

3次元オイラー方程式の解の発散について

原 研 跡 部 隆 (Takashi Atobe)

原 研 蕪 木 英 雄 (Hideo Kaburaki)

電 通 大 細 川 巖 (Iwao Hosokawa)

1 はじめに

流体の運動の様子は、完全流体についてはオイラー方程式、ニュートン流体についてはナビエ・ストークス方程式でそれぞれ記述される。しかしこれらの方程式は強い非線形性を持っており、一般にはその解析解を求めることは困難である。そのため、解を求めるためには流れ場に何らかの近似を用いるか、あるいは計算機で数値的に求めるのが普通である。

ところがこれらの方程式が本当に解を持ち得るのかどうか、という疑問が数学者、物理学者の間で現在も未解決のまま存在している。つまり、これらの方程式で物理量の時間発展を追跡した場合、この物理量が有限時間内に発散するのではないか、という疑問が今だに残っているのである。

2次元非圧縮流については、そもそもの性質から解析性は保たれることが知られている。また、粘性を含む3次元非圧縮流についても、弱解ではあるがその解析解が存在することがわかっており、解析性はあると信じられている。ところが理想流体になると、その解析性については全くわかっていないのが実状である。

理論的には Frisch らが analyticity strip という概念を用いて有限時間内の発散を示唆している^{1,2)}。しかしながらテイラー・グリーン渦にこのアイデアを適用した結果は特異性の存在を示すものではなかった。一方ではその存在の可能性を示唆する結果もあり⁴⁻⁸⁾、なかでも Kerr は、ある特殊な初期渦度場についてはエンストロフィーの発散は対数的であるとしている⁸⁾。

そこで我々は初期にランダムな流れ場を持つ非圧縮流における特異性の存在を、直接数値シミュレーション (DNS) によって詳細に調べ、同時に同じ初期条件の下で計算した粘性流との比較も行なった。これにより、乱流の発達段階における粘性の役割が定性的に理解された。

2 計算手法

本研究における数値計算は、一様性、等方性のみを仮定して3次元オイラー方程式を直接的に解く、直接数値シミュレーション法によって行なわれた。基礎方程式は以下のようなになる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (+ \nu \nabla^2 \mathbf{u}), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

数値計算における境界条件は、一様性、等方性の仮定から、周期境界条件を採用した。このように空間構造が周期性を持つことから、空間積分に関してはフーリエ・スペクトル法を用いた。このとき、フーリエモード数（格子点数）は 256^3 個とし、FFTに伴うエイリアジングエラーについては3/2則を併用した。

時間積分に関しては、4次精度のルンゲ・クッタ法を用いた。またこのときの時間きざみは0.001で、これは十分な精度を保証する値であることを予備計算で確認している。

初期条件、つまり初期流れ場は、フーリエ空間におけるエネルギースペクトル密度が次式で与えられるような典型的な流れ場を選んだ。

$$E(k, 0) = Ak^4 \exp[-2k^2], \quad (A : \text{constant}). \quad (3)$$

ここで、 $E(k, t)$ は、

$$E(k, t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{|\mathbf{k}|=k} |\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)|^2, \quad (4)$$

で定義され、 $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t)$ は速度のフーリエ成分であり、その位相は乱数によって正規分布で与えられた。

比較のために計算されたナビエ・ストークス乱流についてのDNSでは、動粘性係数 ν を0.001とし、それ以外の初期流れ場、計算手法などの条件はオイラー乱流の場合と同じにした。この粘性乱流において定義できるレイノルズ数を以下のように表す。

$$Re \equiv \frac{U_0}{\nu k_0}. \quad (5)$$

ここで U_0, k_0 はそれぞれ代表速度、代表波数である。代表波数については(3)式が $k=1$ でピークを持つことから $k_0=1$ とする。代表速度については U_0

を次のように定義して,

$$U_0 \equiv \sqrt{2 \int E(k, 0)}, \quad (6)$$

さらに $E(k, 0)$ を $\sqrt{2 \int E(k, 0)} = 1$ のように規格化すると, 初期レイノルズ数 Re は以下のようなになる.

$$Re = 1/\nu = 1000. \quad (7)$$

また、乱流場が十分発達した状態でのテイラーのマイクロスケール λ に基づくレイノルズ数, Re_λ は約 110 である. ここで λ は,

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{5 \int E(k, t) dk}{\int k^2 E(k, t) dk}}, \quad (8)$$

である.

