

複素領域のたたみ込み方程式

千葉大理 岡田 靖則 (Yasunori Okada) *

概要

たたみ込み積について復習し, 複素領域におけるたたみ込み作用素とはどういう作用素かを調べる. さらに Fourier-Borel 解析を紹介し, 整関数に関する理論のいくつかを仮定して, とくに管状領域における, たたみ込み方程式の可解性と解の延長問題について論じる.

0 Introduction

0.0 たたみ込みとは

最初に, 実の函数に対するたたみ込み積を復習する. f, g を \mathbb{R} 上の函数とするとき, f, g のたたみ込み $f * g$ は,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

と定義される. ここで, 上の積分は一般には意味を持たないが, これが適当な意味を持つように適当な函数空間を設定する. このとき, $f * g = g * f$ になること, また, f, g に対して pairing $\langle f, g \rangle$ を

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$$

で定めると,

$$f * g(x) = \langle f(y), g(x-y) \rangle_y$$

となることに注意しておく. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$ は, 双方を y の函数 (あるいは超函数) とみなし, 他の変数 (があればそれ) はパラメータと思って pairing を取ることを意味する.

さらに, $f^\vee(x) = f(-x)$ で f^\vee を定義すれば,

$$\begin{aligned} \langle f * g, h \rangle &= \int \int f(x-y)g(y)h(x)dydx \\ &= \int g(y) \int f(x-y)h(x)dx dy \\ &= \int g(y) \int f^\vee(y-x)h(x)dx dy \\ &= \langle g, f^\vee * h \rangle \end{aligned}$$

*okada@math.s.chiba-u.ac.jp

が (積分順序変更がうまくいく範疇で考えるならば) 成り立つ. これを利用して, たたみ込みは双対空間で考えることができる.

例 0.1. f をコンパクト台を持つ \mathbb{R}^n 上の distribution (すなわち, $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)'$) とし, $f^* : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ を定義しよう. 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対してたたみ込み作用素

$$\begin{aligned} f^\vee * : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) &\rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \varphi &\mapsto (f^\vee * \varphi)(x) = \langle f^\vee, \varphi(x-y) \rangle_y \end{aligned}$$

を考える. この作用素は連続線形作用素となるので, 転置をとることができ, 転置作用素

$$\begin{aligned} {}^t(f^\vee *) : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' &\rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \\ u &\mapsto ({}^t(f^\vee *))u \end{aligned}$$

が作用素 $f^* : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)' \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ となる. このとき,

$$(f^* u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)u(x-y)dy$$

が distribution の積分の意味でも成り立っていることに注意する.

例 0.2. f をコンパクト台を持つ \mathbb{R}^n 上の hyperfunction (すなわち, $f \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)'$) とする. 同様に

$$\begin{aligned} f^\vee * : \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \\ \varphi &\mapsto (f^\vee * \varphi)(x) = \langle f^\vee, \varphi(x-y) \rangle_y \end{aligned}$$

の転置作用素

$$\begin{aligned} {}^t(f^\vee *) : \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^n) \\ u &\mapsto ({}^t(f^\vee *))u \end{aligned}$$

が考えられて, hyperfunction の積分の意味でも

$$(f^* u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)u(x-y)dy$$

に一致する. しかし, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ には通常位相が入らないので,

$$\begin{aligned} {}^t(f^\vee *) : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \\ u &\mapsto f^* u \end{aligned}$$

は duality を用いた考え方では定義できない. (hyperfunction の積分の意味で定義するか, あるいは $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^n)$ への作用が, 台を一定の大きさにしか増やさないことに注意して $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ の元のコンパクト台を持つ hyperfunction の局所有限和への分解を用いることで定義できる.)

0.1 複素領域のたたみ込み作用素

複素領域では, duality の考え方をういてたたみ込み積を定義する. すなわち, 解析的汎函数 $T \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$ と整函数 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ に対して,

$$(T * f)(z) = \langle T, f(z - w) \rangle_w$$

と定めると $T * f$ はまた整函数となる.¹ このとき, $T*$ は $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ の線形連続作用素となる. さらに T が \mathbb{C}^n 内の凸コンパクト集合 K で支持されるとき, 任意の凸開集合 $U \in \mathbb{C}^n$ に対して $T*$ は $\mathcal{O}(U + (-K)) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ の線形連続作用素になる. これらの作用素 $T*$ を, 解析的汎函数 T を核とするたたみ込み作用素という.²

例 0.3 (定数係数線形偏微分作用素). 多項式 P に対して解析的汎函数 T を

$$\langle T, f \rangle = (P(-D)f(z))|_{z=0} \text{ for any } f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$$

と定めると, $T * f = P(D)f$ となる. 実際,

$$\begin{aligned} (T * f)(z) &= \langle T, f(z - w) \rangle_w \\ &= (P(-D_w)f(z - w))|_{w=0} \\ &= (P(D_z)f(z - w))|_{w=0} \\ &= P(D_z)f(z) \end{aligned}$$

である.

例 0.4 (平行移動作用素). 固定したベクトル $a \in \mathbb{C}^n$ に対して解析的汎函数 T を

$$\langle T, f \rangle = f(a) \text{ for any } f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$$

と定めると, $(T * f)(z) = f(z - a)$ となる. 実際,

$$(T * f)(z) = \langle T, f(z - w) \rangle_w = f(z - a)$$

である.

