数理解析研究所講究録
1022 巻 1997 年 20-26

タイヒミュラー空間の座標付け、持ち上げ問題及び閉曲線の特徴付け

静岡大学理学部　奥村 善英 (Yoshihide OKUMURA)

1　序説

タイヒミュラー空間論は数学の多くの分野にあらわれ、さまざまな観点から研究されている。この小論では、タイヒミュラー空間の座標付け、フックス群の持ち上げ及びリーマン面上の閉曲線の特徴付けに関する結果を報告する。

種数が g、分岐点またはパンクチャーの個数が n、そして穴の個数が m のリーマン面は (g,n,m) 型といわれる。また、(g,n,m) 型リーマン面を表現するフックス群も (g,n,m) 型といわれる。曲面の基本群を調べる際に標準生成元系を考えたように、フックス群の場合にも生成元系に注目する。フックス群と生成元系の組は**標識付き**フックス群といわれる。標識は、フックス群が表現するリーマン面のハンドル、分岐点、パンクチャーそして穴の番号付けを与えている。さらに、標識の一番目の生成元と２番目の生成元の積に対応するリーマン面上の閉測地線というように、すべての閉測地線は標識で指定される。タイヒミュラー空間の定義をフックス群の言葉で述べると、$(g,0,m)$ **型タイヒミュラー空間** $T(g,0,m), 2g+m \geq 3$ は $(g,0,m)$ 型標識付きフックス群のある同値類全体の集合となる。この空間は $6g+3m-6$ 次元実解析多様体になり、さまざまな座標付けが考察されている。

2　長さ変数

本質的には１９世紀末から、「$(g,0,m)$ 型標識付きフックス群が表現するリーマン面上のいくつかの指定された閉測地線の長さのみで、$T(g,0,m)$ を大域実解析的に座標付けできる」ことが知られている (Fricke-Klein [3], Keen [5], [6], [7] 等を参照せよ)。このような長さ L は**長さ変数**といわれている。場合によっては、$2\cosh\frac{L}{2}$ を長さ変数ということもある。この値は、閉測地線に対応するフックス群の元のトレースの絶対値になっている。$N_1(g,0,m)$ を $T(g,0,m)$ の大域実解析座標を与える長さ変数の最小個数とする。Wolpert [25], [26], Seppälä-Sorvali [21] により、

$$\dim(T(g,0,0)) < N_1(g,0,0) \leq \dim(T(g,0,0))+2$$

が示された。さらに、フックス群の二元生成部分群を考察することで、次の結果が得られる：

Theorem 2.1 (Okumura [11], [12], Schmutz [18])

$$m \neq 0 \text{ の場合、} \quad N_1(g,0,m) = \dim(T(g,0,m)),$$

$$N_1(g,0,0) = \dim(T(g,0,0)) + 1.$$

また、このような長さ変数をすべて単純閉測地線の長さから選べる。

□

さらに、筆者 [12] は一次変換の平方根を定義して双曲型変換の幾何を調べることにより、$T(g,0,0)$ の変数空間も記述した。筆者は、$N_1(g,n,m)$, $n \neq 0$ の場合も [10] で考察している。

長さ変数の変数空間は複雑な多項式系で記述されることが分かり、長さ変数によるタイヒミュラー空間の解析は大変になることがある。

3 角度変数

双曲幾何では、三角形を三辺の長さと三内角のどちらからでも決定できる。これから、筆者は別のアプローチとして、リーマン面上の測地線間の交角でタイヒミュラー空間を記述することを試みた。このような角度を**角度変数**ということにする。

リーマン面上の閉測地線はフックス群の標識で指定されたので、二つの閉測地線が一度だけ交わるなら、その交点も標識で指定される。さらに、このような交点を頂点とする多角形やその内角（角度変数に採用できる）も標識で指定されることになる。これから、次のことが示せる：

Theorem 3.1 標識で指定されるいくつかの角度変数のみで、$T(g,0,m)$ を大域実解析的に座標付けできる。

□

ここで、もうすこし角度変数を採用した理由を述べる：

(1) 上述の双曲三角形の性質から、双曲幾何では角度のデータは長さのデータに劣ると思えない。さらに、フェンチェル・ニールセン変形のように図形を変形する際、角度は長さより「変化の方向」が記述しやすいと考えられる。このようにして、**「双曲幾何では、角度は長さより情報量が多いだろう」**というアイデアを筆者は持った。$T(g,0,m)$ を大域実解析的に表示する角度変数の最小個数を $N_2(g,0,m)$ とすると、

$$N_2(g,0,m) \leq N_1(g,0,m)?$$

と予想される。

(2) 双曲三角形の余弦定理を適用していくことで、長さ変数は角度変数の三角関数による有理式で表される場合がある。これから、長さ変数の多項式系で表される変数空間を、角度変数の三角関数からなる多項式系で表せると期待できる。三角関数の多項式は変形すると一次式に帰着できることから、角度変数の変数空間の記述は容易であるとも予想される。また、長さ変数の変数空間は非有界領域となっているが、角度変数の変数空間は、角度変数を上手くとることにより、$(0,\pi)$ の直積空間に含まれる有界領域になることが示せる。