3 計算結果

Fig.1 にエネルギー $E(k, t)$ とエンストロフィー $\frac{1}{2} \langle |\omega(\mathbf{k}, t)|^2 \rangle$ の時間発展の様子を表す. ここで $\omega(\mathbf{k}, t)$ は渦度である. この図を見ると, エネルギーはかなりの精度で一定の値を示しており, このことは本 DNS の有効性を保証している. またエンストロフィーについては, 同じ条件の下で時間発展させた粘性流のものも示している. この二つの曲線は, $t = 3$ くらいまではほとんど同様な時間発展を示すが, それ以降は全く別々に発展していく. 特に非粘性流のエンストロフィーは急激に増大していくことがわかる. これは非粘性流における渦度場が激変していることを表しており, 解の発散をうかがわせる. ただし, この図からだけではエンストロフィーの有限時間内の発散が起こるか否かははっきりしない.

エネルギースペクトルの時間発展の様子は, Fig.2 に表されている. $t = 0$ において, エネルギーは低波数側に局在しており, 時間発展とともにより高波数側に流れていく, いわゆるエネルギーカスケードが起こっていることがわかる. しかし, ある時刻, $t = 4$ を過ぎるころになると, スペクトルの形は徐々に右上がりになってきている. これは, 本 DNS がスペクトル法を用いており, このスペクトル法におけるトランケーションの影響が出ているのである. また傾きが 2 であることは, 有限波数空間内でのエネルギー等分配が起こっていることを示す. したがって, 本 DNS の結果は, この等分配が現

れる前、つまり少なくとも $t = 4$ 以前のものが物理現象として信頼できる範囲である。

しかしこの計算の信頼性については、厳密にはより精緻な解析が必要となる。つまり、各時刻におけるエネルギースペクトルの形が高波数側で、ある関数形にのることが知られており、スペクトルがこの関数にのっている間は信頼できる、とするものである。ここでいうある関数というのは次のようなものである。

$$E(k, t) = c(t)k^{-n(t)}e^{-2\delta(t)k}. \quad (9)$$

ここで $c(t), n(t)$ は任意関数である。特に重要なのは $\delta(t)$ で、これは analyticity strip と呼ばれ、計算対象の最小スケールを表すとされている。したがってこの $\delta(t)$ が数値計算の最小メッシュ以上であれば計算結果が有効であると考えていいことになる。粘性流の場合は、普通計算格子数（自由度の大きさ）に対応するレイノルズ数以下の流れ場を扱えば、計算結果には問題がないとされるが、非粘性流の場合、このレイノルズ数が定義できないので $\delta(t)$ を一つの指標にするのである。

Fig.3 はこの $\delta(t)$ の時間発展を示したもので (×印), 図中点線が最小メッシュスケール (Δx), 波線が $2\Delta x$ を表している。したがって、この図からは $t \simeq 2$ が本 DNS の限界を示していると考えられる。

ここで渦度場の時間発展の様子を考える。これまでの議論から、流れ場の解析は $t \simeq 2$ までにするのが妥当であるが、これはあくまでも最小スケールについての議論なので、それ以上大きなスケールを見る場合はもう少し先の時刻まで有効であると考ええる。そこでエネルギースペクトルの定性的な判断も踏まえて、ここでは $t = 4.5$ までの時間発展を解析した。さらに比較のため、粘性流についての同様な解析も行なった。その結果が Fig.4 である。非粘性流、粘性流の、それぞれ $t = 1.5, 2.5, 3.5, 4.5$ における渦度の様子を示した。ここで、これらの図は全計算領域の $1/64$ 部分空間を示しており、また渦度場の可視化はエンストロフィーの約 3 倍の等値面を用いている（ただしこの閾値は各図でそれぞれ異なっている）。これらの図を見ると、非粘性流については $t = 2$ を越えるとさすがに細かい所で破綻が生じ始めているが、全体的な構造としては $t = 3.5$ までは粘性流とほぼ合っている。このように、粘性流も非粘性流も、ごく初期においては全く同じ時間発展をしていくことがわかる。またその後の発展はそれぞれのケースで異なっている。粘性流の