整函数 $f(z)$ に対しても, $f^\vee(z) = f(-z)$ と定めると, f^\vee はまた整函数である. より一般に $f \in \mathcal{O}(U)$ のとき, $f^\vee \in \mathcal{O}(-U)$ となる. さらに, 解析的汎函数 T に対して解析汎函数 T^\vee を

$$\langle T^\vee, f \rangle = \langle T, f^\vee \rangle \text{ for any } f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$$

で定める. このとき, T が K で支持されることと T^\vee が $-K$ で支持されることは同値になる. $(\cdot)^\vee$ に関して, 公式

$$(T * f)^\vee = T^\vee * f^\vee$$

¹流儀によっては $(T * f)(z) = \langle T, f(z + w) \rangle_w$ と定義することもある. 我々の流儀ではこの pairing は $\langle T, f(z + w) \rangle_w = T^\vee * f$ と書ける.

²各凸開集合 U に応じてそれぞれ作用素 $\mathcal{O}(U + (-K)) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ が定義されるので, 作用素と考えるときはこれらを区別する意味で $(T*)_U$ などと書くべきだが, ここでは区別せずに同じ記号 $T*$ を用いる.

が成り立つ.

2つの解析的汎函数 S, T に対して, 解析的汎函数 $S * T$ を

$$\langle S * T, f \rangle = \langle T, S^\vee * f \rangle \text{ for any } f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$$

で定める. このとき,

$$\begin{aligned} S * T &= T * S \\ (T_1 * T_2) * T_3 &= T_1 * (T_2 * T_3) \\ (S * T) * f &= S * (T * f) \end{aligned}$$

が成立する.

注意 0.5. (1) たたみ込み積 $*$ によって $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$ は単位元を持つ可換結合代数になり, $*$ によって $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ に作用する. ただし, 単位元は $\langle \delta, f \rangle = f(0)$ で定義される解析的汎函数 $\delta \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$ を核とするたたみ込み作用素 $\delta*$ である.

(2) 連続線形作用素 $T*: \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ の転置作用素は

$$T^\vee*: \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)' \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$$

で表現される.

(3) 任意の平行移動作用素や任意の定数係数線形偏微分作用素はたたみ込み作用素で表現できる. さらにこれらの任意有限個の線形結合や積で作られる作用素もたたみ込み作用素で表現される.

(4) たたみ込み作用素は, 任意の平行移動作用素や任意の定数係数線形偏微分作用素と可換である.

さて, 逆にたたみ込み作用素はこれらの性質の一部の, 平行移動との可換性で特徴付けられる.

命題 0.6. $X: \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ を連続線形作用素とする. X が任意の平行移動作用素と可換ならば, ある解析的汎函数 $T \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$ を用いて $X = T*$ と表現できる.

証明. X に対して T を

$$\langle T, f \rangle = (X(f^\vee))|_{z=0} \text{ for any } f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$$

で定める. すると, 任意の $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ に対して

$$\begin{aligned} (T * f)(z) &= \langle T, f(z - w) \rangle_w \\ &= (X_w(f(z - w))^\vee_w)|_{w=0} \\ &= (X_w(f(z + w)))|_{w=0} \end{aligned}$$

ここで X は平行移動と可換だから

$$\begin{aligned} &= ((Xf)(z + w))|_{w=0} \\ &= (Xf)(z) \end{aligned}$$

となり, $X = T*$ が示された. □

系 0.7. 凸コンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ が与えられ, また任意の凸開集合 $U \in \mathbb{C}^n$ に対して連続線形作用素 $X_U : \mathcal{O}(U + (-K)) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ があって, 次の 2 条件をみたすとする.

(1) 組 $\{X_U\}_U$ は次の意味で平行移動と可換である. 任意のベクトル $a \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U + (-K)) & \xrightarrow{X_U} & \mathcal{O}(U) \\ \text{平行移動} \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(U + (-K) + \{a\}) & \xrightarrow{X_{U+\{a\}}} & \mathcal{O}(U + \{a\}) \end{array}$$

が可換な図式になる.

(2) 組 $\{X_U\}_U$ は次の意味で制限写像と可換である. 任意の凸開集合の包含写像 $V \subset U$ に対して,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U + (-K)) & \xrightarrow{X_U} & \mathcal{O}(U) \\ \text{制限} \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(V + (-K)) & \xrightarrow{X_V} & \mathcal{O}(V) \end{array}$$

が可換な図式になる.

このとき, K で支持されるある解析的汎函数 $T \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$ が存在して, 任意の凸開集合 $U \in \mathbb{C}^n$ に対して $X_U = T^*$ が成立する.

