数理解析研究所講究録
1022巻 1997年 179-184

ケーリーグラフの組み合せ的性質について

奈良女子大学 理学部 山下 靖 (YASUSHI YAMASHITA)

このノートでは、非常に単純な構造をもつオートマティック群について考察する。ここで"単純"の意味は、word acceptor が simply starred であるもので、この場合群のグロースファンクションは多項式で押えられるものとなっている。いままでのオートマティック群の議論は先に元の群の条件が与えられてから、その群のためのオートマティック構造を議論するものが主であるように思われるが、今回はオートマティック構造から出発して、その性質を考察した。

オートマティック群の定義については [ECHLPT] を参照のこと。

定義

上の意味の"単純"なオートマティック群を定義するため、オートマティック群の最低限の定義を復習する。通常の定義では"オートマトン"という言葉を使って定義をするのだが、"単純"の定義の都合上"正規言語"の言葉を使って以下では定義を行なう。ただし計算理論の標準的な議論によりこれは2つの定義は同等であることがわかる。

上記のような変更を行なうが、基本的には以下の定義は [ECHLPT] と [HU] による。

Def. A をある有限集合とし、以下ではこれをアルファベットと呼ぶ. A 上の言語とは、A^* (A 上の文字列全体からなる集合) の部分集合のことである.

後に群を扱うときは、アルファベットとして群の生成元の集合を考える。A による文字列 (以下では"語"と呼ぶ) は群の元に対応する。

Def. A をアルファベットとする. A 上の正規表現とそれが表す正規言語を、再帰的に以下の規則によって定義する。

(1) $\emptyset$ は正規表現であり、これは正規言語:空集合を表す.
(2) ϵ は正規表現であり、これは正規言語:$\{\epsilon\}$ (長さが 0 である空語のみからなる集合) を表す.
(3) 任意の A の元 a について, a は正規表現であり、正規言語 $\{a\}$ を表す.
(4) r と s を正規表現とし、それぞれ正規言語 R ,S を表すとする. このとき $(r+s), (rs), r^*$ という形で表されるものは正規表現であり、それぞれ正規言語 $R\cup S$, RS

and R^* を表す. ただし

$$RS := \{xy \mid x \in R,\ y \in R\} \text{ and } R^* := \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \ \ (R^i := RR^{i-1})$$

正規言語は A 上の言語 (A^* の部分集合) の中でとりあえず上の規則で作られるような特殊なものであるが、実は計算機で扱いやすいものを取り出した形になっている。

Def. A 上の語 w, p, q が等式 $w = pq$ を満たしているとする。ただしそれぞれ空語 ϵ である場合も許している。このとき p を w の *prefix* (接頭語) と呼ぶ。L を A 上の1つの言語とする。L の元の prefix 全体からなる集合を L の *prefix closure* と呼ぶ。言語が *prefix closed* であるとは、その言語がその言語の prefix closure と等しいことである。

Def. A 上の正規表現で、$*$ が入れ子になっていないものを、simply starred と呼ぶ。このとき $R*$ の R にあたる語を star 文字列と呼ぶ。

Def. G を群とする。G のオートマティック構造とは、以下のものからなるものである

(1) A: G を半群として (逆元を使わずに) 生成する集合
(2) w: A 上の正規表現 (これを word acceptor と呼ぶ)
(3) w_x: (A, A) 上の正規表現 ($x \in A \cup \{\epsilon\}$) (正確には (A, A) の部分をいい直す必要があるが、詳しくは [ECHLPT] を参照のこと) これらを multiplier 表現と呼ぶ。

ただし以下の条件を満たす

(1) 自然な準同型 $\pi : W \to G$ が上への写像。
(2) $\forall x \in A \cup \{\epsilon\}$ について、 $(s_1, s_2) \in W_x \Leftrightarrow s_1 x = s_2$ in G and $s_1, s_2 \in W$.

G がオートマティック構造を持つとき、これを *automatic group* と呼ぶ。.

Def. 群 G のオートマティック構造 $(A, w, \dots)$ が条件

$$W \ = \ \{\text{all geodesics of } G\}$$

を満たすとき、これを強測地的オートマティック構造と呼ぶ。また、

$$W \ \subset \ \{\text{all geodesics of } G\}$$

であるならば、弱測地的オートマティック構造と呼ぶ。標準的な準同型写像$\pi : W \to G$ が1対1ならば、このオートマティック構造は一意性を持つと呼ぶ。オートマティック構造の中の正規表現が simply starred であるならば、$(A, w, \dots)$ を *simply starred* オートマティック構造と呼ぶ。

