

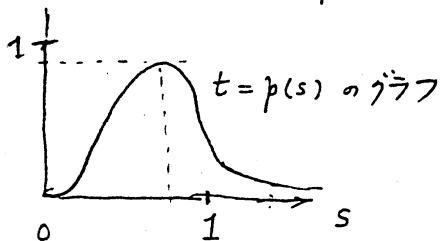
ランダムなユニタリ行列の隣接固有値と  
合同ゼータ関数の隣接零点に関する  
Katz-Sarnak の最近の仕事の紹介

京都大学 数理解析研究所

伊原 康隆

(Yasutaka Ihara, RIMS, Kyoto-U)

約 10 年前, A. Odlyzko は 次のような驚くべき実験  
結果を公表しました. Riemann ゼータ関数  $\zeta(s)$  の知られ  
ている非自明零点で  $\text{Im}(s) > 0$  のものを  $\frac{1}{2} + i\gamma_n$  ( $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq$   
...) とし, 隣り合う零点の実部の差の平均が 1 になるよう  
に正規化する為  $\gamma_n$  の代りに  $\tilde{\gamma}_n = \frac{\gamma_n \log \gamma_n}{2\pi}$  と置くと, 実  
数列  $\{\tilde{\gamma}_{n+1} - \tilde{\gamma}_n\}$  の  $\mathbb{R}$  上の分布密度\*)は [Me] で  $p_2(0, s)$  と書かれ  
ている特定の関数  $p(s) = p_2(0, s)$  で与えられる らし ( $0$ ).



$$\int_0^{\infty} p(s) ds = \int_0^{\infty} s p(s) ds = 1$$

$$s \rightarrow \infty \text{ で } \log p(s) \sim -\frac{\pi^2}{8} s^2$$

$$s \doteq 0 \text{ で } p(s) \sim \frac{\pi^2}{3} s^2$$

\*) (即ち任意の閉区間  $[a, b]$  に対して  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\{1 \leq n \leq N; \tilde{\gamma}_{n+1} - \tilde{\gamma}_n \in [a, b]\} = \int_a^b p(s) ds.$ )

この実験は、H. L. Montgomery の理論 や F. Dyson の  $p(s)$  に関する指摘の影響を受けて始められたようですが、結果は  $\{\tilde{\gamma}_{n+1} - \tilde{\gamma}_n\}$  のヒストグラムと  $p(s)$  の急ぐ程の視覚的一致を示しています。

さて最近 Katz と Sarnak [KS] は、上記  $p(s)$  をサイズ  $\infty$  のランダム・ユニタリ行列の隣接固有値の偏角差の分布密度関数として捉えなおすと共に、 $\zeta(s)$  を「ランダム」な 合同ゼータ関数 に置換えれば Odlyzko の予想は実際成立する事を証明しました。両者を結びつける一番の鍵は Deligne に与るフロベニウス ( $\in \text{US}_p$ ) の一様分布性ですが、[KS] では  $p(s)$  とユニタリ群 ( $U(N)$ ,  $\text{US}_p(N)$ , etc.) の間の基本的関係も十分に解明されており、それらが基礎になっています。(Weyl の指標公式の見直し、拡張も使われている)。[KS] ではその他種々のゼータ関数の零点に関する興味深い結果や予想も述べられています。

Sarnak 氏とは 96 年 5 月 (京都) と 10 月 (Princeton), Katz 氏とも 10 月に会い、この話を直接聞く機会があり、Preprint も勉強する機会があったので、これらについて大筋の紹介を当研究会で引受けることになったものです。特に [KS](ii) は非常にわかりやすい survey です。尚もなぐ出版されると思いますし、解析数論の学会での小山氏による紹介もありましたので、内容の叙述はこの報告書では略させていただきます。

## [主要文献]

[KS] N. Katz, P. Sarnak

(i) The spacing distributions between zeros of zeta functions;  
Preprint (June 1996)

(ii) Zeros of zeta functions, their spacings and their  
spectral nature; Preprint (Jan 1997)

(iii) Random matrices, Frobenius eigenvalues and monodromy  
Preprint (1997) (本と12冊出版する事)

## [その他]

[Me] M. L. Mehta: "Random matrices," Acad. Press (1991)

[O] Odlyzko, A: "On the distribution of spacings between  
zeros of the zeta function", Math. Computation  
48-177 (1987), pp 273-308.