\#}X \longrightarrow {}^{\#}Y, \qquad {}^{\#}f(x) = f \circ x \quad (x \in {}^{\#}X)$$

が存在する. 混同を起こしやすくするために、この拡張 ${}^{\#}f$ を単に f と省略する.

さて、X が有限次元ベクトル空間 V の開集合である場合を考えよう. パラメータ t に関する微分演算を

$${}^{\#}d : {}^{\#}X \longrightarrow {}^{\#}V, \qquad {}^{\#}dx = \frac{dx}{dt} \quad (x \in {}^{\#}X)$$

と書くことにする. このとき $x \in {}^{\#}X$ の r-階微分を

$$d^r x = \flat({}^{\#}d^r x) = \left.\frac{d^r x}{dt^r}\right|_{t=0} \in V$$

によって定義する. 再び記号の乱用により、${}^{\#}d^r$ と d^r の両方を単に d^r と書くことにする. いずれにせよ d は線形作用素である.

補題. $x, y \in {}^{\#}Cl_n$ に対し、次が成り立つ.

(1) $d(xy) = dx\, y + x\, dy$
(2) $d(x^{-1}) = -x^{-1}\, dx\, x^{-1}$

証明. Clifford 数の積演算は双線形なので、明らかに(1) が成り立つ. $x\,x^{-1} = 1$ の両辺の "d" をとり、(1) を適用すれば容易に(2) が得られる.

3. Schwarz 微分.

$x \in {}^{\#}\mathbb{R}^n$ に対して Schwarz 微分 s^3x および s^2x を

$$s^3x = d^3x - \frac{3}{2}\, d^2x\, dx^{-1}\, d^2x \in \mathbb{R}^n$$

$$s^2x = s^3x\, dx^{-1} = d^3x\, dx^{-1} - \frac{3}{2}\, (d^2x\, dx^{-1})^2 \in Cl_n^{(0)} \oplus Cl_n^{(2)}$$

によって定義する.

定理 1. *Möbius* 変換 g が *Clifford* 行列 (1-1) によって与えられているものとする. このとき $x \in {}^{\#}\mathbb{R}^n$ が g によって

$$y = g(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1} \in {}^{\#}\mathbb{R}^n$$

に写されているとすれば、次がなりたつ.

(1) $dy = (cx+d)^{*-1}\, dx\, (cx+d)^{-1}$,
(2) $s^3y = (cx+d)^{*-1}\, s^3x\, (cx+d)^{-1}$,
(3) $s^2y = (cx+d)^{*-1}\, s^2x\, (cx+d)^{*}$.

証明. $c=0$ の場合の計算は容易なので読者の練習問題とする. 以下 $c \neq 0$ と仮定しよう. まず、

$$y\,(cx+d) = ax+b$$

に補題を適用して

$$dy\,(cx+d) + yc\,dx = a\,dx$$

を得る. 両辺に左から $(cx+d)^*$ を掛ければ、

$$\begin{aligned}(cx+d)^*\,dy\,(cx+d) &= (xc^*+d^*)\,a\,dx - (ax+b)^*c\,dx \\ &= \big(x\,(c^*a-a^*c)+(d^*a-b^*c)\big)\,dx\end{aligned}$$

となるが、$c^*a=(a^*c)^*=a^*c$ および $d^*a-b^*c=1$ であるから、(1) が成り立つ.

次に進む前に $c^{-1}d$ がベクトルであることに注意しよう. 実際、$w=(1/d^*d)cd^* \in \mathbb{R}^n$ とおくと、$wd=c$ となり、$c^{-1}d=(1/cc^*)c^*d=(1/cc^*)d^*wd \in \mathbb{R}^n$ がベクトルであることがわかる.

