数理解析研究所講究録
1027 巻 1998 年 108-109

Arithmetic-geometric mean and related inequalities for operators

九州大学・数理学研究科 幸崎 秀樹 (Hideki Kosaki)

任意のユニタリ不変ノルム $|||\cdot|||$ (作用素ノルム、C_p ノルム等) とヒルベルト空間上の作用素に関する次のような不等式 ([2, 3] 参照) が近年盛んに研究されている。

$$|||A^*XB||| \leq \frac{1}{2}|||AA^*X+XBB^*||| \quad \text{(Bhatia-Davis)}$$

$$|||X||| \leq \frac{1}{2}|||SXS^{-1}+S^{-1}XS||| \ (S \text{ は可逆で自己共役}) \quad \text{(Corach-Porta-Recht)}$$

両者は単純な置き換えにより互いに同値であり、前者は matrix arithmetic-geometric mean inequality (=AG 不等式) と呼ばれている。 AG 不等式及び関連する事項は安藤による解説 [1] で手際良く説明されている。 AG 不等式は極分解により $A, B \geq 0$ の場合に帰着され、また更に標準的な近似議論により (有限) 行列の場合が本質的である事がすぐに分かる。以下 A, B, X, H, K 等は行列を、また $|||\cdot|||$ は行列に対するユニタリ不変ノルムを表すものとする。

従来、上の事柄は作用素「不等式」として研究されてきたが、実はこれは「等式」の話である。実際、関数論でおなじみの帯状領域に対する Poisson 積分を利用すれば

$$A^{\frac{1}{2}}XB^{\frac{1}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} A^{it}(AX+XB)B^{-it}\frac{dt}{2\cosh(\pi t)}$$

であり、 AG 不等式はこの積分表示から明らかである。 (但し、A^{it}, B^{-it} はそれぞれの support 上で考える。) ずっと昔の Heinz ([4]) による (anti-)commutator に対する一連の不等式は AG 不等式からも導ける事は McIntosh ([5]) により示された。講演で説明した通り、これら一連の不等式もすべて「等式」の話として Poisson 積分表示から簡単にしかも統一的に示す事が可能である。

Fourier 変換を利用して関連する積分表示を示す事により、次の新しい不等式が得られる。

Theorem 1. 自己共役行列 H, K に対して、次の不等式が成立する。

$$|||HX-XK||| \leq |||\exp(\tfrac{H}{2})X\exp(-\tfrac{K}{2}) - \exp(-\tfrac{H}{2})X\exp(\tfrac{K}{2})|||$$

Theorem 2. 自己共役行列 H, K に対して、次の不等式が成立する。

$$|||(\sin H)X(\cos K) - (\cos H)X(\sin K)||| \leq |||HX - XK|||$$

上の二つの結果はそれぞれ不等式 $|x| \leq |\sinh(x)|$, $|\sin(x)| \leq |x|$ のある種の非可換版である。 AG 不等式の一般化と見なせる "matrix Young inequality"

$$|||AXB||| \leq |||\tfrac{1}{p}A^pX + \tfrac{1}{q}XB^q||| \quad (p \in (1,\infty),\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$$

は残念ながら ($p \neq 2$ の時、作用素ノルムに対して) 成立しない事が [1], p. 54 で指摘されている。 しかし、少し弱い不等式は常に成り立つ。

Theorem 3. $p \in (1,\infty)$ に対して

$$K_p = \frac{p^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}))\sin^2\theta}}$$

と置く。この時、正の行列 A, B に対し、次の不等式が成立する。

$$|||A^{\frac{1}{p}}XB^{\frac{1}{q}}||| \leq K_p\,|||\tfrac{1}{p}AX + \tfrac{1}{q}XB|||$$

References

1. T. Ando, *Majorizations and inequalities in matrix theory,* Linear Algebra Appl., 199(1994), 17-67.
2. R. Bhatia and C. Davis, *More matrix form of the arithmetic geometric mean inequality,* SIAM J. Matrix Anal. Appl., 14(1993), 132-136.
3. G. Corach. H. Porta, and L. Recht, *An operator inequality,* Linear Algebra Appl., 142(1990), 153-158.
4. E. Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung,* Math. Ann., 123(1951), 415-438.
5. A. McIntosh, *Heinz inequalities and perturbation of spectral families,* Macquire Mathematical Reports, 79-0006, 1979.