証明. まず, $X_{\mathbb{C}^n}$ だけを考えよう. 平行移動との可換性と命題 0.6 から, ある $T \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$ が存在して $X_{\mathbb{C}^n} = T^*$ となることがわかる. 各 U に対しても $X_U = T^*$ となることは, 制限写像との可換性と, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ が $\mathcal{O}(U + (-K))$ の中で稠密 (dense) であることからわかる. T が K で支持されることはここではひとまず認める.³ \square

以上のように, 任意の平行移動との可換性を仮定すれば連続線形作用素はたたみ込みしかないことがわかるが, 一部の平行移動に限って可換性を考えるとどうなるだろうか. 以下, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{C}^n$ は \mathbb{C}^n の標準基底 (すなわち, $\mathbf{e}_j = (\delta_{jk})_{k=1, \dots, n}$) とする.

例 0.8. 微分作用素 $P(x, D)$ は $x = (x_1, \dots, x_n)$ のうち x_1, \dots, x_d ($1 \leq d < n$) を含まないとする. (すなわち $[D_j, P] = 0$ for $j = 1, \dots, d$). すると, 一般に P はベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ の平行移動と可換でない (したがって, P はたたみ込み作用素でない) が, $\mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ の任意の \mathbb{C} 係数の線形結合のベクトルの平行移動と可換である. つまり P は \mathbb{C}^n の部分群 $\bigoplus_{j \geq d} \mathbb{C} \mathbf{e}_j$ による作用とは可換.

例 0.9. $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ を周期に持つ周期函数 $a(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ による掛け算作用素 $f(z) \mapsto a(z)f(z)$ は, \mathbb{C}^n の部分群 (lattice) $\mathbb{Z}^n = \bigoplus_j \mathbb{Z} \mathbf{e}_j$ のベクトルの平行移動と可換であるが, 整数でない $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ をとり, $\sum_j \alpha_j \mathbf{e}_j$ の平行移動とは一般には可換でない.

³というか, 支持されることの定義を述べていないのでいまは証明できない.

以上の例から、 \mathbb{C}^n の部分群による作用と可換というだけでたたみ込み作用素が特徴付けられるとは限らないことがわかる。しかし、たとえば \mathbb{C}^n の部分群として \mathbb{R}^n を取れば、その作用との可換性からたたみ込み作用素が特徴付けられる。

命題 0.10. $U \subset \mathbb{C}^n$ を $U + \mathbb{R}^n = U$ をみたす凸開集合 (このような集合を管状領域 (tube domain) という) とする。連続線形作用素 $X : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ が \mathbb{R}^n 方向の平行移動と可換であるならば、ある \mathbb{R}^n 内のコンパクト集合で支持される解析的汎函数 $T \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$ が存在して、 $X = T^*$ となる。

証明. U は原点を含むとしても一般性を失わない。 $X : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ の転置作用素 ${}^tX : \mathcal{O}(U)' \rightarrow \mathcal{O}(U)'$ を用いて、 T を

$$T = (({}^tX)\delta)^\vee$$

と定義する。 T は $-U$ 内のあるコンパクト集合で支持されることに注意する。したがって、充分小さい正の数 $\varepsilon > 0$ をとり、 $V = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |\operatorname{Im} z| < \varepsilon\}$ とすると、 T^* は $\mathcal{O}(U)$ から $\mathcal{O}(V)$ への作用素になる。このとき、任意の $f \in \mathcal{O}(U)$ 及び $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\begin{aligned} (T^* f)(x) &= \langle T, f(z-w) \rangle_w |_{z=x} \\ &= \langle (({}^tX)\delta)^\vee, f(x-w) \rangle_w \\ &= \langle ({}^tX)\delta, f(x+w) \rangle_w \\ &= \langle \delta, X(f(x+w)) \rangle_w \end{aligned}$$

ここで X は \mathbb{R}^n 方向の平行移動と可換だから

$$\begin{aligned} &= \langle \delta, (Xf)(x+w) \rangle_w \\ &= (Xf)(x+w) |_{w=0} \\ &= (Xf)(x) \end{aligned}$$

となる。 $T^* f \in \mathcal{O}(V)$ 、 $Xf \in \mathcal{O}(U)$ であるが、この 2 つは \mathbb{R}^n 上で一致しているので、 V 上で $T^* f = Xf$ が成立する。このことから、 T が \mathbb{R}^n 内のコンパクト集合で支持され、 T^* は $\mathcal{O}(U)$ から $\mathcal{O}(U)$ への連続線形作用素であることがわかるが、これはひとまず認めれば⁴、 $T^* = X$ が言える。□

1 興味と動機

たたみ込み作用素や方程式のどこが面白いと (僕が) 考えるか、の例を挙げてみよう。

1.1 超函数の空間におけるたたみ込み方程式

再び話を実のカテゴリに戻す。

⁴ さっきと同様、支持されることの定義を述べていないのでいまは証明できない。

\mathbb{R}^n 上の、コンパクト台の可微分函数の空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, コンパクト台の distribution の空間 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, distribution の空間 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ の包含列

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

を考えてみよう.⁵

問題 1.1. 真中の空間から核函数 $\mu \neq 0$ を取り, 右側の空間における作用素

$$\mu* : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

を考えると, これは全射か?

答え 1.2. 一般には全射でない. 例えば, μ を左側の空間からとれば, 像は可微分函数の空間 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ に含まれてしまう.

では, hyperfunction の空間で考えて,

問題 1.3. μ はコンパクト台の hyperfunction (すなわち $\mu \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^n)$) とする. $\mu \neq 0$ のとき, 作用素

$$\mu* : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

は全射か?