場合は、粘性の影響からあるスケールより大きな範囲で空間構造の変化が進んでいくのに対し、非粘性流の場合は空間構造がどんどん小さなスケールに発達していくことがわかる。このことは、非粘性流におけるバースト、つまりオイラー方程式の特異性と深く関係していると思われる。

このオイラー方程式の特異性についてももう少し議論してみる。高波数側におけるエネルギースペクトルの関数形 (9) 式にある $\delta(t)$ は、系の最小スケールを表すとともに、特異点と実軸との距離を示すものと考えられている。この $\delta(t)$ の時間発展は、

$$\delta(t) = \delta_0 e^{-t/T}, \quad (10)$$

であると考えられている。したがって、仮にこの式によって $\delta(t)$ が時間発展するとなると、 $\delta(t) = 0$ になるには無限の時間を要することになり、つまりは解の有限時間内の発散は起こり得ないことになる。しかし我々の結果、Fig.3 をみると、 $t \simeq 1.7$ 付近から明らかに単純な指数関数（直線）からはずれていくことがわかる。これは解の有限時間内の発散を示唆するものである。しかしながらこの直線からはずれている部分は最小メッシュと同程度であり、この結果をそのまま信頼するのは危険である。結局我々の DNS の結果は、解の発散の可能性を示唆するに留まるものでしかない。

4 おわりに

本研究は、一様、等方性を持つオイラー方程式の解の発散について調べるため、フーリエ・スペクトル法を用いて直接数値シミュレーションを行い、解の振舞い、渦度の時間発展の様子などを粘性流との比較をしながら解析したものである。

その結果、粘性流、非粘性流ともに、ごく初期においては全く同じ時間発展を示すことがわかった。またその後の発展は、粘性流があるスケールまで空間構造の発展をおさえられるのに対し、非粘性流は空間構造が時間とともにどんどん小さくなっていき、比較的早い段階で計算の有効メッシュ長さを越えてしまうことがわかった。

解の発散については、analyticity strip の概念を用いて解析した結果、本研究の精度では残念ながらその可能性を示唆するに留まるものであった。これについてはより大きな格子数を用いて計算を行なうか、あるいは格子の大

きさに依存しないような, 何か別な指標を導入する必要がある.

参考文献

- [1] U.Frisch and R.Morf "Intermittency in nonlinear dynamics and singularities at complex time," *Phys.Rev.A* 23, no.5, 2673 (1981).
- [2] C.Sulem and P-L.Sulem and H.Frisch "Tracing Complex Singularities with Spectral Methods," *J.Comp.Phys.vol.50*, 138 (1983).
- [3] M.Brachet, D.I.Meeron, S.A.Orszag, B.G.Nickel, R.H.Morf and U.Frisch "Small-scale structure of the Taylor-Green vortex," *J.F.M. vol.130*, 411 (1983).
- [4] J.T.Beale, T.Kato and A.Majda "Remarks on the Breakdown of Smooth Solutions," *Commun.Math.Phys. vol.94*, 61 (1984).
- [5] A.Pumir and E.D.Siggia "Vortex dynamics and the existence of solutions to the Navier-Stokes equations," *Phys.Fluid vol30(6)*, 1606 (1987).
- [6] K.R.Sreenivasan and C.Meneveau "Singularities of the equations of fluid motion," *Phys.Rev.A vol.38 no.12*, 6238 (1988).
- [7] R.M.Kerr "Evidence for a singularity of the three-dimensional, incompressible Euler equations," *Phys.Fluids A 5 (7)*, 1725 (1993).
- [8] A.Pumir and E.D.Siggia "Collapse solutions in the 3-D Euler equations," 'Topological Fluid Mechanics' eds.H.K.Moffat and A.Tsinober, *Camb.Univ.Press,(1990)*, pp.469-477

