数理解析研究所講究録
1025 巻 1998 年 99-117

化学反応論における半線型楕円型境界値問題

前橋工科大学 梅津健一郎 (Kenichiro UMEZU)

Abstract: This paper is devoted to the study of semilinear elliptic boundary value problems arising in chemical reactor theory which obey the simple Arrhenius rate law and Newtonian cooling. We prove that ignition and extinction phenomena occur in the stable steady temperature profile at some critical values of a dimensionless heat evolution rate.

1 序

はじめに, 本研究は平良和昭先生 (広島大学理学部) との共同研究によるものである.

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ の, 滑らかな境界 ∂D をもつ, 有界領域 D において次の半線型楕円型境界値問題を考える. この問題は化学反応論のある問題から由来している ([6], [5], [3], [12], [10], [4] を参照).

$$(*)_\lambda \qquad \begin{cases} Au = \lambda \exp\left[\dfrac{u}{1+\varepsilon u}\right] & \text{in } D, \\ Bu = a\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + (1-a)u = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

ここで,

(1) 作用素 A は $\overline{D}$ 上滑らかな関数を係数として持つ 2 階の強楕円型微分作用素である:

$$Au(x) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N} a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right) + c(x)u(x).$$

(1-i) $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$, $1 \leq i, j \leq N$, かつ, つぎの条件をみたす定数 $a_0 > 0$ が存在する:

$$\sum_{i,j=1}^{N} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2, \quad x \in \overline{D},\ \xi \in \mathbf{R}^N.$$

(1-ii) $c(x) > 0$ in D.

(2) λ, ε は正のパラメータである.

(3) $a \in C^\infty(\partial D)$ かつ ∂D 上で $0 \leq a \leq 1$ をみたす.

(4) $\partial/\partial\boldsymbol{\nu}$ は作用素 A に付随した余法線微分作用素である:

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}=\sum_{i,j=1}^{N}a^{ij}n_j\frac{\partial}{\partial x_i},$$

ただし, $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,\dots,n_N)$ は ∂D 上の外向き単位法線ベクトル場をあらわす (図 1).

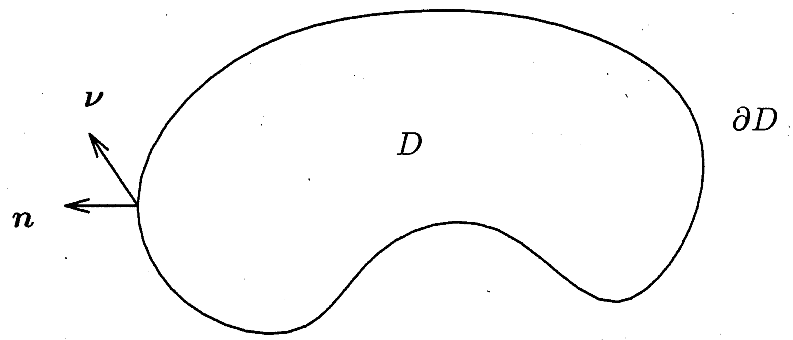

図 1

関数 u が問題 $(*)_\lambda$ の**解**とは $u\in C^2(\overline{D})$ が $(*)_\lambda$ をみたすときをいう. そして, 解 u が領域 D の至る所で正のとき u は**正値解**という.

本研究では問題 $(*)_\lambda$ の正値解の個数を調べることを目的とする.

化学反応論において, 問題 $(*)_\lambda$ は反応物質の消費が無視できるほど小さいときの熱平衡を記述する. つまり, 未知関数 u は反応が行われる容器の内と外との温度差の定常状態を記述する. その際, 非線型項:

$$f(u)=\exp\left[\frac{u}{1+\varepsilon u}\right]$$

は**アレニウスの法則** (Arrhenius's rate law) ([16], [8] を参照) に従った反応の温度依存性を記述し, パラメータ ε はその逆数が反応のもつ**活性化エネルギー** (activation energy) ([7] を参照) に比例する. そして, パラメータ λ は熱上昇率を表し, 反応物質の初期濃度に比例する. なお, 正値解の存在を考察するということは**発熱反応**の場合を扱うことを意味する.

境界条件の係数 a は容器の熱伝導率 (thermal conductivity) と容器周辺の物質と容器との間の熱伝達率 (heat transfer coefficient) に依存し, 条件:

$$0\leq a(x)\leq 1 \quad \text{on } \partial D$$

を仮定するということは**ニュートンの冷却の法則**に従うことを意味している, すなわち, 熱の交換は容器表面の内と外との温度差に比例することを意味している. 特に a が恒等的に 0 の場合, 等温条件 (ディリクレ条件) になり, a が恒等的に 1 の場合, 断熱条件

(ノイマン条件) になる. 解析学の見地から言うと, この境界条件は**退化楕円型**である. これは $a(x) = 0$ をみたす点ではいわゆるシャピロ–ロパチンスキー条件をみたさないという事実に基づく.

2 主定理

問題 $(*)_\lambda$ の正値解の存在について, つぎの結果が知られている ([15, Theorems 1 and 2]).

定理 1 各パラメータ $\varepsilon, \lambda > 0$ 毎に問題 $(*)_\lambda$ は少なくとも一つ正値解をもつ. さらに $\varepsilon \geq 1/4$ ならば, 任意の $\lambda > 0$ について問題 $(*)_\lambda$ はただ一つ正値解をもつ.

化学反応論的立場から定理 1 を言い換えると, パラメータ ε が 1/4 以上になるくらい活性化エネルギーが小さければ, 反応物質の初期濃度にしたがってその反応は滑らかに進むことを示している. つまり, 発火現象を起こすような温度の急激な変化が起こらないことを示している (図 2).