Def. 測地的距離空間 (X, d) (すなわち、任意の 2 点を測地線によって結ぶことが可能な距離空間) が δ–hyperbolic であるとは、

$$\forall \text{ 測地的 3 角形 } ABC, \forall x \in \overline{AB} \;\; d(x, \overline{BC} \cup \overline{CA}) \leq \delta$$

有限生成群 G は、そのケーリーグラフが辺の長さを 1 とすることにより定まる距離に関して hyperbolic であるとき、双曲群と呼ぶ。

Remark. 群が強測地的オートマティック構造を持つ。 $\Leftrightarrow$ word hyperbolic

SIMPLY–STARRED オートマティック群について

simply–starred オートマティック群について考える。今回は特にそれが双曲群でない場合について考えてみた。

双曲群は幾何的な方法によって調べられているが、オートマティック群論はそれとはやや違い計算機科学の言葉により組合せ群論にアプローチするものである。計算機科学の概念 (正規表現　正規言語) を利用して、双曲幾何的方法の外にある群 (双曲群でないもの) について考えた。

まず [ECHLPT] からの準備をする。

Lem([ECHLPT]). G をオートマティック群とし、$(A, w, \dots)$ をそのオートマティック構造とする。この時正の整数 k が存在し以下を満たす。

$$\forall s_1, s_2 \in W_x \mathit{for\ some}\ x \in A,\ d(s_1(t), s_2(t)) \leq k\ (0 \leq t)$$

ただし $s_i(t)$ は s_i の t 番めの文字。この k を $(A, w, \dots)$ の *lipschitz* 定数と呼ぶ。

Lem([ECHLPT]). G をオートマティック群とする。このとき G のオートマティック構造の中で、一意性の条件を満たすものが存在する。

さらに記号を用意する。

$(A, w, \dots)$ をオートマティック構造とし、特に一意性の条件を満たすものとする。上の Lem より任意のオートマティック群に対してこのようなものをとることができる。また x を G の元とすし、s_x で A 上の語で$\pi(s_x) = x$ かつ $s_x \in W$ (W は word acceptor w に対応する正規言語) であるものを表すことにする。これは一意性の条件からただ 1 つに決まることに注意。

A 上の語 t に対し、ケーリーグラフ $\Gamma(G, A)$ 上の対応する道を p_t と書く。G の部分集合 S に対し、$T_S := \bigcup_{t \in S} p_t$とおく。これは $\Gamma(G, A)$ の部分木である。

Lem. G をオートマティック群とし、$(A, w, \dots)$ をその一意性を満たすオートマティック構造とする。また G は双曲群ではないとする。ケーリーグラフ $\Gamma(G, A)$ 中で、群の元 x を中心とする半径 m の部分グラフを $nfd(x, m)$ とおく。任意の正の数 $n > 0$ にたいし適当な測地的3角形 ABC で

$$\exists x \in T_{ABC} \; s.t. \; \forall y \in T_{ABC} \cap nfd(x, n) \;\; deg(y) = 2 \; in \; T_{ABC}$$

となるものが存在する。上の最後の $deg(y) \dots$ は、グラフ T_{ABC} の中で頂点 y の次数すなわちここから出ている辺の数が2であるということである。

(証明の概略) 背理法により証明する。すなわちある n に対し、任意の測地的3角形 ABC と任意の $x \in T_{ABC}$ に対し主張の結論が成り立たないとする。まず

$$V_1 := \#\{T_{ABC} \text{ の頂点で、} T_{ABC} \text{ の中での次数が } 1\}$$
$$V_2 := \#\{T_{ABC} \text{ の頂点で、} T_{ABC} \text{ の中での次数が } 2\}$$
$$V_{\geq 3} := \#\{T_{ABC} \text{ の頂点で、} T_{ABC} \text{ の中での次数が } 3 \text{ 以上 }\}$$

とおく。背理法の仮定によりある定数 C が存在して

$$\begin{aligned} V_2 &< CV_{\geq 3} \\ &< CV_1 \end{aligned}$$

上の行から下の行へは木の内部の頂点と"葉"にあたる頂点との数の比較による。よって

$$V_1 + V_2 + V_{\geq 3} < (1 + C + 1)\, V_1.$$

つまり T_{ABC} の頂点の数がその葉にあたる頂点の数の1次式で押えられている。これは G は双曲群であることを意味する。背理法の仮定に矛盾が起き、証明が完了する。

もしオートマティック構造が simply–starred であるならば、word acceptor は単純な標準形で表される。これにより以下を得る。

Lem. *simply–starred* であるオートマティック構造が、十分大きな n に対して上の Lem の結論に対応する条件を満たすとする。このとき A 上の2つの語で、G の中では共通の巡回群に含まれることはなく、かつ G のなかで可換になるような組が存在する

