数理解析研究所講究録
1024巻 1998年 80-83

量子スピン系の正エネルギー表現

九州大学数理学研究科　松井卓　(Taku Matsui)
matsui@math.kyushu-u.ac.jp

1　はじめに

A を unital C*代数 (A,α_t) $t\in R$ をC*力学系とする。このとき、基底状態および正エネルギー表現を次のように定義する。

定義1　A の状態 φ がC*力学系 (A,α_t) $t\in R$ の基底状態であるとは

$$\frac{1}{i}\varphi(Q^*\delta(Q))\geq 0 \qquad Q\in D(\delta)$$

が成立すること。ただし δ は、α_t の generator $\delta(Q)=\left.\frac{d}{dt}\alpha_t(Q)\right|_{t=0}$ $D(\delta)$ は δ の定義域である。

定義2　C*代数 A のヒルベルト空間 H 上の表現 $\{\pi(\,),H\}$ が正エネルギー表現であるとは、H 上で正自己共役作用素 H_π が存在し

$$\mathrm{H}_\pi\geq 0 \qquad \pi(\alpha_t(Q))=e^{it\mathrm{H}_\pi}\pi(Q)e^{-it\mathrm{H}_\pi} \qquad (\forall Q\in A)$$

が成立すること。

基底状態は自動的に定義より α_t の不変状態で、そのGNS表現は正エネルギー表現となる。基底状態のGNS表現を基底状態表現と呼ぶことにする。
一般には基底状態が存在するかどうかは分からない。以下の数理物理で良く考察される例では基底状態は常に存在する。そこで基底状態の一意性と分類を調べたい。

A を n^∞ 型のUHF代数とし、各テンソル積の成分は整数 j で指定されるとする。

$A=\overline{\bigotimes_{Z} M_n(C)}^{C^*}$ テンソル成分jでのみ非自明な $Q\in M_n(C)$ をもつAの元を$Q^{(j)}$ であらわす。A_{loc} をすべての$Q^{(j)}$ の形の元で代数的に生成される稠密な部分代数とする。 τ_j $(j\in Z)$ を整数格子上のシフトとする。$\tau_j\left(Q^{(k)}\right)=Q^{(j+k)}$ 量子スピン系の時間発展は次の1係数自己同系群であらわされる。

$h=h^*\in A_{loc}$ に対して(pre) generator δ を

$$\delta(Q)=i\sum_{j\in Z}\left[\ \tau_j(h)\,,Q\right] \qquad (\ Q\in A_{loc}\ )$$

で定める。

形式的に $\mathrm{H}=\sum_{j\in Z}\ \tau_j(h)$ と置いてHを体積無限大でのハミルトニアンと呼ぶ。

すると $\delta(Q)=i\left[\ \mathrm{H}\,,Q\right]$ と書ける。δ は、generatorに拡張でき生成する1係数自己同系群を α_t とする。

基底状態全体を何らかの形で記述するのが目的であるが、上の設定だけでは一般的すぎてよく分からない。そこで問題を分離して（1）正エネルギー表現としては、どのようなものがあるか？（2）正エネルギー表現ではスペクトルの下端が固有値になるか？の2つのステップで考える。ここでは最初の問題について考察する。

2　スペクトルギャップ

正エネルギー表現は、場の量子論の数学的研究では基本的な概念である。しかしmassless filed theory （質量零の粒子をもつ系　例えば量子電磁力学）では、赤外表現と呼ばれる ‘非物理的’ な正エネルギー表現が統制のつかないほど存在する。この状況を避けるために次の仮定を置く。

仮定3　Λを$\mathbf{Z}$の有限部分集合とする。

$$\mathrm{H}_\Lambda=\sum_{j\in\Lambda}\ \tau_j(h)$$

と定める。H_Λを有限行列と見なし、この最低固有値をE_Λとおく。

（1）　Λに対してある正数ε_ΛとΛによらない正数γがあり

$$\left(\varepsilon_\Lambda\,,\varepsilon_\Lambda+\gamma\right)\cap Spec\left(\mathrm{H}_\Lambda\right)=\varnothing$$

ただし　$Spec(\mathrm{H}_\Lambda)$　は、H_Λのスペクトルのなす集合をあらわす。
（2）　ある数　e_∞　があり（1）のε_Λに対して

$$\lim_{\Lambda\to Z} \left|E_\Lambda - |\Lambda| e_\infty\right| = 0 \quad 、\quad \lim_{\Lambda\to Z} \varepsilon_\Lambda = 0$$

注意　条件（1）が　赤外表現を排除するスペクトルギャップの条件である。
SU(2)不変なスピンが整数のヘイゼンベルグ模型では成立しスピンが
半奇数では成立しないと予想されている。（ハルデーン予想）
条件（2）は多くの例で確かめられるが一般的に成立するのが確かめられるのは

$$\lim_{\Lambda\to Z} \left|\frac{E_\Lambda}{|\Lambda|} - e_\infty\right| = 0$$

である。条件（2）が今の設定で成立しない例があるかどうかは不明である。

上の仮定のもとで次が証明できる。

定理4　ある区間　$\Lambda = [n, m]$　$(n < m)$が存在し、任意の正エネルギー表現は
$\mathrm{H} - \mathrm{H}_\Lambda$　の基底状態表現と準同値である。$\tilde{\delta}(Q) = i[\,\mathrm{H} - \mathrm{H}_\Lambda, Q\,]$　が生成するC*力学系の基底状態をあたえるベクトルξが、正エネルギー表現空間に存在する。
　さらに、このξの作る状態は有限系　$\mathrm{H}_{\Lambda'} - \mathrm{H}_\Lambda$　$(\Lambda \subset \Lambda')$の基底状態の熱力学的極限$\Lambda' \to \mathrm{Z}$として得られる。

この定理は、‘正エネルギー表現全体’をより（容易ではないが）具体的な固有ベクトルの極限で表示出来ることをしめしている。この定理とさらに種々の解析をするとつぎが得られる。

例5
（1）　$h_0 = h_0^*$　と　$h_1 = h_1^*$　は、前の　h　と同じ条件をみたすとする。
$h_0 = h_0^*$　の最低固有値の重複度は1とする。
正のパラメータλ を十分大きくとると　$h = \lambda h_0 + h_1$　について仮定3が成立する。このとき　$\mathrm{H} = \sum_{j\in Z} \tau_j(h)$　の基底状態は一意である。

（2）　スピン１／２のXXZ模型を考える。

$$H=-\sum_{j\in\mathbf{Z}}\left\{\sigma_x^{(j)}\sigma_x^{(j+1)}+\sigma_y^{(j)}\sigma_y^{(j+1)}+\Delta\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)}\right\}$$

実パラメータ　Δ　が　$\Delta>1$　または　$\Delta<<-1$　　を満たすとき（factor）正エネルギー表現空間の同値類は４つありそれらはある程度具体的に記述可能である。

参考文献

[1] O.Bratteli and D.Robinson
Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II (new version)
1997 Springer Verlag

[2] T.Matsui
Translational Symmetry Breaking and Soliton Sectors for Massive Quantum Spin Models in 1+1 Dimension.
to appear in Commun.Math.Phys.