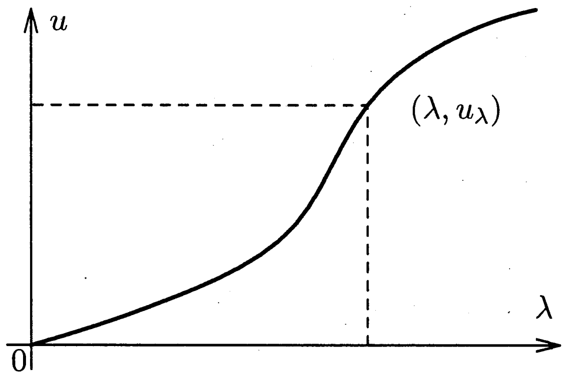

図 2

本研究の**主目的**は $0 < \varepsilon < 1/4$ の場合を考察することである. まず非線型項 $f(t)$ に付随して関数 $\nu(t)$ を定義する:

$$\nu(t) = \frac{t}{f(t)} = \frac{t}{\exp\left[t/(1+\varepsilon t)\right]}, \quad t \geq 0.$$

関数 $\nu(t)$ は $t = t_1(\varepsilon)$,

$$t_1(\varepsilon) = \frac{1 - 2\varepsilon - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon^2},$$

で極大値をただ一つもち, $t = t_2(\varepsilon)$,

$$t_2(\varepsilon) = \frac{1 - 2\varepsilon + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon^2},$$

で極小値をただ一つもつことがわかる (図 3).

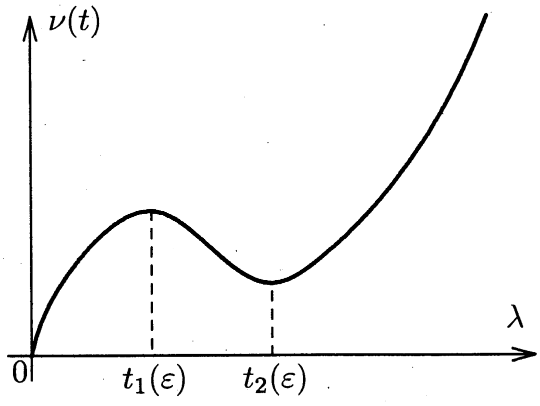

図 3

関数 $\phi(x)$ を線型境界値問題:

$$\begin{cases} Au = 1 & \text{in } D, \\ Bu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases} \tag{2.1}$$

の正値解とし, 定数 λ_1 を線型固有値問題:

$$\begin{cases} Au = \lambda u & \text{in } D, \\ Bu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases} \tag{2.2}$$

の第一固有値とするとき ($\lambda_1 > 0$), 正値解の重複度に関してつぎの結果を得る. 定理 2 は [18, Theorem 4.3] の退化型境界条件への一般化である.

定理 2 定数 $\beta > 0$ を (3.7) によって決まるものとする. パラメータ ε を

$$\frac{\nu(t_2(\varepsilon))}{\beta} < \frac{\nu(t_1(\varepsilon))}{\|\phi\|_\infty} \tag{2.3}$$

をみたすぐらい小さいとするならば,

$$\frac{\nu(t_2(\varepsilon))}{\beta} < \lambda < \frac{\nu(t_1(\varepsilon))}{\|\phi\|_\infty}$$

をみたす任意の λ に対して問題 $(*)_\lambda$ は少なくとも 3 つ正値解をもつ. ただし,

$$\|\phi\|_\infty = \max_{x \in \overline{D}} |\phi(x)|.$$

ここで, 条件 (2.3) が意味をもつのは

$$\frac{\nu(t_2(\varepsilon))}{\beta} \sim \frac{1}{\varepsilon^2} \exp\left[\frac{-1}{\varepsilon + \varepsilon^2}\right] \quad (\varepsilon \downarrow 0),$$

$$\frac{\nu(t_1(\varepsilon))}{\|\phi\|_\infty} \sim \exp\left[\frac{-1}{1+\varepsilon}\right] \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

をみたすからである.

つぎに, パラメータ λ が十分小さいときと十分大きいときは正値解の存在に対する一意性が成立する. つぎの定理 3, 4 はそれぞれ [18, Theorems 2.9, 2.6] の退化型への一般化である.

定理 3 $0 < \varepsilon < 1/4$ とする. このとき, λ がつぎの条件をみたすくらい十分小さいならば問題 $(*)_\lambda$ はただ一つ正値解をもつ:

$$0 < \lambda < \frac{\lambda_1 \exp\left[2 - \frac{1}{\varepsilon}\right]}{4\varepsilon^2}.$$

定理 4 $0 < \varepsilon < 1/4$ とする. このとき, パラメータ ε に依存しない定数 $\Lambda > 0$ が存在して, $\lambda > \Lambda$ をみたすくらい λ が十分大きいならば問題 $(*)_\lambda$ はただ一つ正値解をもつ.

定理 2, 3, 4 から臨界値 μ_E, μ_I がつぎのように定義される:

$$\mu_E = \sup\{\mu > 0 : 0 < \lambda < \mu \text{ に対して問題 } (*)_\lambda \text{ は一意可解的である}\},$$

$$\mu_I = \inf\{\mu > 0 : \mu < \lambda \text{ に対して問題 } (*)_\lambda \text{ は一意可解的である}\}.$$

化学反応論の立場から見ると, $\lambda = \mu_I$ では発火現象が起こっている, すなわち $\lambda = \mu_I$ で λ の微少な増加が定常状態の温度の急激な上昇を引き起こす. 解析的には最小正値解は $\lambda > \mu_I$ において連続で $\lambda = \mu_I$ で不連続である (図 4). そして, $\lambda = \mu_E$ では消火現象が起こっている, すなわち $\lambda = \mu_E$ で λ の微少な減少が定常状態の温度の急激な下降を引き起こす. 解析的には最大正値解は $0 < \lambda < \mu_E$ において連続で $\lambda = \mu_E$ で不連続である (図 5) ([3, Figure 6] を参照).