(証明の概略)

十分大きな n に対して先の Lem にある x をとってくる。すると $\mathrm{nfd}(x, n)$ の中で T_{ABC} の頂点の T_{ABC} で考えた場合の次数は2である。つまり $\mathrm{nfd}(x, m)$ の中で T_{ABC} は部分グラフとしては何本かのお互いに交わらない道からなっている。

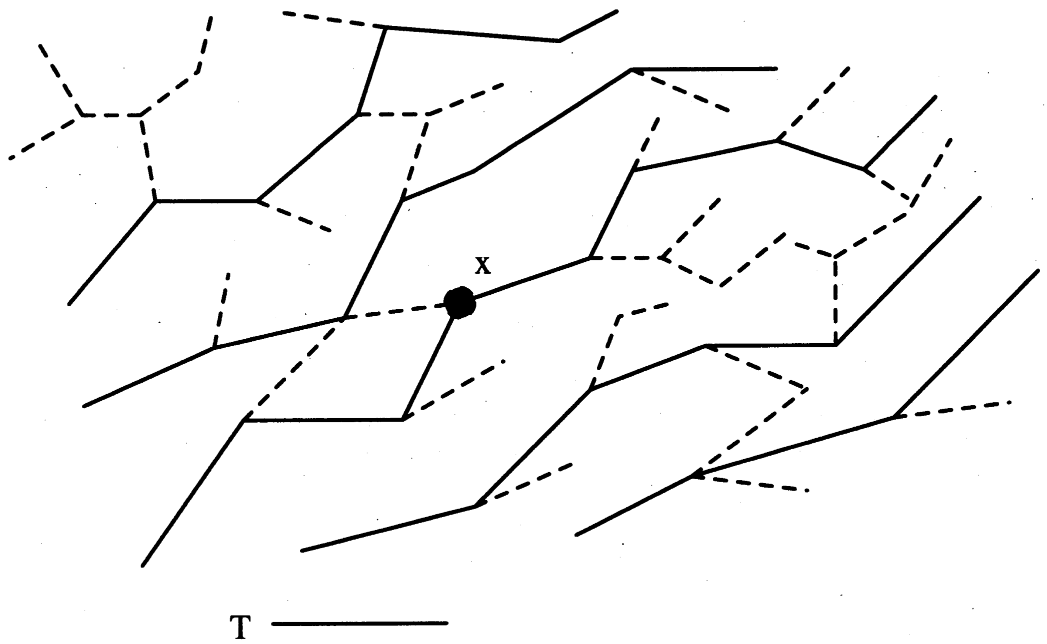

FIG 1. ケーリーグラフの中の T_{ABC} (実線) と x

T_{ABC} は単位元から ABC へと向かう (word acceptor に対応する言語) W の要素に対応する道からなっている。そのためそれらは lipschitz 定数以上はなれることはなく、お互いに交わらないだけではなく大体平行 (並行) して走っている。(Fig.1)

n 十分に大きいとすると、オートマティック構造が simply–starred であったことから、nfd(x, m) 内では対応する道が正規表現の star 文字列の中からでないように x と m をとり直すことができる。

ここである道の部分道が正規表現のある star 文字列の中からでないとは、そこまでの道に対応する語が正規表現のその star 文字列の繰り返しの部分で終っていることを意味する。

正規表現の形から、m はもとの n をとり直すことによりいくらでも大きくすることがわかる。nfd(x, m) 内でとなりどうしの道 (測地的 3 角形でとなりの頂点にいきつくような道の組) についての multiplier 表現もまた star 文字列の中からでないようにとることができる。

すると正規表現に関するある有限性の議論を用いることにより、Lem が証明される。

上の 2 つを以下の形にまとめておく。

<u>Th</u>. *torsion free* な群 G が *simply–starred* オートマティック構造を持ち、双曲群でないならば、部分群として $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ をもつ。

上では双曲群でないならば…という主張になっているが、simply–starred の構造を眺めていると、例外的なものを覗いて双曲群は simply–starred にはならないと思われ、その意味ではよくない仮定を使っている。

むしろ可換群に” 近いもの” と simply–stared が一致するというのが期待すべき主張だと思われた。

REFERENCES

[ECHLPT] D. B. A. Epstein, J. W. Cannon, D. F. Holt, S. V. F. Levy, M. S. Paterson, W. P. Thurston, *Word Processing in Groups*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1992.

[HL] J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Addson-Wesley, 1979.

KITA-UOYA NISHIMACHI, NARA 630, JAPAN

E-mail: yamasita@ics.nara-wu.ac.jp