答え 1.4. 未解決. 反例は見つかっていない.⁶

また, (ultra)distribution の場合は, 核函数を滑らかにすると全射でないことが簡単にわかったが, hyperfunction の場合, 核函数が多少なりとも滑らかならば, 作用素は全射になることがわかっている.⁷ さらに, μ の台が 1 点のときも, 全射になることが知られている (河合 [3] 参照).

注意 1.5. ちなみに, $\mu*$ が単射になるための条件は $\mu*$ がある平行移動作用素の 0 でない定数倍であることである.

1.2 複素解析的興味

ここでは 1 次元に話を限ろう. 平行移動を \mathbb{C} の解析的自己同相写像, あるいは実方向の平行移動を管状領域の解析的自己同相写像と考えるのは特殊すぎないだろうか.

そこで, X を 1 次元の単連結領域とし, $T : X \rightarrow X$ を不動点をもたない解析的同相写像とする. T の引き起こす変換 $T^* : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ ($f \mapsto T^*f = f \circ T$) に対して, 次の問題を考えよう.

⁵より一般に $*$ を超可微分クラスとし,

$$\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{E}^{*'}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}^{*'}(\mathbb{R}^n)$$

を考えてもよい.

⁶フーリエ超函数の空間で考えると, 全射にならない例はある ([8] 参照).

⁷滑らか, というより, 特異性が激しくなければ, といった感じ. 例えば μ が 0 でない ultradistribution ならば全射になる ([8] 参照).

問題 1.6. 0 でない多項式 P に対して,

$$P(T) : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X)$$

は全射か?

答え 1.7. 全射.

実際, このような T に対して,

- (1) $\varphi : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ なる解析同相があって, $\varphi T \varphi^{-1}$ が実方向の平行移動.
- (2) $\varphi : X \xrightarrow{\sim}$ 上半平面 なる解析同相があって, $\varphi T \varphi^{-1}$ が実方向の平行移動.
- (3) $\varphi : X \xrightarrow{\sim}$ 管状領域 なる解析同相があって, $\varphi T \varphi^{-1}$ が実方向の平行移動.

のいずれかが起こることが, Riemann の写像定理と 1 次分数変換の簡単な計算からわかる. いずれの場合も, $P(T^*)$ は δ およびその実方向への平行移動有限個の 1 次結合を核とするたたみ込み作用素となる. ここでは省略するが, あとは複素領域上のたたみ込み作用素の一般論から全射になることがわかる.

2 Fourier-Borel 解析

2.0 解析的汎函数

$U \subset \mathbb{C}^n$ を凸開集合とする. $\mathcal{O}(U)$ には通常, 広義一様収束の位相を入れる. すなわち, コンパクト集合 $K \subset\subset U$ と $f \in \mathcal{O}(U)$ に対して

$$\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$$

と定め, $\mathcal{O}(U)$ にセミノルムの系 $\{\|\cdot\|_K\}_{K \subset\subset U}$ で位相を入れる. このとき

命題 2.1. $\mathcal{O}(U)$ は (FS)-空間になる.

証明. 凸コンパクト集合 K に対してノルム $\|\cdot\|_K$ を持つ Banach 空間 X_K を

$$X_K = \mathcal{O}(\text{Int } K) \cap C^0(K)$$

と定め, 包含写像 $K \subset L$ に対しては制限写像 $X_L \rightarrow X_K$ を考えると, 位相も込めて

$$\mathcal{O}(U) = \varprojlim_{K \subset\subset U} X_K$$

が成立する. ここで

- (1) $K \subset\subset L$ のときに制限写像 $X_L \rightarrow X_K$ がコンパクト写像であること

(2) U に対して凸コンパクト増大列

$$K_1 \subset\subset K_2 \subset\subset K_3 \subset\subset \dots$$

$$\bigcup_j K_j = U$$

をとることができる, 位相も込めて

$$\varinjlim_{K \subset\subset U} X_K = \varinjlim_j X_{K_j}$$

が成立すること

の 2 点に注意すればよい. □

また, 双対空間 $\mathcal{O}(U)$ に関しては, 命題 2.1 の証明に出てきた記号を用いて,

命題 2.2. $\mathcal{O}(U)'$ は (DFS)-空間であり, 位相も込めて

$$\mathcal{O}(U)' = \varinjlim_{K \subset\subset U} X'_K = \varinjlim_j X'_{K_j}$$

が成り立つ.

さらに, 凸コンパクト集合 $K \subset\subset \mathbb{C}^n$ に対して位相も込めて,

$$\mathcal{O}(K) = \varinjlim_{K \subset\subset L} X_L$$

と定めると (DFS)-空間になる. 双対空間 $\mathcal{O}(K)'$ は (FS)-空間になり, 位相も込めて,

$$\mathcal{O}(K)' = \varinjlim_{K \subset\subset L} X'_L$$

が成立する.

A が凸開集合または凸コンパクト集合のとき, 制限写像 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{O}(A)$ は dense image を持つ. したがって, $A \subset B$ で B も凸開集合または凸コンパクト集合ならば $\mathcal{O}(B) \rightarrow \mathcal{O}(A)$ も dense image を持つ. このことに注意すると, 両立する写像の族 $\{\mathcal{O}(A) \rightarrow \mathcal{O}(B)\}_{A \subset B}$ はすべて単射であることがわかる. よって今後, $\mathcal{O}(A)'$ を $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$ の部分集合とみなそう.