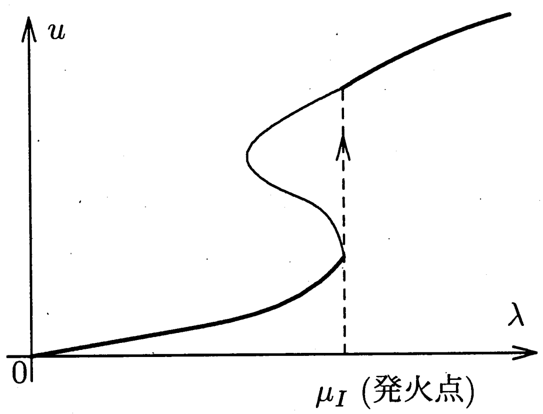

図 4

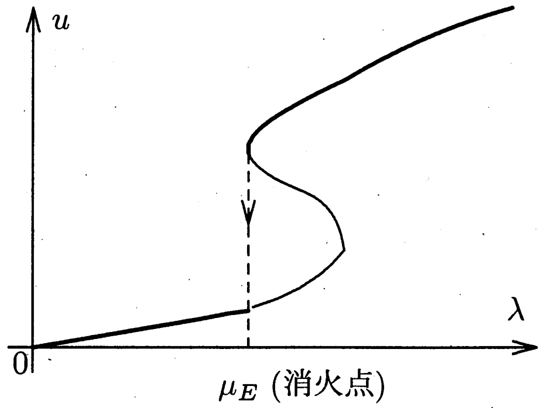

図 5

さて, グリーンの公式から第一固有値 $\lambda_1 = \lambda_1(a)$ は不等式:

$$\lambda_1(1) < \lambda_1(a) < \lambda_1(0)$$

をみたすことが容易に示される. さらに最大値の原理から問題 (2.1) の正値解 $\phi(x) = \phi_{(a)}(x)$ は不等式:

$$\phi_{(0)}(x) < \phi_{(a)}(x) < \phi_{(1)}(x) \quad \text{in } D$$

をみたすことがわかる. したがって

$$\frac{1}{\|\phi_{(1)}\|_\infty} < \frac{1}{\|\phi_{(a)}\|_\infty} < \frac{1}{\|\phi_{(0)}\|_\infty}.$$

また, (3.7) より定理 1 における定数 $\beta = \beta(a)$ は境界条件につぎのように依存していることがわかる:

$$\frac{1}{\beta(1)} < \frac{1}{\beta(a)} < \frac{1}{\beta(0)}.$$

さらに, 定理 4 の定数 $\Lambda = \Lambda(a)$ は本質的に第一固有値 $\lambda_1 = \lambda_1(a)$ に依存していることが (5.6) からわかる. 以上からつぎの関係式が従う:

$$\mu_E(1) < \mu_E(a) < \mu_E(0),$$
$$\mu_I(1) < \mu_I(a) < \mu_I(0).$$

これは断熱効果が高いほど少ない反応物質の濃度で, 発火現象と消化現象が起こることを意味している.

今後の予定を述べる. 第 3 節では定理 2 を証明する. ここでは問題 $(*)_\lambda$ をある順序付きバナッハ空間におけるコンパクト正値作用素の方程式に帰着させ, 写像度の理論を用いて正値解が少なくとも 3 つ存在することを示す. 第 4 節ではパラメータ λ が十分小さいときの正値解の一意性を証明する (定理 3). ここでは (2.2) の第一固有値 λ_1 の変分公式による特徴付けを用いて行う. 第 5 節では, [1, Lemma 7.8], [18, Theorem 2.6] に従って, λ が十分大きいときの正値解の一意性を証明する (定理 4). ただし, 正値 Λ がパラメータ $\varepsilon > 0$ に依らないことを示すことがここでの本質的なことである.

3 定理 2 の証明

この節では定理 2 の証明を行う. 証明では写像度の理論を用いる. そのために, まず問題 $(*)_\lambda$ を $\overline{D}$ 上の連続関数全体 $C(\overline{D})$ におけるコンパクト作用素の方程式に置き換える ([2], [14], [15] を参照). ソボレフ空間 $W^{s,p}(D)$, $(s \geq 2,\ 1 < p < \infty)$ の閉部分空間:

$$W_B^{s,p}(D) = \{u \in W^{s,p}(D) : Bu = 0 \text{ on } \partial D\}$$

を定義すると, [17, Theorem 1] から位相同型写像:

$$K : W^{s-2,p}(D) \longrightarrow W_B^{s,p}(D)$$

が与えられる, すなわち任意の $g \in W^{s-2,p}(D)$ に対して Kg は線型境界値問題:

$$\begin{cases} Au = g & \text{in } D, \\ Bu = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

のただ一つの解である. $s = 2$ で考えるとき, 指数 p を $p > N$ にとり, ソボレフの埋蔵定理とアスコリ–アルツェラの定理を用いると, 写像 K は $C(\overline{D})$ におけるコンパクト作用素であることがわかる. このことから問題 $(*)_\lambda$ を $C^2(\overline{D})$ の枠組みで解くことは, K に関する方程式:

(3.1) $$u = \lambda K f(u) \quad \text{in } C(\overline{D})$$

を解くことと同値である. 実際, $s = 3$ で再び K の位相同型性を用いることで容易に示せる.

ところで, 空間 $C(\overline{D})$ は順序付きバナッハ空間 (ordered Banach space) をなす (順序付きバナッハ空間については [2], [11] を参照). 実際, $C(\overline{D})$ に $\overline{D}$ 上の最大値ノルムを導入し, その順序錘 (positive cone) を

$$P = \left\{u \in C(\overline{D}) : u(x) \geq 0 \text{ in } \overline{D}\right\}$$

で定義して, 順序 $\preceq$ を

$$u \preceq v \Longleftrightarrow v - u \in P$$

で導入するとき, $C(\overline{D})$ は順序付きバナッハ空間になる.

作用素 K は $C(\overline{D})$ において正値性 (strict positivity) をもつ ([14, Lemma 2.1]). すなわち, 任意の $g \in P \setminus \{0\}$ に対して Kg は領域 D の至る所で正である. 以上から, 方程式 (3.1) の作用素 $\lambda K f(\cdot)$ は順序付きバナッハ空間 $C(\overline{D})$ においてコンパクトであり, 順序錘 P をそれ自身に写す.

さて, つぎの補題 3.1 は本質的に Legget-Wiliams [9] による, 順序付きバナッハ空間における非線型コンパクト作用素の方程式の不動点の重複度に関する結果である ([18, Lemma 4.4]).

