数理解析研究所講究録
1026巻 1998年 113-126

Goppa符号と有理点について

（付録論文つき）

京都大学 数理解析研究所
伊原康隆
Yasutaka Ihara
(RIMS, Kyoto Univ.)

V.D. Goppaの発見によって有理点を沢山もつ有限体上の代数曲線が線型符号の理論に応用されるようになったのは80年代はじめ([G])で，それ以来有限体上の代数曲線の有理点に関する研究が盛んになり([S]など)，今日でもかなり活発に研究され進展しつつあります([GS],[GV],…)。筆者との関わりは謂わば昔話——昔の結果がGoppa等によって使われた——に属するのですが，その縁もあって今年(97年)7月Seattleでのアメリカ数学会(等)主催の夏季研究集会「Finite fields and Applications」に出席する事になり，そこで最近のいくつかの話題にふれる事が出来ました。(この方面の研究者のかなり多くが出席。) 今日はこれらについてのお話しをしたいと思います。

§1 線型符号

有限体 $\mathbb{F}_q$ をとり,

$$C \subset (\mathbb{F}_q)^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{F}_q\}$$

を $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元横ベクトル空間の一つの線型部分空間とします。$(\mathbb{F}_q)^n$ の 2 元 $x = (x_i)$, $x' = (x'_i)$ の間の"距離"を

$$d(x, x') = \#\{i \mid x_i \neq x'_i\}$$

と定め,

$$\mathrm{dis}(C) = \mathop{\mathrm{Min}}_{\substack{x, x' \in C \\ x \neq x'}} d(x, x') = \mathop{\mathrm{Min}}_{\substack{x \in C \\ x \neq 0}} d(x, 0)$$

と置きます。

$\mathbb{F}_q$ の元を"アルファベット", $(\mathbb{F}_q)^n$ の元を長さ n の単語,

C の元を"許される名前"と考えてみましょう。

そうすると, dis(C) は"2つの異る名前は最低何ヶ所で文字が異るか"を表わす量をいう事になります。どのように C を選ぶとよいか? C が小さいと"同姓同名"を許さざるを得なくなるし, dis(C) が小さくても混同しやすい名前があって不都合です。そこで (n に比べて) dim(C), dis(C) が共になるべく大きい C を探したいという事になります。これはそう明らかなよい作り方がない (少くとも知られていない) ので, 応用と直結した面白い研究課題になります。(工学への応用は通信や CD の音の修正などのようです。)

そこで

$$\delta(C)=\frac{\mathrm{dis}(C)}{n},\qquad R(C)=\frac{\mathrm{dim}(C)}{n}$$

(それぞれ, C の相対距離, 情報率とよばれる) と置き, q を固定, n と C を動かして, $(\delta(C), R(C))$ を座標にもつ点を δR 平面上の正方形の上にマークしてゆきます。なるべく"右上"の点がほしいわけです。まず n, C でパラメトライズされる点列 $(\delta(C), R(C))$ の集積点の集合 U_q を研究対象とします.

古典的主結果より (cf.[M])

1) ある連続写像 $\alpha_q : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ が存在して,

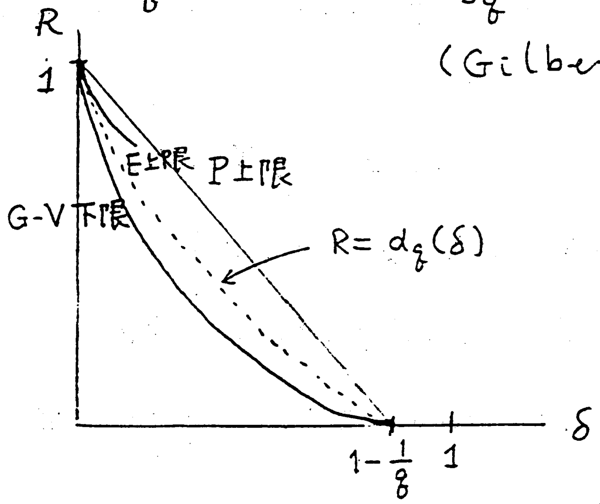
$$U_q = \{(\delta, R) \in [0,1]^2 \mid 0 \leq R \leq \alpha_q(\delta)\}.$$

