

実数の β -進展開からできる補間としての Cuntz 環

(joint work with Y. Katayama & Y. Watatani)

上越教育大 松本健吾 (Kengo Matsumoto)

1. 定義と定理

$\forall \beta \in \mathbb{R}$. 実数を勝手 $\beta > 1$ と固定する。

$\exists n \in \mathbb{N}$; $n-1 < \beta \leq n$ とし $\Sigma_\beta = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ とおく

$f_\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 正閏力学系を

$$f_\beta(x) = \beta x - [\beta x] \quad \text{すなわち } \beta x \text{ の少数部分}, \quad x \in [0, 1]$$

と置く, $\forall x \in [0, 1]$ の β -展開 $(d_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$d_1(x) \equiv [\beta x], \quad d_n(x) \equiv [\beta f_\beta^{n-1}(x)], \quad 2 \leq n \in \mathbb{N}$$

と置く, $\forall x$
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x)}{\beta^n} \quad \text{すなわち}$$

Σ_β の片側無限列 $(\Sigma_\beta)^{\mathbb{N}}$ 全体 κ , 積位相と辞書式順序 ε とおく。

$$\mathfrak{Z}_\beta \equiv \sup_{x \in [0, 1]} (d_n(x))_n \in (\Sigma_\beta)^{\mathbb{N}} \quad \text{と置く。}$$

定義 (β -シフト)

$$\Lambda_\beta \equiv \{ \alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\Sigma_\beta)^{\mathbb{N}} \mid \sigma^n(\alpha) \leq \mathfrak{Z}_\beta \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \}$$

但し, $\sigma((\alpha)_n) = (\alpha_{n+1})$ (シフト)

([Pa], [Re] 参)。

この β -シフトはサブシフトである。

定義 (補間された Cuntz 環: \mathcal{O}_β)

各 $1 < \beta \in \mathbb{R}$ に対し, β -シフト (Λ_β, σ) に付随してできる
 カブシフト C^* 環 $\mathcal{O}_{\Lambda_\beta} \in \mathcal{O}_\beta$ となる, 補間された
 Cuntz 環 (Interpolated Cuntz algebras) とする。

カブシフトに付随してできる C^* 環については [Ma] を参照。

例 $1 < m \in \mathbb{N}$ に対し $\beta = m$ のとき, \mathcal{O}_β は Cuntz 環 \mathcal{O}_m に同型

定理 ([KMWJ])

① $1 < \beta \in \mathbb{R}$ とき \mathcal{O}_β は simple, purely infinite

② $K_1(\mathcal{O}_\beta) = 0 \quad \forall \beta,$

$$K_0(\mathcal{O}_\beta) = \begin{cases} \bullet \frac{\mathbb{Z}}{(\eta_1 + \dots + \eta_{m-1})\mathbb{Z}} & \text{if } 1 = \frac{\eta_1}{\beta} + \dots + \frac{\eta_{m-1}}{\beta^{m-1}} \\ \bullet \frac{\mathbb{Z}}{(\xi_{k+1} + \dots + \xi_{k+1})\mathbb{Z}} & \\ \text{if } 1 = \frac{\xi_1}{\beta} + \dots + \frac{\xi_k}{\beta^k} + \overbrace{\frac{\xi_{k+1}}{\beta^{k+1}} + \dots + \frac{\xi_{k+1}}{\beta^{k+1}}} < 1 \text{ (or } \geq 1) \\ \bullet \mathbb{Z} & \text{if } \beta \text{ is an integer} \end{cases}$$

③ $1 < \beta \in \mathbb{R}$ とき, \mathcal{O}_β 上の Gauge 作用 α は 逆温度 "log β " の

ときのみ, KMS-state τ が存在し, τ は $\tau = \tau \circ \alpha$ である。

(log β は β の β -シフトの位相 $2\pi b$ に $b \in \mathbb{R}$ と見なす)

④

他の定理, 結果は [KMWJ] を見よ

2. 主要参考文献

- [C], J. Cuntz, Simple C^* algebras generated by isometries
Comm. Math. Phys. 57 (1977), 173-185
- [CK], J. Cuntz and W. Krieger, A class of C^* algebras and
topological Markov chains, Invent. Math. 56 (1980) 251-
267
- [KMW], Y. Katayama, K. Matsumoto and Y. Watatani,
Simple C^* algebras arising from β -expansion of
real numbers, to appear in Erg. Th. & Dyn. Sys.
- [Ma], K. Matsumoto, On C^* algebras associated
with subshifts, International J. Math. 8 (1997), 357-374
- [Pa], W. Parry, On the β -expansion of real numbers,
Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960), 401-416
- [Re], A. Renyi, Representations for real numbers and
their ergodic properties, Acta Math. Acad.
Sci. Hung. 8 (1957), 477-493.