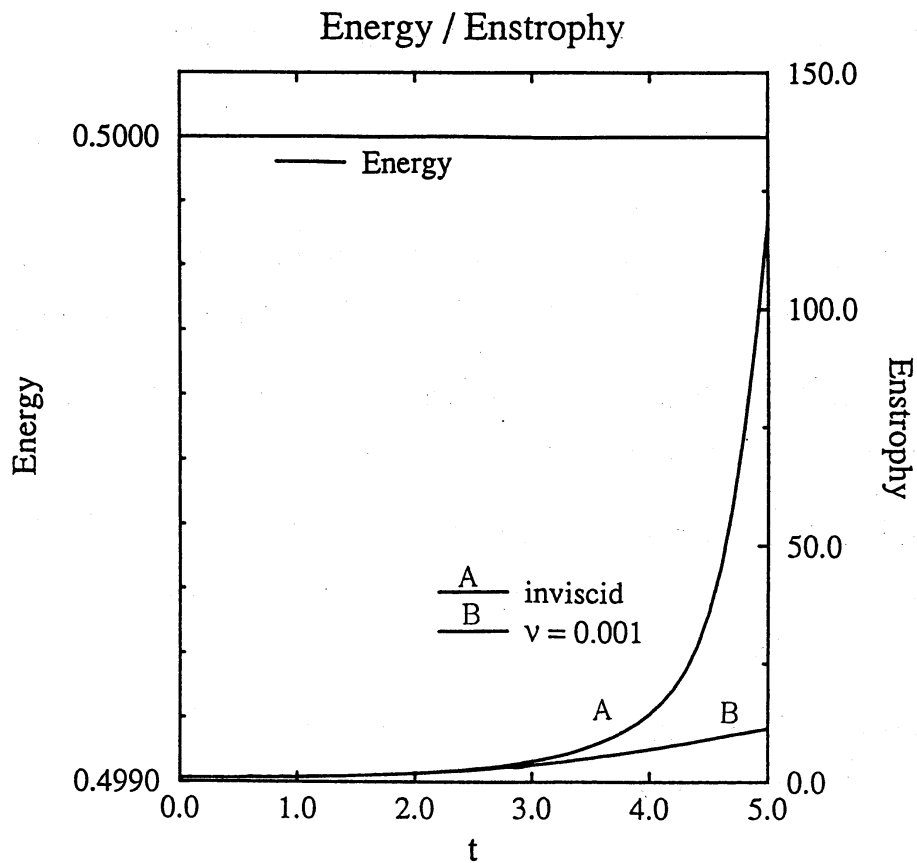


Fig.1 Time development of energy and enstrophy.

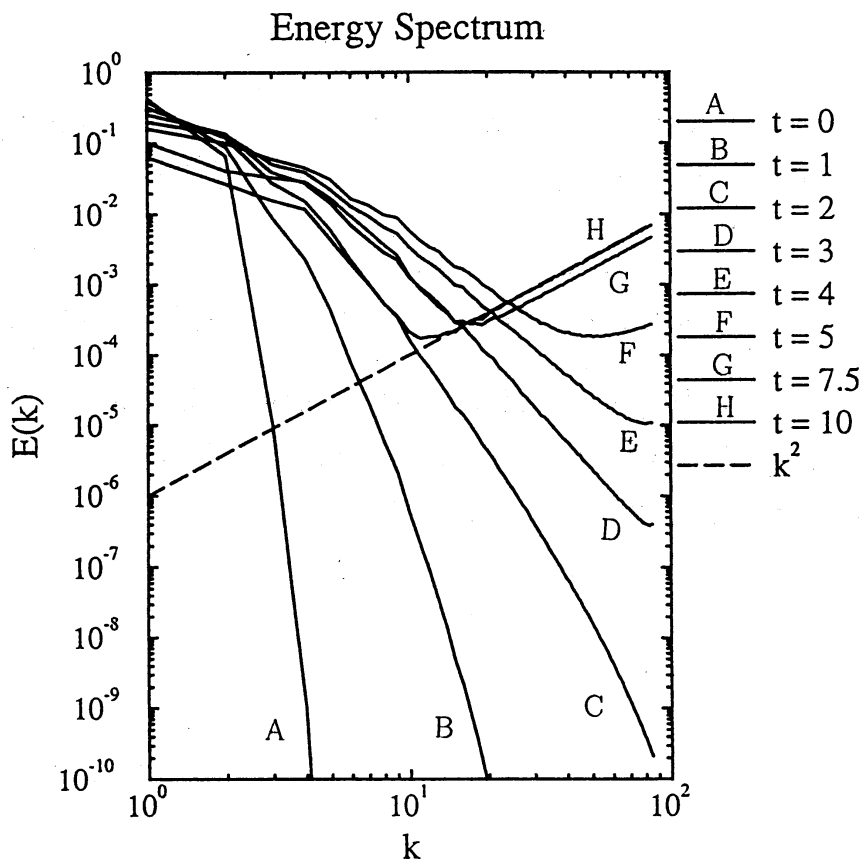


Fig.2 Time development of energy spectrum.