定義 2.3. $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$ の元を解析的汎函数 (analytic functional) という. 解析的汎函数 T がある凸コンパクト集合 K で支持される (support される) とは, $T \in \mathcal{O}(K)'$ となることと定める.

注意 2.4. (1) 任意の解析的汎函数は, ある凸コンパクト集合で支持される. これは $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$ の帰納極限による表現を用いて示すことができる.

(2) 任意の解析的汎函数は, コンパクト台をもつ測度で表現される. これは, 埋め込み $\mathcal{O}(U) \rightarrow C(U)$ が連続であることから示される. ただし, この埋め込みの image は dense でないので, 表現する測度は一意的には決まらない.⁸

(3) T を支持する凸コンパクト集合 K の最小は, 一般には存在しない. これは後述します.

⁸例えばコンパクト台を持つ C^∞ -級函数 φ に対して $\bar{\partial}\varphi$ と正則函数との積の積分は常に 0 です.

2.1 Fourier-Borel 変換

定義 2.5 (Fourier-Borel 変換). 解析的汎関数 $T \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)'$ に対してその Fourier-Borel 変換 $\hat{T} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ を

$$\hat{T}(\zeta) = \langle T, e^{z\zeta} \rangle_z$$

で定める.

このとき, 次の二つの定理が基本的である.

定理 2.6 (Polya-Ehrenpreis-Martineau). \hat{T} は指数型整関数になる. 詳しくは, T が凸コンパクト集合 K で支持されるとき, \hat{T} は次の評価を持つ.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \forall \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad \left| \hat{T}(\zeta) \right| \leq C_\varepsilon \exp(H_K(\zeta) + \varepsilon |\zeta|) \quad (1)$$

ここで, 次の式

$$H_K(\zeta) := \sup_{z \in K} \operatorname{Re}(z\zeta)$$

で定義される H_K は K の支持関数と呼ばれる. 逆に, (1) を満たす整関数は, K で支持される解析的汎関数の Fourier-Borel 変換であらわされる.

さて, 整関数 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ と凸コンパクト集合 $K \subset \subset \mathbb{C}^n$ に対して

$$\|f\|_K := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}^n} |f(\zeta)| \exp(-H_K(\zeta))$$

$$X_K := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n); \|f\|_K < +\infty\}$$

とする. 以下, K は凸コンパクト集合, $U \subset \mathbb{C}^n$ は凸開集合として,

$$\operatorname{Exp}^K := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n); \forall L \supset \supset K, \|f\|_{L^\varepsilon} < +\infty\} = \varprojlim_{L \supset \supset K} X_L$$

$$\operatorname{Exp}^0 := \operatorname{Exp}^0$$

$$\operatorname{Exp}^U := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n); \exists K \subset \subset U, \|f\|_K < +\infty\} = \varinjlim_{K \subset \subset U} X_K$$

$$\operatorname{Exp} := \operatorname{Exp}^{\mathbb{C}^n}$$

と定める. このとき, Exp^K は (FS)-空間に, Exp^U は (DFS)-空間になる.

定理 2.7. Fourier-Borel 変換は線形位相同型

$$\mathcal{O}(U)' \rightarrow \operatorname{Exp}^U$$

$$\mathcal{O}(K)' \rightarrow \operatorname{Exp}^K$$

とくに

$$\mathcal{O}'_0 \rightarrow \operatorname{Exp}^0$$

$$\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)' \rightarrow \operatorname{Exp}$$

を引き起こす.

さて, Fourier-Borel 変換によってたたみ込みは掛け算になる.

命題 2.8. 解析的汎函数 S, T に対して

$$(S * T)^\wedge = \hat{S} \cdot \hat{T}.$$

証明.

$$\begin{aligned} (S * T)^\wedge(\zeta) &= \langle S * T, e^{z\zeta} \rangle_z \\ &= \langle S, T^\vee * e^{z\zeta} \rangle_z \\ &= \langle S, \langle T^\vee, e^{(z-w)\zeta} \rangle_w \rangle_z \\ &= \langle S, \langle T, e^{(z+w)\zeta} \rangle_w \rangle_z \\ &= \langle S, \langle T, e^{w\zeta} \rangle_w \cdot e^{z\zeta} \rangle_z \\ &= \langle S, \hat{T}(\zeta) \cdot e^{z\zeta} \rangle_z \\ &= \langle S, e^{z\zeta} \rangle_z \hat{T}(\zeta) \\ &= \hat{S}(\zeta) \hat{T}(\zeta) \end{aligned}$$

□

上の定理と命題から, 作用素

$$T^* : \mathcal{O}(U + (-K)) \rightarrow \mathcal{O}(U)$$

の転置写像

$$T^{\vee*} : \mathcal{O}(U + (-K))' \leftarrow \mathcal{O}(U)'$$

を線形位相空間の間の連続線形作用素として調べるには, 指数型整函数の空間の間の掛け算作用素

$$\hat{T}^{\vee*} : \text{Exp}^{U+(-K)} \leftarrow \text{Exp}^U$$

を調べればよいことがわかる. ただし, $\hat{T}^{\vee*} = (T^{\vee})^\wedge$ に注意する.