$(g,0,m)$ 型フックス群は、g 個の $(1,0,1)$ 型フックス群と $g+m-2$ 個の $(0,0,3)$ 型フックス群の融合積で得られる。これらの基本的な群の融合積を角度変数で表現することで、次の定理が得られる：

Theorem 3. 2 (Okumura [13], [15], [16])

$$(g,0,m) \neq (2,0,0) \text{ の場合、 } N_2(g,0,m) = \dim(T(g,0,m)),$$

$$N_2(2,0,0) \leq \dim(T(2,0,0)) + 1.$$

さらに、$(1,0,1)$ 型、$(2,0,0)$ 型と $(3,0,0)$ 型の場合に、角度変数の変数空間を具体的に記述し、長さ変数の変数空間より見やすいことを示した。

□

Corollary 3. 3 特に、$g \geq 3$ の場合には、

$$N_2(g,0,0) = \dim(T(g,0,0)) < N_1(g,0,0)$$

となり、角度変数は長さ変数より情報量が多いといえる。

□

4 持ち上げ問題

一次変換群 $M(\hat{\mathbf{C}})$ は、$SL(2,\mathbf{C})/\{\pm I\}$ と表されるように、$SL(2,\mathbf{C})$ の**射影**といわれる。この対応関係により、多くの概念が $SL(2,\mathbf{C})$ から $M(\hat{\mathbf{C}})$ に誘導されている。例えば、一次変換のトレースや $M(\hat{\mathbf{C}})$ の位相がある。一次変換 g の二つの行列表現は g の二つの**持ち上げ**ともいわれる。

タイヒミュラー空間の座標付けを考察中に、$M(\hat{\mathbf{C}})$ の部分群 G の**持ち上げ問題**を思いついた。これは、「G の各元にたいし、二つの行列表現（持ち上げ）の一方を上手に選ぶと、これら全体が G と同型な行列群になるか？」という問題である。できるとき、G は**持ち上げ可能**といわれる。この問題は２０世紀初めから、多くの人達により考察されている有名な問題であることが分かった。例えば、Kra [9] を参照せよ。

G がフックス群の場合には、次のような結果が得られている：

Theorem 4. 1 (Culler [1], Kra [9], Okumura [14] 等) 有限生成フックス群にたいしては、持ち上げ可能であることと、位数 2 の楕円型変換を含まないことは同値となる。

□

明らかに、群の生成元の持ち上げを指定することで、群の持ち上げは決定される。生成元系に注目すると、次のことが示せる：

（1）群の持ち上げの取り方によらず、楕円型変換の像は唯一となる。特に、回転角が $\pm\frac{2\pi}{k}$（k は自然数）と表せる楕円型変換は、すべてトレースが負の行列表現にうつる。

（2）一般には、群の持ち上げを取りかえると、放物型変換の像は変化する。

このように群を持ち上げる際、楕円型変換は制限を受ける。楕円型変換と放物型変換を区別するために、次の定義を導入する：

Definition 4. 2 フックス群 G は、種数が g で r 個の分岐点を持つコンパクト・リーマン面に s 個のパンクチャーと m 個の穴を付け加えて得られる面を表現するとき、(g, r, s, m) 型といわれる。また、このようなリーマン面も (g, r, s, m) 型といわれる。

□

フックス群の生成元の持ち上がり方を調べることで、次の結果がただちに得られる：

Theorem 4. 3 (Okumura [14]) G を位数 2 の楕円型変換を含まない有限生成フックス群とする。このとき、G の持ち上げの個数は、

(i)G が $(g, r, 0, 0)$ 型のとき、2^{2g} 個、

(ii)G が (g, r, s, m) 型 $(s + m \geq 1)$ のとき、$2^{2g+s+m-1}$ 個、

となる。

□

5 単純分割閉曲線の特徴付け

持ち上げの性質を調べていると、リーマン面上の単純閉曲線が「分割している」という位相的性質が、このリーマン面を表現するフックス群の解析的性質から判断できることが分かった。ただし、(連結な) 曲面上の**単純分割閉曲線**とは、この曲面を二つの連結集合に分け、境界成分または一点にホモトピックでない単純閉曲線のことである。

結果を述べるために、いくつか設定を行う：S を双曲型リーマン面とし、L を S 上の閉曲線とする。S を表現する（任意の）フックス群を G とする。ここで、G が持ち上げ可能、つまり、S に分岐点があればその位数はすべて奇数と仮定する。また、g_L を L に対応する G の（任意の）元とする。

このとき、次の定理が得られる：

Theorem 5. 1 (Okumura [14]) S をコンパクトとする。このとき、L が S 上の単純分割閉曲線なら、G の持ち上げによる g_L の像は、G の持ち上げの取り方によらず唯一で、トレースが負の行列表現となる。

□

この定理は次のように述べることもできる：

Corollary 5. 2 (Okumura [14]) S をコンパクトとする。このとき、G の適当な持ち上げにより、g_L が正のトレースを持つ行列表現にうつるなら、L は単純分割閉曲線でない。