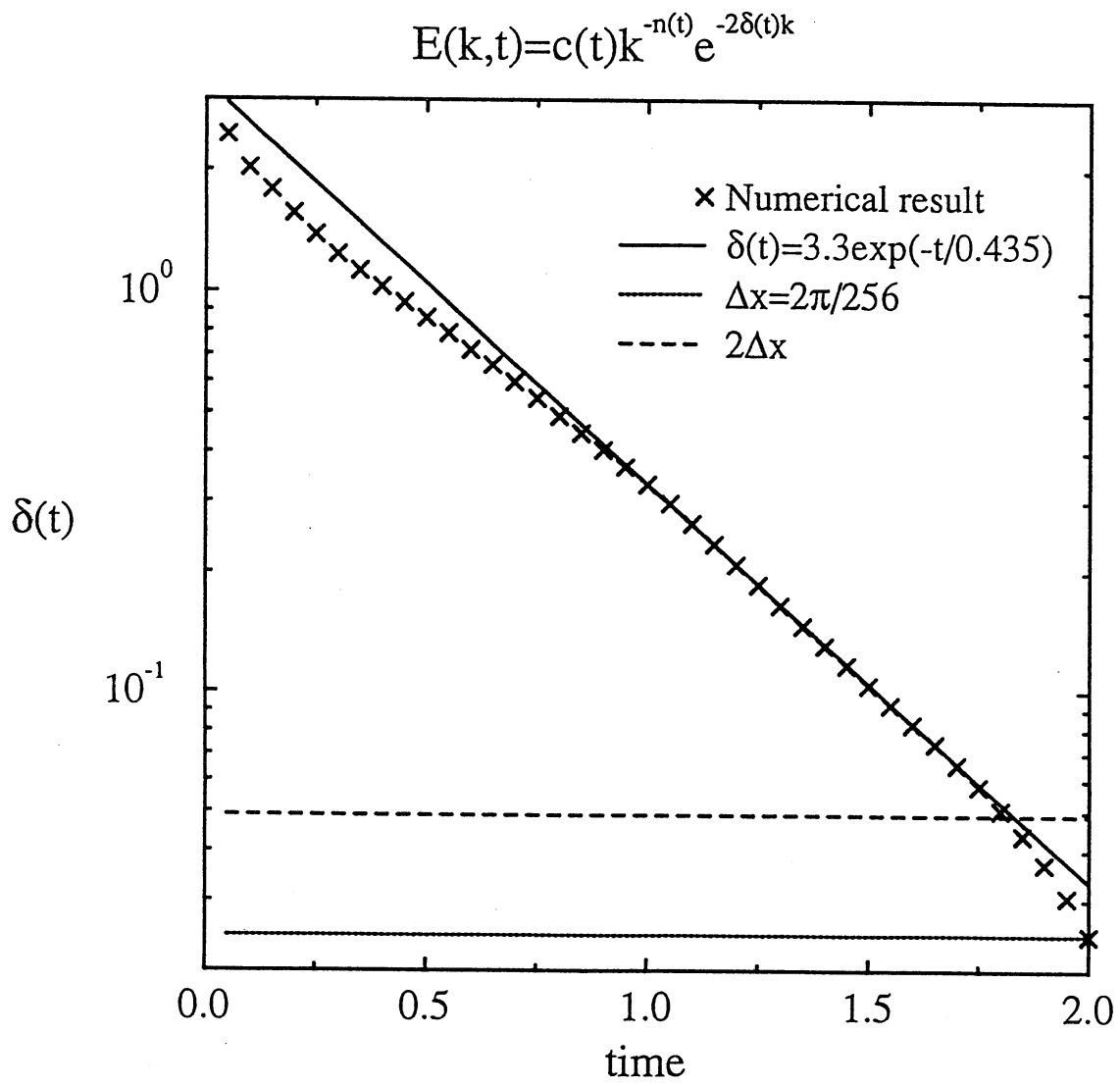


Fig.3 Time development of analyticity strip, $\delta(t)$.