補題 3.1 順序付きバナッハ空間 X は順序錘 Q とそれから導かれる順序 $\preceq$ をもつとする. 汎関数 $\eta : Q \to [0,\infty)$ を連続で凹とし, 作用素 $G : Q \to Q$ をコンパクトで, ある定数 $\tau > 0$ が存在してつぎの条件をみたすとする:

$$\|G(w)\| < \tau \quad (w \in Q_\tau,\ \|w\| = \tau) \tag{3.2}$$

ただし,

$$Q_\tau = \{u \in Q : \|u\| \le \tau\}.$$

そして, つぎの 4 つの条件をみたす定数 $0 < \delta < \tau$, $\sigma > 0$ が存在すると仮定する:

$$W = \left\{ w \in \mathring{Q}_\tau : \eta(w) > \sigma \right\} \neq \emptyset, \tag{3.3}$$

ここで, $\mathring{A}$ は集合 A の内部を表す.

$$\|G(w)\| < \delta \quad (w \in Q_\delta,\ \|w\| = \delta). \tag{3.4}$$

$$\eta(w) < \sigma \quad (w \in Q_\delta). \tag{3.5}$$

$$\eta(G(w)) > \sigma \quad (w \in Q_\tau,\ \eta(w) = \sigma). \tag{3.6}$$

このとき, G は少なくとも 3 つの不動点をもつ.

補題 3.1 を用いて定理 2 を証明する. 集合 $\mathcal{B}$ を, 滑らかな境界をもつ D の部分領域 Ω で $\Omega \subset\subset D$ をみたすものの全体とする. ここで定数 C_Ω, β をつぎで定義する:

$$\beta = \sup_{\Omega \in \mathcal{B}} C_\Omega, \quad C_\Omega = \inf_{x \in \Omega} (K\chi_\Omega)(x). \tag{3.7}$$

ただし, χ_A は集合 A の特性関数を表す. レゾルベント K が正値性をもつので $\beta > 0$ である. 関数 $\nu(t) = t/f(t)$ は

$$\nu(t) \to \infty, \quad t \to \infty$$

であるので

$$\overline{t_1}(\varepsilon) = \min\{t > t_2(\varepsilon) : \nu(t) = \nu(t_1(\varepsilon))\}$$

とおくとつぎの主張が従う:

$$t_1(\varepsilon) < t_2(\varepsilon) < \overline{t_1}(\varepsilon),$$
$$\nu(t_1(\varepsilon)) = \nu(\overline{t_1}(\varepsilon)).$$

さて,

$$X = \left\{C(\overline{D}), \|\cdot\|_\infty\right\},$$
$$Q = P = \left\{u \in C(\overline{D}) : u(x) \ge 0 \text{ on } \overline{D}\right\},$$
$$G(\cdot) = \lambda K f(\cdot),$$
$$\frac{\nu(t_2(\varepsilon))}{\beta} < \lambda < \frac{\nu(t_1(\varepsilon))}{\|\phi\|_\infty},$$
$$\delta = t_1(\varepsilon), \quad \sigma = t_2(\varepsilon), \quad \tau = \overline{t_1}(\varepsilon)$$

に対して補題 3.1 を適用する. 以下において補題 3.1 の条件がみたされていることを検証する.

(a) 順序錘 P を半径 $t>0$ の閉球で切ったものを $P(t)$ とする:

$$P(t)=\{u\in P:\|u\|_\infty\le t\}.$$

非線型項 $f(t)$ は増加関数であるので, $u\in P(\overline{t_1}(\varepsilon))$ かつ $\|u\|_\infty=\overline{t_1}(\varepsilon)$ に対して

$$\begin{aligned}\|\lambda Kf(u)\|_\infty &< \frac{\nu(t_1(\varepsilon))}{\|\phi\|_\infty}\|Kf(u)\|_\infty\\ &\le \frac{\nu(t_1(\varepsilon))}{\|\phi\|_\infty}f(\overline{t_1}(\varepsilon))\|K1\|_\infty\\ &= \nu(t_1(\varepsilon))f(\overline{t_1}(\varepsilon))=\overline{t_1}(\varepsilon).\end{aligned}$$

これは (3.2) が成立することを示している. 同様にして $u\in P(t_1(\varepsilon))$ かつ $\|u\|_\infty=t_1(\varepsilon)$ に対して

$$\|\lambda Kf(u)\|_\infty<t_1(\varepsilon)$$

を示すことができる ((3.4)).

(b) 汎関数 $\eta(u)$ を $\Omega\in\mathcal{B}$ に対して

$$\eta(u)=\inf_{x\in\Omega}u(x)$$

で定義すると, $\eta(u)$ は連続かつ凹である. さらに $u\in P(t_1(\varepsilon))$ に対して

$$\eta(u)\le\|u\|_\infty<t_1(\varepsilon)<t_2(\varepsilon).$$

したがって (3.5) がみたされている.

(c) 集合 W を

$$W=\left\{u\in \mathring{P}(\overline{t_1}(\varepsilon)):\eta(u)>t_2(\varepsilon)\right\}$$

で定義すると

$$W\supset\left\{u\in P:\overline{t_1}(\varepsilon)/2\le u<\overline{t_1}(\varepsilon)\text{ on }\overline{D},\quad \eta(u)>t_2(\varepsilon)\right\}$$

であるから $W\ne\emptyset$ であることがわかる. (3.3) が示された.

