数理解析研究所講究録
1028 巻 1998 年 123-124

Hill 方程式の非一様摂動について（概略）

東大数理　丸山文綱 (MARUYAMA Fumitsuna)

次の作用素について考える.

$$H=-\frac{d^{2}}{dx^{2}}+V(x)-q(\varepsilon x), \tag{1}$$

ただし, $V(x)$ は R 上の実数値 C^{∞} 関数で周期は $a>0$. q は摂動項で詳しい仮定は後で述べる. ε は微小パラメータである. H は R 上の複素数値関数に作用し, 特に $L^{2}(R)$ 上自己共役である. テクニカルな理由から, V は有限帯ポテンシャルで, $\int_{0}^{a}V(x)dx=0$ であることを仮定する. この場合, よく知られているように; V は解析的である. (たとえば, [H] を見よ.) 従って $V(x)$ は実軸の複素近傍 $|Im\ x|<\alpha$, $\alpha>0$ で解析的であると仮定する.

H は量子力学における電場 $q(\varepsilon x)$ 内の 1 次元結晶のモデルといえる. $q(\xi)=\xi$ の場合, つまり電場が一様の場合はよく知られており, H には Stark-Wannier 効果と呼ばれる共鳴現象が起きる. この現象は [B–D], さらに最近 [B–G] により詳しく解析されている.

ここでは非一様電場の場合を扱う. q に関して, 次の仮定を置く.

(1) $q(\xi)$ は R 上実解析的で, 複素近傍 $|Im\ \xi|<\beta$ $(\beta>0)$ に解析接続される.

(2) すべての $\xi\in R$ に対し $q'(\xi)>0$. $\lim_{\xi\to\pm\infty}q(\xi)=\pm\infty$, かつ $q\colon R\to R$ は微分同相, つまり, q^{-1} が存在して実解析的かつ狭義単調.

(3) $q(\xi)=\Lambda_{+}\xi^{\rho_{+}}+o(|\xi|^{\rho_{+}})$ for $\xi\to+\infty$, $q(\xi)=-\Lambda_{-}(-\xi)^{\rho_{-}}+o(|\xi|^{\rho_{-}})$ for $\xi\to-\infty$, ただし$\rho_{\pm}>\frac{2}{3}$ かつ$\Lambda_{\pm}$ は正定数.

これらの条件から実軸の複素近傍 $|Im\ \xi|<\beta'$ ただし $\beta>\beta'>0$ は正則に実軸に沿った領域に写される.

この非一様摂動によっても実軸に沿って共鳴が存在することをいうのが目的である. 共鳴そのものは一様な場合同様に Jost 解の類似物である$\pm\infty$ でそれぞれ特徴的な, ふたつの解によって定義される. 一様な場合と違うのは共鳴点が周期的には並ばないことである.

使う手法は [B–G] による. 概略のみを述べる.

元の Hill 方程式の Bloch 解を介して, isoenergy curve と呼ばれる曲線上で multiple scale method により漸近解を構成する. つまり $\xi=\varepsilon x$ を独立変数として扱い, ε の級数として漸近解を作るのである. このとき変数 x, ξ, ε およびスペクトル (エネルギー) パラメータ E あるいはその代替物としての quasimomentum k が絡み合う. ここで WKB 解析同様に turning point (以下 TP と略す) が出てくるが, この周りで Olver 型の漸近解を考えることに

より generic な部分の漸近解と接続する. さらにこの解の有限和の部分を考えることにより, 漸近解から実際に収束する解を作る. 元々の摂動方程式の典型的な解空間の基底を使って Jost 解同様に共鳴を定義する. この基底を TP 毎の基底で transition matrix を使い表示し, この表示から量子化条件を導き, 実際に共鳴の存在がいえ, その位置を評価することができる. ただし, ここで $\varepsilon \to 0$ なる極限をとっているが, ε は isoenergy curve でパラメータ E とつながっているため, E は有限の範囲で止めて考えなければならない.

ここではおおまかな結果のみを述べる. 上のようにして非一様電場の場合も共鳴点は存在することがいえる. $\rho_{\pm}$ が 1 より大きいか小さいかで共鳴点の分布の概形は変化する. $\rho_{\pm} = 1$ では実軸にほぼ平行に, ほぼ均一に分布する. $\rho_{\pm} < 1$ では $|Re\ E|$ が大きくなると実軸に近づき, 相互に接近する. $\rho_{\pm} > 1$ では $|Re\ E|$ が大きくなると実軸から遠ざかる. どの場合も上に述べた通り E が有限の範囲でのみ正当性がある.

ここで計算を述べてもよいが, 説明には長い形式的計算を省けないこと, 意外なことに Olver 型の解があまり知られていないことなどから, 短くまとめることは筆者の手に余ることと判断し, まことに申し訳ないことだが詳細は稿を改めさせていただくことにする. 同じ結果の$\pm\infty$で同じパラメータの場合について 1998 年 1 月の数理研短期共同研究での講究録に書くので, そちらを参照していただきたい.

参考文献

[B] Buslaev, V. S.: Semiclassical approximation for equations with periodic coefficients, Russian Math. Survey, **42**, 97–125(1987)

[B–D] Buslaev, V. S., Dmitrieva, L. A.: Bloch electron in an external field, Leninglad Math. **1**, 287–320(1990)

[B–G] Buslaev, V. S., Grigis, A.: Imaginary parts of Stark–Wannier Resonances, Prépublications Mathématiques de l'Université Paris-Nord 97–10(1997).

[H] Hochstadt, H.: On the determination of a Hill's equation from its spectrum, Arch. Rat. Mech. Anal. **19**, 353–362(1965)

[M1] Maruyama, F.: On the geometric phase of the perturbed Lamé–Ince equation, to appear in Journal of Math. Sci., Univ. of Tokyo, **4**, (1997).

[M2] Maruyama, F.: Questions de théorie spectrale des opérateurs différentiels et pseudodifférentiels, Thèse, Université Paris Nord (1997).