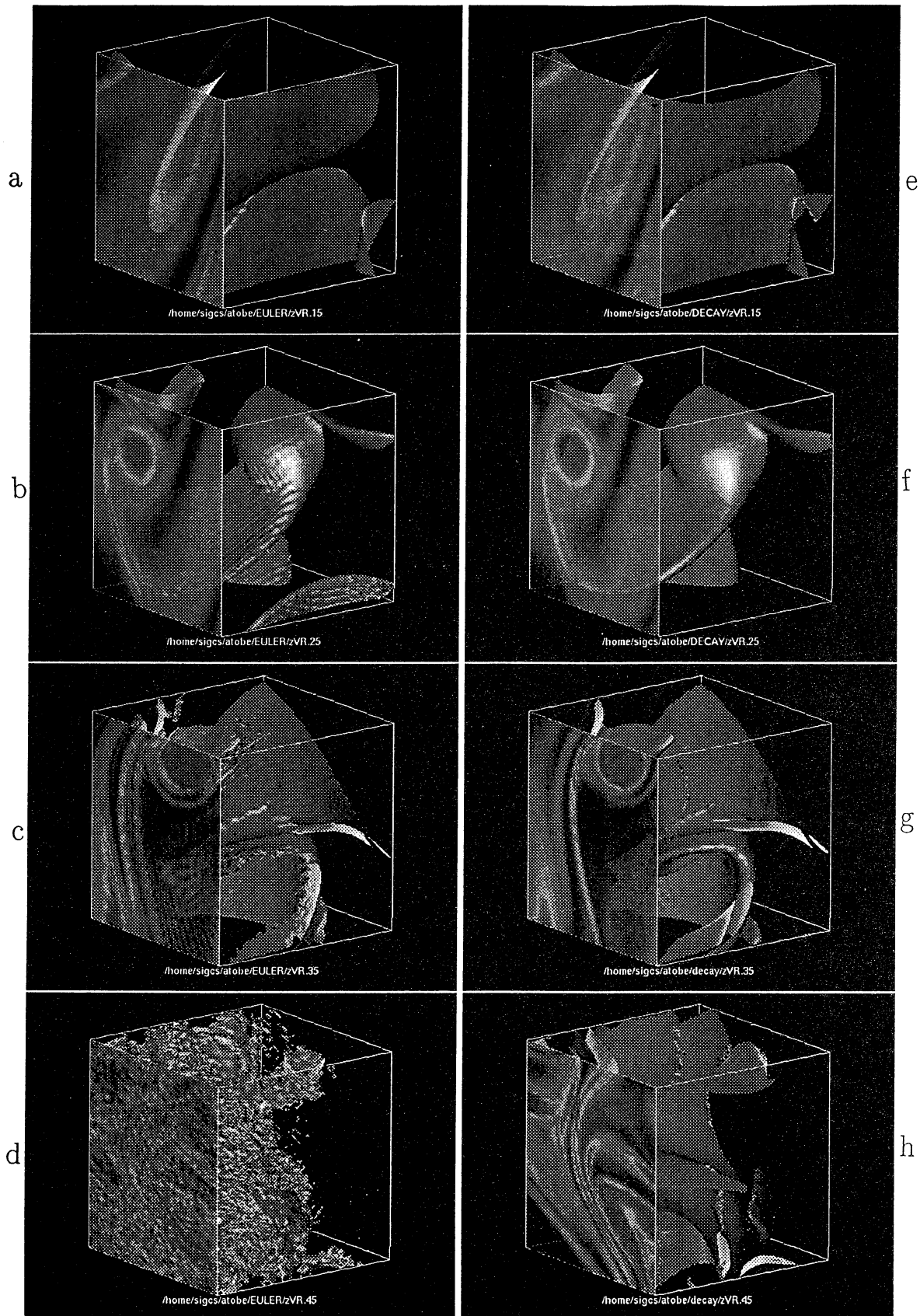


Fig.4 Time development of contour surface of the vorticity, (a),(e), at $t=1.5$, (b),(f), at $t=2.5$, (c),(g), at $t=3.5$, and (d),(h) at $t=4.5$.