例 2.9. コンパクト台の超函数 $\mu \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^n)$ の場合, μ は $\text{supp } \mu$ の凸包で支持される. このときは, 台の凸包が μ を支持する凸コンパクト集合の最小となる. 台が原点のみのとき, μ^* は定数係数の無限階微分作用素となる.

例 2.10. $n = 2$ とする. 函数 $f(\zeta) = \cosh(2\sqrt{\zeta_1\zeta_2})$ は指数型整函数なので, ある解析的汎函数 T の Fourier-Borel 変換になる. このとき, $r_1 r_2 = 1$ をみたす任意の $r_1 > 0, r_2 > 0$ に対し, T は $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1| \leq r_1, |z_2| \leq r_2\}$ で支持されるが, これらの共通部分 $\{0\}$ では支持されない. つまり, T を支持する最小の凸コンパクト集合は存在しない.

3 たたみ込み作用素の全射性

ここでは, たたみ込み作用素の全射性, つまりたたみ込み方程式の可解性について調べる.

3.0 準備

$K \subset \mathbb{C}^n$ は凸コンパクト集合, $U \subset \mathbb{C}^n$ は凸開集合とし, $T \in \mathcal{O}(K)'$ によるたたみ込み作用素

$$T_* : \mathcal{O}(U + (-K)) \rightarrow \mathcal{O}(U)$$

を特に P_U と書く. P_U は (FS)-空間の間の線形連続作用素であり, このとき P_U の転置作用素

$${}^t P_U : \mathcal{O}(U)' \rightarrow \mathcal{O}(U + (-K))'$$

は (DFS)-空間の線形連続作用素になる. そして線形位相空間の一般論から

定理 3.1. P_U が全射であることと ${}^t P_U$ が単射かつ値域が閉であることは同値.

たたみ込み作用素の場合, 転置の Fourier-Borel 変換をとって

$$\hat{T}^\vee : \text{Exp}^U \rightarrow \text{Exp}^{U+(-K)}$$

という掛け算作用素を考えるが, この単射性は (整函数の掛け算なので) $T \neq 0$ である限り成り立つ. 閉値域性については,

命題 3.2. 上の T ($T \neq 0$) が, 任意の $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ に対して,

$$\hat{T}^\vee \cdot f \in \text{Exp}^{U+(-K)} \Rightarrow f \in \text{Exp}^U$$

をみたせば, \hat{T}^\vee の値域は閉.

が成り立つ.

以上の議論から, $U = \mathbb{C}^n$ の場合, あるいは $K = \{0\}$ の場合は, たたみ込み作用素の全射性は常に成り立つことがわかる.

系 3.3. 任意の 0 でない解析的汎函数 T に対して,

$$T_* : \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$$

は全射.

系 3.4 (河合 [3]). $\text{supp } T = \{0\}$ ならば, 任意の凸開集合 U に対して

$$T_* : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U)$$

は全射.

どちらも前の命題と函数論における Lindelöf の結果 (Levin [5] 参照) から得られる. さらに, growth indicator に関する進んだ議論から,

定理 3.5. $T \in \mathcal{O}(K)'$ で, \hat{T} の growth indicator が h_K に等しく, かつ *completely regular growth* ならば

$$T^* : \mathcal{O}(U + (-K)) \rightarrow \mathcal{O}(U)$$

は任意の U に対して全射. 逆に, 有界で *strictly convex* で C^2 -境界をもつ U に対して上の作用素が全射ならば, \hat{T} は growth indicator が h_K に等しく, *completely regular growth* である.

という結果がある. growth indicator や *completely regular growth* (多変数の場合) などの用語や, この定理については Lelong-Gruman [4] (特に 9 章 7 節) や Morzakov [7] を参照のこと.

3.1 管状領域上の全射性

前節の結果, $U = \mathbb{C}^n$, あるいは有界, *strictly convex*, C^2 -境界をもつ U という場合には全射性に関する問題はクリアになったが, 実の方程式への応用を考えると, 例えば \mathbb{R}^n 不変な領域, つまり管状領域での問題を考えることが重要ではないかと考えられる. この節ではおもに [2] の管状領域での可解性の結果を紹介しよう.

まず, 河合 [3] によって導入された次の条件 (S) を考える.

定義 3.6. 指数型整函数 f が, \mathbb{R}^n 内の凸コンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ によって $f \in \text{Exp}^K$ となっているとする. (すなわち, K で支持される解析的汎函数の Fourier-Borel 像となっている). このとき, f が条件 (S) をみたすとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある定数 $N > 0$ が存在し, $|\eta| > N$ をみたす任意の $\eta \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|\zeta - \sqrt{-1}\eta| < \varepsilon|\eta|, \quad |f(\zeta)| \geq e^{|\eta|}$$

となる $\zeta \in \mathbb{C}^n$ が存在することと定義する.

このとき, 次の division lemma が得られ, その直接の系として条件 (S) が全射性のための十分条件となることがわかる.