2) $\alpha_q(\delta) \leq \mathrm{Max}\left\{1-\frac{q}{q-1}\delta,\ 0\right\}$ (Plotkin上限)

2)' Elias上限 (δの小さいところで 2)より よい) (略)

3) $\alpha_q(\delta) \geq 1-\delta\log_q(q-1)+\delta\log_q\delta+(1-\delta)\log_q(1-\delta)$

(Gilbert－Varshamov下限)



[注意GV]

後の参考の為, G-V曲線の勾配 -1 の接線は

$$\delta+R=1-\log_q\frac{(2q-1)}{q}$$

で, 接点の δ座標は $\frac{q-1}{2q-1}$。

Gilbert-Varshamov 下限の上には、U_q の点は約25年間発見されなかった為，GVを与える曲線が α_q のグラフと一致するのではないかとの予想もあったようです。しかし Goppa 符号によって、有理点を沢山もつ $\mathbb{F}_q$ 上の代数曲線の理論と結びつき、昔の結果によってこの記録は破られました。

そこで Goppa 符号の説明に入りましょう。

§2 Goppa 符号

X を $\mathbb{F}_q$ 上の滑らかで完備絶対既約な代数曲線とし，その種数を g とします。また X は相異る $\mathbb{F}_q$ 有理点 $P_0, P_1, \ldots, P_n$ を持つとします。又 m を自然数とし，これらの資料によって定まる Goppa 符号 $C \subset (\mathbb{F}_q)^n$ を，

$$C = \left\{ (f(P_1), \ldots, f(P_n)) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は } X \text{ 上の有理関数で，} P_0 \text{ で} \\ m \text{ 位以下の極をもつ他は正則} \end{array} \right\}$$

で定義します。$2g-2 < m < n$ とすると，暗算により

(2-1) $\quad \dim(C) = \dim(f \text{ の空間の次元}) = m - g + 1$

(m に関する右側の不等式から第一の等式，左側のから Riemann-Roch によって第二の等式が出る) また $f \neq 0$ なら $f(P_i) = 0$ となる i の個数は $\leq m$。よって

(2-2) $\quad \mathrm{dis}(C) \geq n - m.$

$$\therefore \quad R(C) = \frac{m-g+1}{n}, \quad \delta(C) \geq 1 - \frac{m}{n}.$$

$$\therefore (2\text{-}3) \qquad \delta(C) + R(C) \geq 1 - \frac{g-1}{n}.$$

よって，n が $g-1$ に比べて大きい程、$(\delta(C), R(C))$ はより右上の方にあることになります。n は（X の $\mathbb{F}_q$ 有理点の個数）-1 にとれますから，$\mathbb{F}_q$ を固定したとき $g-1$ に比べて $\mathbb{F}_q$ 有理点の個数の著しく多い $\mathbb{F}_q$ 上の代数曲線の系列 $(g \to \infty)$ を見つけることが問題となります．定量的には，

$$(2\text{-}4) \qquad A(q) = \varlimsup_{g \to \infty} \left(\frac{\mathbb{F}_q \text{ 上の曲線 } X \text{ の有理点の個数}}{X \text{ の種数 } g} \right)$$

とおくとき，Goppa 符号により（m は $2g-2 < m < n$ の範囲ですべての値を用いる），線分

$$(G_p) \qquad \delta + R = 1 - \frac{1}{A(q)}, \qquad \frac{1}{A(q)} \leq R \leq 1 - \frac{1}{A(q)}$$

は U_q に属することがすぐわかります．一方，§1 [注意 GV] より，

$$(2\text{-}5) \qquad A(q) > \left(\log_q \left(\frac{2q-1}{q} \right) \right)^{-1} \fallingdotseq \log_2 q$$

なら線分 (G_p) の少くとも一部が G-V 下限曲線の上にはみ出すことになります。そこで各素数べき q に対して $A(q)$ の値，又はそのよい下限を求めることが問題になります．

§3 沢山の有理点をもつ $\mathbb{F}_q$ 上の代数曲線系の研究 (i)

これに係わる筆者自身の昔の結果（はじめは予想 [I_1]）は、最も手短かに述べれば、次の通りです（[I_2] をその引用文献参）.