そこでベクトル $c^{-1}d$ を v と書くことにしよう. すると(1) は

$$dy = \quad c^{*-1}\,(x+v)^{-1}\,dx\,(x+v)^{-1}\,c^{-1}$$

となり、補題によって

$$\begin{aligned}d^2y = &-2\,c^{*-1}\,(x+v)^{-1}\,dx\,(x+v)^{-1}\,dx\,(x+v)^{-1}\,c^{-1} \\ &+\ c^{*-1}\,(x+v)^{-1}\,d^2x\,(x+v)^{-1}\,c^{-1}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}d^3y = \quad &6\,c^{*-1}\,(x+v)^{-1}\,dx\,(x+v)^{-1}\,dx\,(x+v)^{-1}\,dx\,(x+v)^{-1}\,c^{-1} \\ &-3\,c^{*-1}\,(x+v)^{-1}\,d^2x\,(x+v)^{-1}\,dx\,(x+v)^{-1}\,c^{-1} \\ &-3\,c^{*-1}\,(x+v)^{-1}\,dx\,(x+v)^{-1}\,d^2x\,(x+v)^{-1}\,c^{-1} \\ &+\ c^{*-1}\,(x+v)^{-1}\,d^3x\,(x+v)^{-1}\,c^{-1}\end{aligned}$$

が得られる. あとはただ計算を進めれば、

$$s^3y = \quad c^{*-1}(x+v)^{-1}\,s^3x\,(x+v)^{-1}c^{-1}$$

となる. 最後に、(3) は言うまでもなく(1) と(2) の自明な帰結である.

$cx+d \in \Gamma_n$ であることに注意すれば、[2] の Proposition と Lemma より次がわかる.

系 2. *Schwarz* 微分の実部 $(s^2x)^{(0)}$ および 2-部のノルム $|(s^2x)^{(2)}|$ は *Möbius* 変換によって不変に保たれる.

4. Schwarz 導関数.

f は $\mathbb{R}^n$ から自分自身への C^3 級の局所写像とし、$x \in {}^{\#}\mathbb{R}^n$ が f により

$$y = f(x) = \sum_i \mathbf{i}_i\, f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad (x = \sum_j x_j\, \mathbf{i}_j \in \mathbb{R}^n)$$

に写されているものとしよう. このとき

$$\begin{aligned} dy &= D_1(x, dx) \\ d^2y &= D_2(x, dx, d^2x) \\ d^3y &= D_3(x, dx, d^2x, d^3x) \end{aligned}$$

と書かれる. ただし D_1, D_2, D_3 は次のように定義される変数 r_j, u_j, v_j, w_j $(j = 1, \ldots, n)$ の式である.

$$\begin{aligned} D_1(r, u) &= \sum_i \mathbf{i}_i \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(r) u_j, \\ D_2(r, u, v) &= \sum_i \mathbf{i}_i \left(\sum_{j,k} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(r) u_j u_k + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(r) v_j \right), \\ D_3(r, u, v, w) &= \sum_i \mathbf{i}_i \left(\sum_{j,k,l} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(r) u_j u_k u_l \right. \\ &\qquad \left. + 3 \sum_{j,k} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(r) v_j u_k + \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(r) w_j \right). \end{aligned}$$

そこで、形式的な式 $\widetilde{S}^3 f$ および $\widetilde{S}^2 f$ を

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^3 f(r, u, v, w) &= D_3 - \frac{3}{2} D_2\, D_1^{-1}\, D_2 \\ \widetilde{S}^2 f(r, u, v, w) &= D_3\, D_1^{-1} - \frac{3}{2} (D_2\, D_1^{-1})^2 \end{aligned}$$

と定義する. したがって

$$\begin{aligned} s^3 y &= \widetilde{S}^3 f(x, dx, d^2x, d^3x) \\ s^2 y &= \widetilde{S}^2 f(x, dx, d^2x, d^3x) \end{aligned}$$

となっている.

定義. $\mathbb{R}^n$ における C^3 級の局所変換 f に対して、Schwarz 導関数 $S^3 f$ および $S^2 f$ を

$$\begin{aligned} S^3 f(x, dx, d^2x) &= \widetilde{S}^3 f(x, dx, d^2x, \frac{3}{2}\, d^2x\, dx^{-1}\, d^2x) \\ S^2 f(x, dx, d^2x) &= \widetilde{S}^2 f(x, dx, d^2x, \frac{3}{2}\, d^2x\, dx^{-1}\, d^2x) \end{aligned}$$

と定義する.