補題 3.7. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は凸領域で, $U = \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Omega \subset \mathbb{C}^n$ とする. f が (S) をみたすならば,

$$g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n), fg \in \text{Exp}^U \Rightarrow g \in \text{Exp}^U$$

が成り立つ.

系 3.8. T はコンパクト台をもつ *hyperfunction* とする. \hat{T} が条件 (S) をみたせば, 任意の凸領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して,

$$T^* : \mathcal{O}(\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Omega)$$

は全射.

逆に必要性については,

定理 3.9. T はコンパクト台をもつ *hyperfunction*, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は C^2 -境界をもつ有界凸領域とする.

$$T_*: \mathcal{O}(\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Omega) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Omega)$$

が全射ならば, \hat{T} は条件 (S) をみたす.

がいえる.

この定理から, 問題 1.3 に対して, 1 次元の場合だけだが一步前進することができる.

系 3.10. μ を \mathbb{R} 上のコンパクト台をもつ *hyperfunction* とする. このとき,

$$\mu_*: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

が全射になることと, $\hat{\mu}$ が条件 (S) をみたすこととは同値.

証明. $C_+ = \mathbb{R} \times \sqrt{-1}\mathbb{R}_+$ を上半平面, $C_- = \mathbb{R} \times \sqrt{-1}\mathbb{R}_-$ を下半平面, また $U_+ = \mathbb{R} \times \sqrt{-1}\{y > -1\}$, $U_- = \mathbb{R} \times \sqrt{-1}\{y < 1\}$, $U = \mathbb{R} \times \sqrt{-1}\{-1 < y < 1\}$ とする. このとき横 2 行が完全で第 1 列が全射であるような, 2 つの可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(C) & \longrightarrow & \mathcal{O}(C_+) \oplus \mathcal{O}(C_-) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow 0 \\ & & \mu_* \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(C) & \longrightarrow & \mathcal{O}(C_+) \oplus \mathcal{O}(C_-) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

および

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(C) & \longrightarrow & \mathcal{O}(U_+) \oplus \mathcal{O}(U_-) & \longrightarrow & \mathcal{O}(U) \longrightarrow 0 \\ & & \mu_* \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(C) & \longrightarrow & \mathcal{O}(U_+) \oplus \mathcal{O}(U_-) & \longrightarrow & \mathcal{B}(U) \longrightarrow 0 \end{array}$$

が得られる. これらから長完全列を作れば, 最初の可換図式から

- μ_* の $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対する作用が全射
- μ_* の $\mathcal{O}(C_{\pm})$ のそれぞれに対する作用が全射

の 2 つが同値であることがわかり, 次の可換図式から

- μ_* の $\mathcal{O}(U)$ に対する作用が全射
- μ_* の $\mathcal{O}(U_{\pm})$ のそれぞれに対する作用が全射

の 2 つの同値性がわかる. ここで, 純虚方向の平行移動を用いれば $\mathcal{O}(C_{\pm})$ 上の全射性と $\mathcal{O}(U_{\pm})$ 上の全射性とが同値であることがわかり, また U が定理 3.9 の領域の形をしていることから $\mathcal{O}(U)$ に対する全射性は条件 (S) と同値. 以上から, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対する全射性と (S) とが同値であることがいえた. \square

4 齊次方程式の解の延長

やはり管状領域上で、齊次方程式

$$T * u = 0$$

を考えよう。ここで、 T はコンパクト台の hyperfunction である。考える問題は、

問題 4.1. \mathbb{R}^n 内の包含写像 $\Omega \subset \Omega'$ に対し、 $\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Omega$ で定義されたすべての解が、 $\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Omega'$ に延びているだろうか？

いま、 T は固定し、解のなす空間を

$$\text{Sol}(\Omega) := \{u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Omega); T * u = 0\}$$

と書くと、

問題 4.2. \mathbb{R}^n 内の包含写像 $\Omega \subset \Omega'$ に対し、制限写像 $\text{Sol}(\Omega') \rightarrow \text{Sol}(\Omega)$ は全射か？

と言い換えられる。この節ではおもに [2] の管状領域での解の延長の結果を紹介しよう。

注意 4.3. (1) 1次元で方程式が(有限階の)定数係数常微分方程式(で0でないもの)ならば、解は指数多項式で表現できるので、どんな解もすべて \mathbb{C}^n 上に延長される。

(2) 一方、無限階の場合や偏微分(多次元)の場合のはびない場合もある。

(3) 一般の場合でも、任意の Ω に対して指数多項式解のなす空間が $\text{Sol}(\Omega)$ 内で稠密であることが知られている ([2, Lemma 4.1] および Malgrange [6] 参照)。したがって、制限写像 $\text{Sol}(\Omega') \rightarrow \text{Sol}(\Omega)$ の像はもちろん稠密である。

さて、以下 $T \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^n)$, \hat{T} は条件 (S) をみたすする。

まず、 $T*$ の特性集合 $\text{Char}(T*) \subset S^{n-1} = \{\eta \in \mathbb{R}^n, |\eta| = 1\}$ を定義する。⁹