(※) q が平方数（素数の偶数巾）のとき、$\mathbb{F}_q$ 上の代数曲線（すべて滑らかで完備絶対既約なものをさす）の可算無限系列 $\{X_i\}_{i\geq 1}$ であって、X_i の種数 g_i は $g_i \geq 2$, $g_i \to \infty$ を満し、各 X_i は少くとも $(\sqrt{q}-1)(g_i-1)$ 個の $\mathbb{F}_q$-有理点をもつものが存在する。

特に（q が平方数のとき） $A(q) \geq \sqrt{q}-1$

これを $\left(\log_q\left(\frac{2q-1}{q}\right)\right)^{-1}$ と比べると、$q \geq 7^2$ なら確かに $\sqrt{q}-1$ の方が大きくなるので、線分 [G_p] の一部分が GV 曲線の上にはみ出ることになります。尚 Goppa 自身がすぐ筆者の仕事と結びつけたわけではなく、その前に [TVZ]（上記(※)の一部）が出てから、（多分 Manin が）筆者の仕事を想い出してくれたものと思います（[M] 参照）.

さて上記の代数曲線 X_i たちですが、実際には $\mathbb{F}_q$ 上の志村曲線のよいモデルをとる事によって得られます。これを証明するのには、志村氏による深い理論（ほとんどすべての $\mathfrak{p}$ での good reduction と合同関係式）と森田康夫, 太田雅己氏による各 $\mathfrak{p}$ に関する議論と、それに（次に述べる）離散群

Γのゼータ関数 $\zeta_\Gamma(u)$ の議論が必要ですが，その全体構造を一目で見て X_i は $(\sqrt{q}-1)(g_i-1)$ 個の特殊な有理点をもつ事を納得するには，Γとの関係を見ることが不可欠だと思います。このΓというのは $PSL_2(\mathbb{R})\times PGL_2(F_\mathfrak{p})$ （$F_\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}$進体，$N(\mathfrak{p})^2=q$）の既約な格子部分群のことで，このΓこそ X_i たちの正しいパラメーターなのです。詳しくは，この一文に続く "Shimura curves over finite fields and their rational points"（加筆訂正後，前記のSeattle conference報告集に提出予定），又はそこに引用されている各論文を御参照下さい。

§4 沢山の… (ii).

さて上記 X_i を（$\mathbb{F}_q$ 上の曲線として）含むことのできる射影空間 $\mathbb{P}^{N_i}$ の次元も（$\mathbb{F}_q$ 有理点の個数を比べれば明らかなように）$N_i \to \infty$ とならざるを得ないので，X_i たちを具体的に方程式で書き下すことは大変困難（複雑）に思われます。しかしその関数体なら常に2元で生成され一つの方程式で書けるので，具体的に書ける可能性がある。比較的最近 Garcia と Stichtenoth [GS$_1$],[GS$_2$] は，§3(※)を満す X_i の別種の実例を(2通り)，それらの関数体を具体的に与えることによって，与えました。少し後に N. Elkies は，[GS$_1$] で構成された曲線は

Drinfeld modular curve である事を指摘しました。[GS1] による X_i の関数体 $K_i = \mathbb{F}_q(X_i)$ の構成は次の通りです。

$$K_1 = \mathbb{F}_q(x_1)$$
$$K_{i+1} = K_i(y_{i+1})$$
$$\left.\begin{aligned} y_{i+1}^{\sqrt{q}} + y_{i+1} &= x_i^{\sqrt{q}+1} \\ x_{i+1} &= x_i^{-1} y_{i+1} \end{aligned}\right\} \quad (i \geq 1).$$

K_i の完備滑らかなモデル X_i について,

$$X_i \text{の} \mathbb{F}_q \text{有理点の個数} \geq (q-1)q^{\frac{i-1}{2}} + 2q^{\frac{1}{2}}$$
$$\geq (\sqrt{q}-1)(g_i - 1)$$