ここで、Ahlfors が[1] において定義した Schwarz 導関数の一般化は、上の $S^2 f$ を用いれば、$S^2 f(x, dx, 0)$ の実部および 2-部に対応することを注意しておく.

系 **3.** f は $\mathbb{R}^n$ における C^3 級の局所変換、 g は *Möbius* 変換であるとする．g が *Clifford* 行列 (1-1) で与えられているとすれば、

$$S^3(g\circ f)(x,dx,d^2x) = (cf(x)+d)^{*-1}\,S^3f(x,dx,d^2x)\,(cf(x)+d)^{-1}$$
$$S^2(g\circ f)(x,dx,d^2x) = (cf(x)+d)^{*-1}\,S^2f(x,dx,d^2x)\,(cf(x)+d)^{*}$$

が成り立つ．

これは、定理 1 の直接の帰結である．Möbius 変換の Schwarz 導関数については次がなりたつ．

系 **4.** f が *Möbius* 変換ならば $S^3f \equiv S^2f \equiv 0$.

証明．任意に与えられたベクトル $r,u,v\in\mathbb{R}^n$ $(u\neq 0)$ に対して道 $x\in {}^{\#}\mathbb{R}^n$ を

$$x(t) = r + tu + \frac{t^2}{2}v + \frac{t^3}{4}vu^{-1}v$$

によって定義する．したがって $dx=u$, $d^2x=v$, $d^3x=(3/2)vu^{-1}v$ となり、$s^3x=0$ が成り立つ．ここで、Möbius 変換 f によって x が $y=f(x)$ に写されているとすると、定理 1 より $s^3y=s^2y=0$ である．つまり $u\neq 0$ を満たす任意のベクトル $r,u,v\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$S^3f(r,u,v) = S^2f(r,u,v) = 0$$

がなりたつ．

系 4 の逆もなりたつと期待される．

予想．$\mathbb{R}^n$ の C^3 級の局所変換 f がある開集合上の各点 r において $S^3f(r,u,v)\equiv 0$ を満たすならば、f は局所的には *Möbius* 変換である．

5. 低次元における例．

複素解析的関数の場合の考察から始めよう．まず複素数体を対応 $1\leftrightarrow \mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}\leftrightarrow\mathbf{i}_2$ によって $Cl_2^{(1)}$ と同一視する．したがって複素解析的関数 f は $Cl_2^{(1)}$ の変換とみなすことになる．その場合複素数の積は $Cl_2^{(1)}$ においては

$$(u,v)\longmapsto u\,\mathbf{i}_1^{-1}\,v \qquad (u,v\in Cl_2^{(1)})$$

という演算に対応することに注意する．

$$y=f(x), \qquad (x,y\in {}^{\#}Cl_2^{(1)})$$

とすれば

$$dy = f'(x)\,\mathbf{i}_1^{-1}\,dx$$

となる．ここで f' は複素関数 f の導関数を $Cl_2^{(1)}$ の変換とみなしたものである．同様に

$$d^2y = f''(x)\,(\mathbf{i}_1^{-1}\,dx)^2 + f'(x)\,\mathbf{i}_1^{-1}\,d^2x$$
$$d^3y = f'''(x)\,(\mathbf{i}_1^{-1}\,dx)^3 + 3\,f''(x)\,\mathbf{i}_1^{-1}\,d^2x\,\mathbf{i}_1^{-1}\,dx + f'(x)\,\mathbf{i}_1^{-1}\,d^3x$$

が得られ、ベクトル $u, v, w \in Cl_2^{(1)}$ に対して $uvw = wvu$ となることを用いてさらに計算を続ければ、

$$s^3y = \Big(f'''(x) - \frac{3}{2}f''(x)f'(x)^{-1}f''(x)\Big)(\mathbf{i}_1^{-1}dx)^3 + f'(x)\mathbf{i}_1^{-1}(d^3x - \frac{3}{2}d^2x\,dx^{-1}\,d^2x)$$
$$s^2y = \Big(f'''(x)f'(x)^{-1} - \frac{3}{2}\big(f''(x)f'(x)^{-1}\big)^2\Big)(dx\,\mathbf{i}_1^{-1})^2 + d^3x\,dx^{-1} - \frac{3}{2}(d^2x\,dx^{-1})^2$$