(d) 定数 β の定義から

$$\lambda>\frac{\nu(t_2(\varepsilon))}{C_\Omega}$$

をみたす $\Omega\in\mathcal{B}$ が存在する ((3.7) を参照). したがって

$$\begin{aligned}\eta(\lambda Kf(u)) &= \inf_{x\in\Omega}\lambda K\left(f(u)\right)(x)\\ &\ge \inf_{x\in\Omega}\lambda K\left(f(u)\chi_\Omega\right)(x)\\ &> \frac{\nu(t_2(\varepsilon))}{C_\Omega}\inf_{x\in\Omega}K\left(f(u)\chi_\Omega\right)(x).\end{aligned}$$

もし $\eta(u)=t_2(\varepsilon)$ ならば $f(t)$ は増加関数であるから,

$$\begin{aligned}\frac{\nu(t_2(\varepsilon))}{C_\Omega}\inf_{x\in\Omega}K\left(f(u)\chi_\Omega\right)(x) &\geq \frac{\nu(t_2(\varepsilon))}{C_\Omega}\inf_{x\in\Omega}K\left(f(t_2(\varepsilon))\chi_\Omega\right)(x)\\ &= \frac{\nu(t_2(\varepsilon))}{C_\Omega}f(t_2(\varepsilon))\inf_{x\in\Omega}K\chi_\Omega(x)\\ &= \nu(t_2(\varepsilon))f(t_2(\varepsilon))=t_2(\varepsilon).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\eta(\lambda Kf(u))>t_2(\varepsilon).$$

これは (3.6) がみたされていることを示している.

以上から定理 2 が証明された.

4 定理 3 の証明

この節では 定理 3 を証明する. 証明は線型固有値問題の第一固有値 λ_1 の変分公式による特徴付けを用いて行う.

関数 u_1, u_2 を問題 $(*)_\lambda$ の正値解とするとき, 平均値の定理より

$$\begin{aligned}\int_D A(u_1-u_2)\cdot(u_1-u_2)\,dx &= \int_D \lambda(f(u_1)-f(u_2))(u_1-u_2)\,dx\\ &= \lambda\int_D G(x)(u_1-u_2)^2\,dx,\end{aligned}\tag{4.1}$$

ただし,

$$G(x)=\int_0^1 f'\left(u_2(x)+\theta(u_1(x)-u_2(x))\right)d\theta.$$

さて, ヒルベルト空間 $L^2(D)$ における線型作用素 $\mathcal{A}$ をつぎのように定義する:

(a) 定義域 $\mathcal{D}(\mathcal{A})=\left\{u\in W^{2,2}(D): Bu=0\right\}$.

(b) $\mathcal{A}u=Au,\quad u\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

作用素 $\mathcal{A}$ は $L^2(D)$ において正定値, 自己共役であり, コンパクトな逆 (レゾルベント) をもつ ([13, Theorems 7.3 and 7.4], [17, Theorem 2]). したがって第一固有値 λ_1 はつぎの値で特徴づけられる:

$$\lambda_1=\min\left\{\int_D Au(x)\cdot\overline{u(x)}\,dx : u\in\mathcal{D}(\mathcal{A}),\ \int_D|u(x)|^2\,dx=1\right\}.$$

これを用いると, (4.1) は上と下から次のように評価される:

$$\lambda_1\int_D(u_1-u_2)^2\,dx \quad\leq\quad \int_D A(u_1-u_2)\cdot(u_1-u_2)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \int_D G(x)(u_1 - u_2)^2\,dx \\
&\le \lambda \left(\sup_{t>0} f'(t)\right) \int_D (u_1 - u_2)^2\,dx.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\sup_{t>0} f'(t) = f'\left(\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon^2}\right) = 4\varepsilon^2 \exp\left[\frac{1}{\varepsilon} - 2\right]
$$

であることに注意すると

$$
\lambda_1 \int_D (u_1 - u_2)^2\,dx \le 4\lambda\varepsilon^2 \exp\left[\frac{1}{\varepsilon} - 2\right] \int_D (u_1 - u_2)^2\,dx.
$$

従って,

$$
\lambda_1 - 4\lambda\varepsilon^2 \exp\left[\frac{1}{\varepsilon} - 2\right] > 0
$$

ならば $u_1 \equiv u_2$ が従う.

5 定理 4 の証明

この節では定理 4 の証明を行うが, その方法は Wiebers [18, Theorem 2.6] の方法に基づく.

5.1 正値解の下からの先験的評価

ここでは, 定理 4 の証明に本質的な役割を果たすことになる, 問題 $(*)_\lambda$ の正値解に対する下からの先験的評価を与える.

線型境界値問題の解の性質を用いると, レゾルベント K は $C(\overline{D})$ より狭いある閉部分空間上に制限するとき, 強い正値性 (strong positivity) をもつ. 関数 $\phi(x) = (K1)(x)$ は $\overline{D}$ 上 C^2 級でつぎの性質をもつ ([14, Lemma 2.1]):

$$
\phi(x) \begin{cases} > 0, & x \in D \text{ または } x \in \{x \in \partial D : a(x) > 0\}, \\ = 0, & x \in \{x \in \partial D : a(x) = 0\}, \end{cases}
$$

$$
\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x) < 0, \quad x \in \{x \in \partial D : a(x) = 0\}.
$$

この $\phi(x)$ を用いて $C(\overline{D})$ の閉部分空間 $C_\phi(\overline{D})$ を定義する:

$$
C_\phi(\overline{D}) = \left\{u \in C(\overline{D}) : \exists c > 0 \text{ s.t. } -c\phi \preceq u \preceq c\phi\right\}.
$$

空間 $C_\phi(\overline{D})$ はノルム:

$$
\|u\|_\phi = \inf\{c > 0 : -c\phi \preceq u \preceq c\phi\}
$$

でバナッハ空間をなす. さらに

$$P_\phi = C_\phi(\overline{D}) \cap P = \{u \in C_\phi(\overline{D}) : u \succeq 0\}$$

で $C_\phi(\overline{D})$ の 順序錘を定義すると, $C_\phi(\overline{D})$ は $C(\overline{D})$ と同じ順序 $\preceq$ をもつ順序付きバナッハ空間になる. 関数 $u, v \in C_\phi(\overline{D})$ に対して, $u \ll v$ を $v - u \in \overset{\circ}{P}_\phi$ で定義するとき, レゾルベント K は $C_\phi(\overline{D})$ をそれ自身に写すコンパクト作用素であり強い正値性をもつ, つまり任意の $g \in P_\phi \setminus \{0\}$ に対して $Kg \gg 0$ が成立する ([14, Proposition 2.2]). そして問題 $(*)_\lambda$ の解を求めることはつぎの方程式を解くことと同値であることがわかる:

$$u = \lambda K(f(u)) \quad \text{in } C_\phi(\overline{D}).$$

さて, 定数 γ を

$$\gamma = \min\left\{\frac{f(t_1(\varepsilon))}{t_1(\varepsilon)} : 0 < \varepsilon < \frac{1}{4}\right\} \tag{5.1}$$

で定義する. ここで,

$$t_1(\varepsilon) \to 1, \quad \varepsilon \downarrow 0$$

であるので γ は定義可能で正であることに注意する.