となります。例えば $i=2$ のとき, X_2 は

$$y^{\sqrt{q}} + y = x^{\sqrt{q}+1}$$

の1点コンパクト化ですが, この各辺は $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_{\sqrt{q}}$ での y(ないし x)のトレース(ないし ノルム)を表わしており, トレースが全射であることから, X_2 の有理点の個数 $= q\sqrt{q}+1$, 一方 $g_2 = \frac{1}{2}(q-\sqrt{q})$ で, X_2 は g_2 を種数とする $\mathbb{F}_q$ 上の曲線の持ち得る最大の $\mathbb{F}_q$ 有理点を有している (Weil の Riemann 予想から出る評価: $\#(X(\mathbb{F}_q)) \leq q+1+2g\sqrt{q}$ が等式で成立つ).

以上は $q = p^{2f}$ 型のときの話ですが, $q = p^{2f-1}$ 型についての話に入る前に, $A(q)$ のとり得る値の範囲について復習します.

§5 A(q)について

まず $\mathbb{F}_q$ 上の種数 g の代数曲線 X の $\mathbb{F}_q$ 有理点の個数 $\#(X(\mathbb{F}_q))$ の，q と g を固定して X を動かしたときの最大値を $N_q(g)$ と置いて，これについて考えると，

(5-1) $$\#(X(\mathbb{F}_q)) = q+1-\sum_{j=1}^{g}(\pi_j+\bar{\pi}_j), \qquad \pi_j\bar{\pi}_j = q$$

と表わせるので (A. Weil),

(5-2) $$\#(X(\mathbb{F}_q)) \leq q+1+2g\sqrt{q},$$

(5-3) $$N_q(g) \leq q+1+2g\sqrt{q} \qquad \text{(Weil 上限)}.$$

∴

(5-4) $$A(q) = \overline{\lim_{g\to\infty}} \frac{N_q(g)}{g} \leq 2\sqrt{q}.$$

次に([I₃]), $(\#_1)$ を $X\otimes\mathbb{F}_{q^2}$ でも考え比較することより

(5-5) $$N_q(g) \leq q+1+\frac{1}{2}\left(\sqrt{(8q+1)g^2+4(q^2-q)g}-g\right)$$

これより

(5-6) $$A(q) \leq \sqrt{2q}.$$

g が q に比べて大きいと，Weil 上限は最良ではないのです。

具体的には，

(5-7) $$g > \frac{q-\sqrt{q}}{2} \quad \text{なら} \quad \text{(5-5)の方が(5-3)より強い.}$$

$N_q(g)$ 自身を正確に求める研究も Van der Geer 等により盛んになされていますが，これについては §7 で触れることにして，$A(q)$ 自身に戻ると，§§3, 4 で述べたように，$q = p^{2f}$ なら

$A(q) \geq \sqrt{q}-1$. これらを見て Drinfeld-Vladut は，一般の q についても

(5-8) $$A(q) \leq \sqrt{q}-1$$

である事を証明しました。一方，$q=p^{2f-1}$ 型については，Serre が

(5-9) $$A(q) > c\log q \qquad (\exists c>0)$$

を証明しました。要約すると，

$$\begin{cases} q=p^{2f} \text{ なら} & A(q)=\sqrt{q}-1 & ([I_3],[DV]) \\ q=p^{2f-1} \text{ なら} & c\log q < A(q) \leq \sqrt{q}-1 & ([S],[DV]) \end{cases}$$

という事になります。Serre の定数 c は かなり小さく，$\log_2 e$ には達しないので，$q=p^{2f-1}$ 型のとき §2 の部分 (G_p) は G-V 曲線の上に出るかどうか判明していませんでした。最近 $q=p^{2f-1}$ のときも 有理点の比較的多い曲線族が 構成され，それによって，この場合にも (G_p) が G-V を突破るような q がいろいろある事がわかってきました。以下これについて一部を報告したいと思います。