□

次に、S がコンパクトでない場合を考える。このときには、期待に反し、次の主張が成り立つ：

Lemma 5. 3 (Okumura [14]) S を (g, r, s, m) 型 $(s + m \geq 2)$ とする。このとき、単純分割閉曲線のなかには、G の適当な持ち上げにより、正のトレースを持つ行列表現にうつるものがある。

□

しかし、コンパクトでない場合にも、次のように持ち上げを制限すると、コンパクトの場合と同じ主張が成り立つ：

Theorem 5. 4 (Okumura [14]) S を (g, r, s, m) 型 $(s + m \geq 1)$ とする。S のパンクチャーと穴に対応する G の生成元をすべて負のトレースを持つ行列表現にうつす G の持ち上げのみを考える。このような G の持ち上げは 2^{2g} 個ある。G の持ち上げをこのように制限すると、定理 5.1 と系 5.2 の主張が成り立つ。また、G の持ち上げの制限をこれ以上緩和すると、定理 5.1 と系 5.2 の主張は成り立たない。

□

参考文献

[1] M. Culler, Lifting representations to covering groups, Adv. in Math., 59(1986), 64-70.

[2] G. Faltings, Real projective structures on Riemann surfaces, Compos. Math., 48(1983), 223-269.

[3] R. Fricke and F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, B. G. Teubner, Leipzig, 1926.

[4] N. Hawley and M. Schiffer, Half-order differentials on Riemann surfaces, Acta Math., 115(1966), 199-236.

[5] L. Keen, On Fricke moduli, in Advances in the Theory of Riemann Surfaces, (ed. L. V. Ahlfors et al.), Ann. Math. Studies 66, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971, 205-224.

[6] L. Keen, A correction to "On Fricke moduli", Proc. Amer. Math. Soc., 40(1973), 60-62.

[7] L. Keen, A rough fundamental domain for Teichmüller spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 83(1977), 1199-1226.

[8] Y. Komori, Semialgebraic description of Teichmüller space, preprint.

[9] I. Kra, On lifting of Kleinian groups to SL(2,C), in Differential Geometry and Complex Analysis (Rauch, H. E. Memorial Volume), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1985, 181-193.

[10] Y. Okumura, Global real analytic coordinates for Teichmüller spaces, Doctor's Thesis, Kanazawa Univ., Kanazawa, 1989.

[11] Y. Okumura, On the global real analytic coordinates for Teichmüller spaces, J. Math. Soc. Japan, 42(1990), 91-101.

[12] Y. Okumura, Global real analytic length parameters for Teichmüller spaces, Hiroshima Math. J., 26(1996), 165-179.

[13] Y. Okumura, Parametrizations of Teichmüller spaces, in XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium, (ed. I. Laine and O. Martio), Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1996, 181-190.

[14] Y. Okumura, Lifting problem and a characterization of simple dividing loops on Riemann surfaces, (Japanese), in Analysis of Discrete Groups, (ed. Y. Okumura), RIMS Kokyuroku 967, Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto Univ., Kyoto, 1996, 142-154.

[15] Y. Okumura, Global real analytic angle parameters for Teichmüller spaces, J. Math. Soc. Japan, 49(1997), 213-229.

[16] Y. Okumura, Global real analytic angle parameters for Teichmüller spaces II, in preparation.

[17] K. Saito, Algebraic representations of Teichmüller space, Kodai Math. J., 17(1994), 609-626.

[18] P. Schmutz, Die Parametrisierung des Teichmüllerraumes durch geodätische Längenfunktionen, Comment. Math. Helv., 68(1993), 278-288.

[19] M. Seppälä and T. Sorvali, On geometric parametrization of Teichmüller spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 10(1985), 515-526.

[20] M. Seppälä and T. Sorvali, Parametrization of Möbius groups acting in a disk, Comment. Math. Helv., 61(1986), 149-160.

[21] M. Seppälä and T. Sorvali, Parametrization of Teichmüller spaces by geodesic length functions, in Holomorphic Functions and Moduli II (ed. D. Drasin et al.), Mathematical Sciences Research Institute Publications 11, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, 1988, 267-284.

[22] M. Seppälä and T. Sorvali, Traces of commutators of Möbius transformations, Math. Scand., 68(1991), 53-58.

[23] M. Seppälä and T. Sorvali, Geometry of Riemann Surfaces and Teichmüller Spaces, Mathematics Studies 169, North-Holland, Amsterdam, London, New York, Tokyo, 1992.

[24] C. L. Siegel, Über einige Ungreichungen bei Bewegungsgruppen in der nichteuklidischen Ebene, Math. Ann., 133(1957), 127-138.

[25] S. A. Wolpert, On the symplectic geometry of deformations of a hyperbolic surface, Ann. of Math., 117(1983), 207-234.

[26] S. A. Wolpert, Geodesic length functions and the Nielsen problem, J. Differential Geom., 25(1987), 275-296.

静岡大学理学部数学教室
〒422 静岡市大谷836
電子メール：smyokum@sci.shizuoka.ac.jp