第一固有値 λ_1 の固有関数 $\varphi_1(x)$ で

$$\varphi_1(x) > 0 \quad \text{in } D, \quad \|\varphi_1\|_\infty = 1$$

をみたすものをとるとき, つぎの結果はパラメータ ε が小さく, パラメータ λ が大きい場合の問題 $(*)_\lambda$ の正値解の下からの先験的評価を与えている.

命題 5.1 ある定数 $0 < \varepsilon_0 < 1/4$ が存在して, もし

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \lambda > \lambda_1/\gamma$$

ならば問題 $(*)_\lambda$ のすべての正値解 u は

$$u \succeq \lambda\varepsilon^{-2}\varphi_1$$

をみたす.

証明 定数 c は $0 < c < 1$ をみたすとする. 関数 $\lambda c\varepsilon^{-2}\varphi_1$ に対して

$$A\left(\lambda c\varepsilon^{-2}\varphi_1\right) - \lambda f\left(\lambda c\varepsilon^{-2}\varphi_1\right) = \lambda c\varepsilon^{-2}\varphi_1\left(\lambda_1 - \lambda\frac{f(\lambda c\varepsilon^{-2}\varphi_1)}{\lambda c\varepsilon^{-2}\varphi_1}\right) \quad \text{in } D.$$

ところが $f(t)/t$ は $t = t_1(\varepsilon)$ でただ一つ極小値をもち

$$\frac{f(t)}{t} \longrightarrow 0, \quad t \to \infty,$$

$$\frac{f(t)}{t} \longrightarrow \infty \quad t \to 0$$

であるので

$$\frac{f\left(\lambda c\varepsilon^{-2}\varphi_1\right)}{\lambda c\varepsilon^{-2}\varphi_1} \geq \min\left\{\frac{f(t_1(\varepsilon))}{t_1(\varepsilon)}, \frac{f\left(\lambda\varepsilon^{-2}\right)}{\lambda\varepsilon^{-2}}\right\}$$

と評価される. この右辺に関して, まず (5.1) から

$$\lambda > \lambda_1/\gamma, \quad 0 < \varepsilon < 1/4$$

ならば

$$\lambda_1 - \lambda\,\frac{f(t_1(\varepsilon))}{t_1(\varepsilon)} \leq \lambda_1 - \lambda\gamma < 0,$$

が従う. つぎに, 直接的な計算により

$$\lambda > \lambda_1/\gamma$$

ならば

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda\,\frac{f\left(\lambda\varepsilon^{-2}\right)}{\lambda\varepsilon^{-2}} &= \lambda_1 - \varepsilon^2\exp\left[\frac{1}{\varepsilon + \varepsilon^2/\lambda}\right] \\ &\leq \lambda_1 - \varepsilon^2\exp\left[\frac{1}{\varepsilon + \varepsilon^2\gamma/\lambda_1}\right], \end{aligned}$$

が得られるが,

$$\lambda_1 - \varepsilon^2\exp\left[\frac{1}{\varepsilon + \varepsilon^2\gamma/\lambda_1}\right] < 0 \quad (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$$

となるような $\varepsilon_0 \in (0, 1/4)$ を決定することができるので, 結局

$$\lambda > \lambda_1/\gamma, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

ならば

$$\lambda_1 - \lambda\,\frac{f\left(\lambda\varepsilon^{-2}\right)}{\lambda\varepsilon^{-2}} < 0,$$

が従う.

以上から,

$$\lambda > \lambda_1/\gamma, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

のとき

$$A\left(\lambda c\varepsilon^{-2}\varphi_1\right) - \lambda f\left(\lambda c\varepsilon^{-2}\varphi_1\right) < 0 \quad \text{in } D,$$

が従う. これより, レゾルベント K の強い正値性を用いると

$$\lambda K\left(f(c\lambda\varepsilon^{-2}\varphi_1)\right) \gg c\lambda\varepsilon^{-2}\varphi_1$$

が成り立つ. この評価式から命題の主張を得るためにはつぎの補題を必要とする ([18, Lemma 1.3]).

補題 5.1 ある関数 $\tilde{u} \gg 0$ と定数 $s_0 > 0$ が存在して

$$\lambda K\left(f(s\tilde{u})\right) \gg s\tilde{u}, \quad 0 \leq s < s_0$$

ならば写像 $\lambda K f(\cdot)$ の任意の不動点 u は

$$u \succeq s_0 \tilde{u}$$

をみたす.

関数 $f(t)$ が $f(0) = 1$ をみたすことから $0 \ll \lambda K(f(0))$ であることに注意すると, 補題 5.1 を $\tilde{u} = \lambda\varepsilon^{-2}\varphi_1$, $s_0 = 1$, $s = c$ で適用すると命題 5.1 の結果が得られる. □

5.2 定理 4 の証明

関数 $F(t)$ を

$$F(t) = f(t) - f'(t)t = \frac{\varepsilon^2 t^2 + (2\varepsilon - 1)t + 1}{(1+\varepsilon t)^2} \exp\left[\frac{t}{1+\varepsilon t}\right], \quad t \geq 0$$

で与える.

補題 5.2 $0 < \varepsilon < 1/4$ とするとき, 関数 $F(t)$ はつぎの性質をもつ (図 6):

(1)

$$F(t) \begin{cases} > 0 & (0 \leq t < t_1(\varepsilon), \quad t > t_2(\varepsilon)), \\ = 0 & (t = t_1(\varepsilon), \quad t = t_2(\varepsilon)), \\ < 0 & (t_1(\varepsilon) < t < t_2(\varepsilon)). \end{cases}$$

(2) $F(t)$ は $(0, (1-2\varepsilon)/2\varepsilon^2)$ において減少し, $((1-2\varepsilon)/2\varepsilon^2, \infty)$ において増加する, そして $t = (1-2\varepsilon)/2\varepsilon^2$ で最小値をとる.