§6 <u>沢山の…(iii)</u>　$q=p^{2f-1}$ (p:素数) の場合の $A(q)$ のよい下限についてですが，現在知られている主なことをまとめると，

$f \geq 2$, $p > 2$ なら

(6-1)
$$A(q) > \sqrt{p/2}$$

が成立つ (主に Niederreiter−Xing)

というものです (f=2のときは Zink が Shimura surface を使って示した。又 $f \geq 2$ 一般は，<u>Niederreiter−Xing</u> の結果として Xing によって Seattle で報告された。Seattle 集会の報告集 (Contemp. Math ?) に論文が出ることを期待している)

<u>p が f に比べて十分大きければ</u>

$$\sqrt{p/2} > \left(\log_q\left(\frac{2q-1}{q}\right)\right)^{-1} \quad (\fallingdotseq \log_2 q)$$

となるので，(6-1) によって (2-5) が示され，従ってこの場合も線分 (G_p) の一部が G-V 下限を上まわることになります。

尚 Zink や Niederreiter−Xing の結果をもとの精密な形で述べると，

$$A(p^3) \geq \frac{2(p^2-1)}{p+2} \qquad \text{(Zink)},$$

$q = q_1^m$ (q_1:素数べき), $m>1$ (整数) と分解するとき

$$A(q) \geq \frac{2q_1}{[\sqrt{2(2q_1+1)}]+1} \geq \sqrt{\frac{q_1}{2}} - \frac{1}{2} \qquad \text{(Niederreiter−Xing)}.$$

$q=p$ のとき，このような結果は，まだ知られていないようです．個別の小さい p については，

$$\frac{81}{317} \leq A(2) \leq \sqrt{2}-1, \quad \frac{62}{163} \leq A(3) \leq \sqrt{3}-1,$$

等が知られています（[GV]参照）．

§7. その他の観点

今まで触れませんでしたが，[GV]に於て，Van der Geer と M. van der Vlugt は，Goppa 符号とは異る方法で有限体上の代数曲線の有理点と符号を結びつけて大変興味深い研究を進めています．どちらかというと上で見てきた場合（q: 小，g: 大）とは逆の場合がここでは興味の中心になるようです．$N_q(g)$ に関する研究や表（Wirtz の表の改善など）も出ています。大変わかりやすく書かれています．

その他 Perret, Lauter, Schoof, Thomas, 等の研究や少し以前の伊吹山，Fried 等の研究もそれぞれ興味深い結果や方法を与えています。

[文献表]

(基本的文献)

[G] V. D. Goppa: Codes on algebraic curves, Sov. Math. Dokl 24 (1981), 170–172

[M] Y. I. Manin: What is the maximum number of points on a curve over $\mathbb{F}_2$? J. Fac. Sci. U. Tokyo 28 (1981), 715–720

[I_1] Y. Ihara: The congruence monodromy problems, J. Math. Soc. Japan 20 (1968), 107–121

[I_2] — : Some remarks on the number of rational points of algebraic curves over finite fields, J. Fac. Sci. U. Tokyo 28 (1981), 721–724

[TVZ] M. A. Tsfasman, S. G. Vladut, T. Zink: Modular curves, Shimura curves and Goppa codes, better than the Varshamov–Gilbert bound, Math. Nachr 109 (1982), 21–28

[DV] V. G. Drinfeld, S. G. Vladut: The number of point on an algebraic curve, Funct Analy and Appl 17 (1983), 53–54

[S] J-P. Serre: Sur le nombre des points rationels d'une courbes algébrique sur un corp fini, CR Acad. Sci Paris 296 (1983), 397–402

[GV] Van der Geer and M. van der Vlugt: How to construct curves over finite fields with many points, "Algebraic Geometry" (Cambridge Univ. Press) p 169–189 Institute Nazionale di Alta Mat 1997.

(その他)

[GS_1] A. Garcia, H. Stichtenoth: A tower of Artin-Schreier extensions of function fields attaining the Drinfeld-Vladut bound, Inv. math. 121 (1995), 211–222

[GS_2] —— : On the asymptotic behavior of some towers of function fields over finite fields, J. Number theory 61 (1996), 248–273.