定義 4.4. $\eta \in S^{n-1}$ が $\text{Char}(T*)$ に含まれるとは、ある点列 $\{\zeta_n\}_n \subset \mathbb{C}^n$ で、

$$\begin{aligned} \hat{T}(\zeta_n) &= 0 \quad \text{for any } n, \\ |\zeta_n| &\rightarrow \infty \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \\ \zeta_n/|\zeta_n| &\rightarrow \sqrt{-1}\eta \quad \text{as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

をみたすものが存在することと定める。

すると $\text{Char}(T*)$ は S^{n-1} の閉部分集合となる。また定数係数無限階微分作用素に対しては、青木 [1] による定義と一致する。また、

定義 4.5. 凸領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 $\text{Char}(T*)$ に関する Ω の極包 (polar enveloping) $\langle \Omega \rangle_T$ を、

$$\langle \Omega \rangle_T := \text{the interior of } \bigcap_{\eta \in \text{Char}(T*)} \{y \in \mathbb{R}^n; y\eta < \sup_{y' \in \Omega} y'\eta\}$$

と定める。さらに管状領域 $U = \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Omega$ に対して、その極包 $\langle U \rangle_T$ を、 $\langle U \rangle_T := \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\langle \Omega \rangle_T$ と定める。

⁹この定義は [2] の定義と異なる。条件 (S) の下で両者が一致することについては [9] 参照。といっても参照できないが…

注意 4.6. $\langle U \rangle_T$ は U を含む開集合であり,

$$\forall L \subset \subset \tilde{U}, \exists K \subset \subset U \text{ such that } H_L(-\sqrt{-1}\eta) \leq H_K(-\sqrt{-1}\eta) \text{ for } \forall \eta \in \text{Char}(T^*)$$

をみたす \tilde{U} の最大である.

このとき, 次の結果を得る.

定理 4.7. $T \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^n)$ は \hat{T} が条件 (S) をみたすものとする. 任意の管状領域 U に対し, 制限写像

$$\text{Sol}(\langle U \rangle_T) \rightarrow \text{Sol}(U)$$

は全射.

この定理は, 次の除法問題の系である.

補題 4.8. 任意の $p \in \text{Exp}^{(U)T}$ に対し, ある $q \in \text{Exp}^{(U)T}$ および $r \in \text{Exp}^U$ が存在して

$$p = \hat{T}^V \cdot q + r$$

が成り立つ.

定理 4.7 の補題 4.8 への帰着. 凸管状領域の包含写像 $U \subset V$ に対し, 横 2 行が完全な可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Sol}(V) & \longrightarrow & \mathcal{O}(V) & \xrightarrow{T^*} & \mathcal{O}(V) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Sol}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}(U) & \xrightarrow{T^*} & \mathcal{O}(U) \longrightarrow 0 \end{array}$$

を考えると, 縦 3 列の制限写像はすべて単射で稠密像をもつ. したがって第 1 列が全射であることと同型であることが同値. Fourier-Borel 変換して双対をとれば, 横 2 行が完全, 縦 3 列は単射の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \text{Sol}(V)' & \longleftarrow & \text{Exp}^V & \xleftarrow{\hat{T}^V} & \text{Exp}^V \longleftarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longleftarrow & \text{Sol}(U)' & \longleftarrow & \text{Exp}^U & \xleftarrow{\hat{T}^V} & \text{Exp}^U \longleftarrow 0 \end{array}$$

を得るから, 定理の結論は第 1 列が同型であること, すなわち第 1 列が全射であることと同値である.

さて, $V = \langle U \rangle_T$ の場合, $\text{Sol}(V)'$ の任意の元を $q \in \text{Exp}^V$ で代表させて $[p]$ と書けば, 補題より $q \in \text{Exp}^V$ および $r \in \text{Exp}^U$ が存在して $p = \hat{T}^V \cdot q + r$ となるから,

$$[p] = [\hat{T}^V q] + [r] = [r]$$

となり, $[p]$ が $[r] \in \text{Sol}(U)'$ に等しいことがいえた. \square

参考文献

- [1] Aoki T., *Existence and continuation of holomorphic solutions of differential equations of infinite order*, Adv. in Math., **72** (1988) 261–283.
- [2] Ishimura R., and Y. Okada, *Existence and continuation of holomorphic solutions for convolution equations in tube domains*, Bull. Soc. Math. Fr., **122** (1994) 413–433.
- [3] Kawai T., *On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., **17** (1970) 467–517.
- [4] Lelong P., and L. Gruman, *Entire functions of several complex variables*, Grund. der Math., **282** Springer-Verlag (1986).
- [5] Levin B. Ja., *Distributions of zeros of entire functions*, Trans. Math. Mono. AMS **5** (1964).
- [6] Malgrange B., *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **6**(1955–1956) 271–354.
- [7] Morzhakov V. V., *Convolution equations in spaces of functions holomorphic in convex domains and on convex compacta in \mathbb{C}^n (Russian)*, Mat. Zametki, **16** (1974), 431–440. English translation: Soviet Math. Notes **16** (1974) 846–851.
- [8] Okada Y., *Solvability of convolution operators*, Publ. RIMS. Kyoto Univ., **30** (1994) 167–190.
- [9] Okada Y., *On the characteristics for convolution equations in tube domains*, not published.