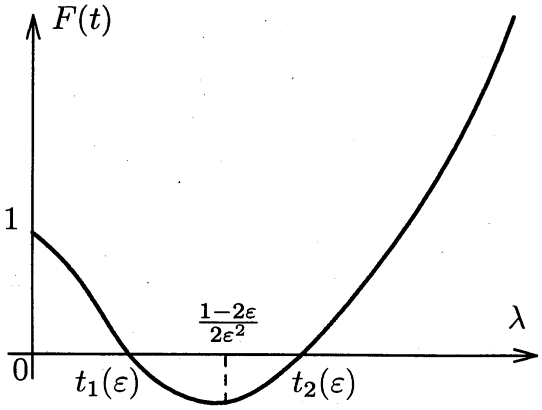

図 6

もし $\varepsilon > 1/4$ ならば関数 $F(t)$ は, 任意の $t > 0$ に対して正値であることに注意する. [15, Theorem 2] によると, 定理 1 の一意性の証明において本質的な条件は,

(5.2) 問題 $(*)_\lambda$ の任意の正値解 u に対して領域 D で $\lambda F(u) > 0$ が成立すること,

である. したがって, $\varepsilon > 1/4$ ならば任意の $\lambda > 0$ に対して一意性が成立する. ところが, $0 < \varepsilon < 1/4$ の場合には補題 5.2 から必ずしも (5.2) が成立するとは限らないが, 一意性が成立するための十分条件はつぎのように弱めることができる.

命題 5.2 問題 $(*)_\lambda$ の任意の正値解 u が

$$KF(u) \gg 0 \tag{5.3}$$

をみたすならば, $(*)_\lambda$ は高々一つ正値解をもつ.

証明 [18, Lammas 1.3, 2.2] を参照. □

したがって, 命題 5.1 を考慮に入れるとき, (5.3) の十分条件を与えることによって定理 3 の主張を得る. すなわち, つぎの命題を証明する.

命題 5.3 $0 < \varepsilon < 1/4$ とする. このとき, ある定数 $\alpha > 0$ が存在して, $u \succeq \alpha\varepsilon^{-2}\varphi_1$ をみたす任意の u に対して (5.3) が成立する.

証明 証明は [1, Lemma 7.8] に従って行われる. まず

$$\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon^2} < t_2(\varepsilon) = \frac{1-2\varepsilon+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon^2} < 2\varepsilon^{-2}$$

であるので, 補題 5.2 より

$$F(t) \geq F\left(2\varepsilon^{-2}\right) > 0, \quad t \geq 2\varepsilon^{-2}. \tag{5.4}$$

関数 u に対して, 2 つの関数 $z_-(u)(x)$, $z_+(u)(x)$ を

$$z_-(u)(x) = \begin{cases} -F(u(x)), & x \in \left\{x : u(x) \geq 2\varepsilon^{-2}\right\}, \\ 0, & x \in \left\{x : u(x) < 2\varepsilon^{-2}\right\}, \end{cases}$$
$$z_+(u)(x) = F(u(x)) + z_-(u)(x)$$

で与える. そして 2 つの集合 M, L を

$$M = \left\{x \in \overline{D} : \varphi_1(x) > \frac{1}{2}\right\},$$

$$L = \left\{x \in \overline{D} : u(x) \geq 2\varepsilon^{-2}\right\}$$

で与えるとき, もし $u \succeq 4\varepsilon^{-2}\varphi_1$ ならば (5.3) より

$$M \subset L,$$

$$z_-(u) \leq -F\left(2\varepsilon^{-2}\right)\chi_L \leq -F\left(2\varepsilon^{-2}\right)\chi_M$$

を得る. ここで,

$$v \succ 0 \quad (\text{すなわち } v \succeq 0 \text{ かつ } v \not\equiv 0),$$
$$v \preceq \chi_M$$

をみたす $v \in C^\infty(\overline{D})$ をとることができるので

$$z_-(u) \leq -F\left(2\varepsilon^{-2}\right)v$$

と $z_-(u)$ は評価される.

一方, 補題 5.2 より $t = (1-2\varepsilon)/2\varepsilon^2$ で $F(t)$ は最小値をとるので

$$\min\left\{F(t) : 0 \leq t \leq 2\varepsilon^{-2}\right\} = F\left(\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon^2}\right) < 0.$$

これと

$$z_+(u)(x) = \begin{cases} 0, & x \in L, \\ F(u(x)), & x \notin L \end{cases}$$

から

$$z_+(u) \geq F\left(\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon^2}\right)\chi_{\overline{D}\setminus L}$$

が従う. 定数 α を 4 より大きいとして, 集合 M_α を

$$M_\alpha = \left\{x \in \overline{D} : \varphi_1(x) < \frac{2}{\alpha}\right\}$$

で与える. $u \succeq \alpha\varepsilon^{-2}\varphi_1$ をみたす u に対して

$$\overline{D} \setminus L = \left\{x \in \overline{D} : u(x) < 2\varepsilon^{-2}\right\} \subset M_\alpha$$

が成立するから,

$$z_+(u) \geq F\left(\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon^2}\right)\chi_{M_\alpha}$$

が従う.

以上から, $u \succeq \alpha\varepsilon^{-2}\varphi_1$ をみたす u に対して

$$\begin{aligned} K(F(u)) &= K\left(z_+(u) - z_-(u)\right) \\ &\geq F\left(\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon^2}\right)K(\chi_{M_\alpha}) + F\left(2\varepsilon^{-2}\right)Kv \end{aligned}$$

が成立する.