となる．Schwarz 導関数は

(5-1)
$$S^3f(x, dx, d^2x) = \Big(f'''(x) - \frac{3}{2}f''(x)f'(x)^{-1}f''(x)\Big)(\mathbf{i}_1^{-1}dx)^3$$

(5-2)
$$S^2f(x, dx, d^2x) = \Big(f'''(x)f'(x)^{-1} - \frac{3}{2}\big(f''(x)f'(x)^{-1}\big)^2\Big)(dx\,\mathbf{i}_1^{-1})^2$$

となる．この場合には Schwarz 導関数は 2 階微分 d^2x によらない量である．ベクトル $v \in Cl_2^{(1)}$ の複素数の積に関する逆元が $\mathbf{i}_1\,v^{-1}\,\mathbf{i}_1$ であることに注意すれば、f の古典的な意味での Schwarz 導関数 $Sf(x) \in Cl_2^{(1)}$ は

$$\begin{aligned} Sf(x) &= f'''(x)\mathbf{i}_1^{-1}(\mathbf{i}_1f'(x)^{-1}\mathbf{i}_1) - \frac{3}{2}f''(x)\mathbf{i}_1^{-1}(\mathbf{i}_1f'(x)^{-1}\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1^{-1}f''(x)\mathbf{i}_1^{-1}(\mathbf{i}_1f'(x)^{-1}\mathbf{i}_1) \\ &= \Big(f'''(x)f'(x)^{-1} - \frac{3}{2}\big(f''(x)f'(x)^{-1}\big)^2\Big)\mathbf{i}_1 \end{aligned}$$

で与えられることを指摘しておこう．

一変数実数値関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で C^3 級の場合の計算も上と同様になる．公式 (5-1) と (5-2) もそのままの形で成り立つ．

平面 $\mathbb{R}^2$ における任意の C^3 級の変換の場合には、Schwarz 導関数 $S^3f(x, dx, d^2x)$ および $S^2f(x, dx, d^2x)$ はもはや dx だけではなく d^2x も含んだ複雑な式になる．ただしこの場合次がなりたつ．

系 **5.** f が $\mathbb{R}^2$ における C^3 級の局所的変換で、g が向きを保つ $\mathbb{R}^2$ の *Möbius* 変換ならば

$$S^2(g \circ f)(x, dx, d^2x) = S^2f(x, dx, d^2x).$$

証明．Möbius 変換 g は Clifford 行列 (1-1) によって与えられているものとする．g が向きを保つのは

$$cx + d \in Cl_2^{(\mathrm{ev})} \equiv Cl_2^{(0)} \oplus Cl_2^{(2)} \qquad (x \in Cl_2^{(1)})$$

となっている場合である．ここで $Cl_2^{(\mathrm{ev})}$ は Cl_2 の可換な部分代数なので、

$$S^2f(x, dx, d^2x) \in Cl_2^{(\mathrm{ev})}$$

に注意すれば、系 3 によって、

$$\begin{aligned} S^2(g \circ f)(x, dx, d^2x) &= (cf(x) + d)^{*-1}\,S^2f(x, dx, d^2x)\,(cf(x) + d)^* \\ &= S^2f(x, dx, d^2x) \end{aligned}$$

となる．

REFERENCES

1. L. V. Ahlfors, *Cross-ratios and Schwarzian derivatives in* $\mathbb{R}^n$, Complex Analysis: articles dedicated to Albert Pfluger on the occasion of his 80th birthday (J. Hersch and A. Huber, eds.), Birkhäuser Verlag, Basel, 1988, pp. 1–15.
2. M. Wada, *Conjugacy invariants of Möbius transformations*, Complex Variables **15** (1990), 125–133.
3. ———, *A generalization of the Schwarzian via Clifford numbers*, preprint.

〒６３０奈良市北魚屋西町 奈良女子大学理学部情報科学科
E-mail address: wada@ics.nara-wu.ac.jp