右辺の第 2 項について, K の強い正値性から

$$Kv \succeq c\varphi_1$$

をみたす定数 $c>0$ が存在する. 第 1 項については

$$\chi_{M_\alpha} \to 0 \text{ in } L^p(D), \quad \alpha \to \infty$$

であることに注意すると, レゾルベント K は

$$K\colon L^p(D) \hookrightarrow W^{2,p}(D) \hookrightarrow C^1(\overline{D}), \quad p>N$$

であるので (第 3 節を参照),

$$K(\chi_{M_\alpha}) \to 0 \text{ in } C^1(\overline{D})$$

が従う. [14, Proposition 2.2] から $C^1(\overline{D}) \hookrightarrow C_\phi(\overline{D})$ であるので, 結局

$$K(\chi_{M_\alpha}) \to 0 \text{ in } C_\phi(\overline{D})$$

が従う. よって, $C_\phi(\overline{D})$ の位相の取り方から任意の自然数 k に対して

$$K(\chi_{M_\alpha}) \preceq \frac{c}{k}\varphi_1 \tag{5.5}$$

をみたす $\alpha>4$ が存在する.

この α に対して, 関数 u が $u \succeq \alpha\varepsilon^{-2}\varphi_1$をみたすならば

$$\begin{aligned} K(F(u)) &= K\left(z_+(u)-z_-(u)\right) \\ &\geq F\left(\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon^2}\right)\frac{c}{k}\varphi_1 + F\left(2\varepsilon^{-2}\right)c\varphi_1 \\ &= F\left(2\varepsilon^{-2}\right)c\varphi_1\left(1+\frac{F\left(\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon^2}\right)}{F\left(2\varepsilon^{-2}\right)}\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ. ところで, $\varepsilon \downarrow 0$ のとき

$$\frac{F\left(\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon^2}\right)}{F\left(2\varepsilon^{-2}\right)} = \frac{(4\varepsilon-1)(\varepsilon+2)^2}{\varepsilon^2+4\varepsilon+2}\exp\left[\frac{-2\varepsilon-3}{\varepsilon+2}\right] \longrightarrow -2e^{-3/2}$$

であるから, 定数 k を

$$k > -\min_{0<\varepsilon<1/4}\frac{F\left(\frac{1-2\varepsilon}{2\varepsilon^2}\right)}{F\left(2\varepsilon^{-2}\right)}$$

にとり, それに応じて (5.5) で α を決定すれば命題の主張を得る. □

命題 5.1, 5.2, 5.3 により,

$$0<\varepsilon\leq\varepsilon_0, \quad \lambda>\Lambda_1=\max\{\lambda_1/\gamma,\, \alpha\}$$

ならば問題 $(*)_\lambda$ は高々一つ正値解をもつ.

パラメータ ε が $\varepsilon_0 < \varepsilon < 1/4$ の場合, u が $(*)_\lambda$ の正値解ならば

$$\begin{cases} A\left(u - \frac{\lambda}{\lambda_1}\varphi_1\right) = \lambda f(u) - \lambda\varphi_1 \geq \lambda(1-\varphi_1) \geq 0 & \text{in } D, \\ B\left(u - \frac{\lambda}{\lambda_1}\varphi_1\right) = 0 & \text{on } \partial D, \end{cases}$$

が従うので, 最大値の原理から

$$u \succeq \frac{\lambda}{\lambda_1}\varphi_1.$$

ゆえに, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ の場合の考察と同様にして,

$$\lambda \geq \frac{\alpha\lambda_1}{{\varepsilon_0}^2}$$

ならば一意性が成り立つ.

以上から,

$$\Lambda = \max\left\{\Lambda_1, \frac{\alpha\lambda_1}{{\varepsilon_0}^2}\right\} \tag{5.6}$$

とおくとき,

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{4}, \quad \lambda > \Lambda$$

ならば問題 $(*)_\lambda$ の正値解の存在に対する一意性が成り立つ. □

参考文献

[1] H. Amann, *Multiple positive fixed points of asymptotically linear maps*, J. Functional Analysis, **17** (1974), 174–213.

[2] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Rev., **18** (1976), 620–709.

[3] T. Boddington, P. Gray and G. C. Wake, *Criteria for thermal explosions with and without reactant consumption*, Proc. R. Soc. London A., **357** (1977), 403–422.

[4] K. J. Brown, M. M. A. Ibrahim and R. Shivaji, *S-shaped bifurcation curves problems*, Nonlinear Analysis, TMA, **5** (1981), 475–486.

[5] D. S. Cohen, *Multiple stable solutions of nonlinear boundary value problems arising in chemical reactor theory*, SIAM J. Appl. Math., **20** (1971), 1–13.

[6] D. S. Cohen and T. W. Laetsch, *Nonlinear boundary value problems suggested by chemical reactor theory*, J. Differential Equations, **7** (1970), 217–226.

[7] 慶伊富長・小野嘉夫, 活性化エネルギー, 化学 One Point **12**, 共立出版 (1985).

[8] 小宮山宏, 反応工学, CREATIVE CHEMICAL ENGINEERING COURSE **3**, 培風館 (1995).

[9] R. W. Legget and L. R. Williams, *Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces*, Indiana Univ. Math. J., **28** (1979), 673–688.

[10] R. W. Legget and L. R. Williams, *Multiple fixed point theorems for problems in chemical reactor theory*, J. Math. Anal. Appl., **69** (1979), 180–193.

[11] 大石進一, 非線形解析入門, 現代非線形科学シリーズ **1**, コロナ社 (1997).

[12] S. V. Parter, *Solutions of a differential equation in chemical reactor processes*, SIAM J. Appl. Math., **26** (1974), 687–715.

[13] K. Taira, *Bifurcation for nonlinear elliptic boundary value problems I*, Collect. Math., **47** (1996), 207–229.

[14] K. Taira and K. Umezu, *Bifurcation for nonlinear elliptic boundary value problems II*, Tokyo J. Math., **19** (1996), 387–396.

[15] K. Taira and K. Umezu, *Positive solutions of sublinear elliptic boundary value problems*, Nonlinear Analysis, TMA, **28** (1997), 761–771.

[16] 上野景平, 化学反応はなぜおこるか, BLUE BACKS, 講談社 (1993).

[17] K. Umezu, *L^p-approach to mixed boundary value problems for second-order elliptic operators*, Tokyo J. Math., **17** (1994), 101–123.

[18] H. Wiebers, *S-shaped bifurcation curves of nonlinear elliptic boundary value problems*, Math. Ann., **270** (1985), 555–570.

E-mail address : ken@maebashi-it.ac.jp