数理解析研究所講究録
1029 巻 1998 年 80-96

3 次元的微小撹乱に対する Hill の球形渦の応答

電機大理工　タシプラト・ロズ (Tashpulat Rozi)
電機大理工　福湯章夫 (Akio Fukuyu)

1　はじめに

非圧縮性，非粘性流体の渦運動として Hill の球形渦が知られている．Hill の渦に微小撹乱を与えた時の応答については，軸対称撹乱についての Moffatt-Moore の解析 [1] がある．この文献によると，初期に与えた撹乱によって渦領域が長円形に変形すると，後部淀み点付近から渦度を持つ流体が針のような形を形成しながら外部の渦無しの流れの中へ流出する．彼らは，これを spike と呼んだ．初期に偏円形にすると，後部淀み点付近から渦無しの流体が渦領域の内部へ流入していく．本論文では一般の 3 次元的な微小撹乱を与えた時の Hill の球形渦の応答を調べる．

2　発展方程式について

渦のの中心を原点 O とする流れの中に固定した球面極座標 (r, θ, ϕ) における Hill の球形渦の速度場 $\mathbf{u}_H = (u_H, v_H, 0)$ は，

$$u_H = \begin{cases} U\left(1 - \dfrac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta \equiv u_H^+, & (r > a) \\ -\dfrac{3}{2}U\left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right)\cos\theta \equiv u_H^-, & (r < a) \end{cases} \tag{2.1}$$

$$v_H = \begin{cases} -U\left(1+\dfrac{a^3}{2r^3}\right)\sin\theta \equiv v_H^+, & (r>a) \\ \dfrac{3}{2}U\left(1-\dfrac{2r^2}{a^2}\right)\sin\theta \equiv v_H^-, & (r<a) \end{cases} \tag{2.2}$$

によって与えられる．ここで，a は球形渦の半径を表わす，U は対称軸に対して平行に流れる遠方での一様流の速度を表している．ある初期時刻 $t=0$ の瞬間に，Hill の球形渦の表面 S に 3 次元的な微小撹乱が加えられたとする．以後の $S(t)$ $(t>0)$ を ϵ を微小パラメータとして，

$$r = a(1+\epsilon h(\theta,\phi,t)) \tag{2.3}$$

で表す．更に，渦表面 $S(t)$ の外部領域を Ω_+, 内部領域を Ω_-, として，$t>0$ における速度場 $\mathbf{u}$ を

$$\mathbf{u}(r,\theta,\phi,t) = \mathbf{u}_H(r,\theta) + \epsilon\mathbf{u}^{\pm}(r,\theta,\phi,t) \qquad \text{in } \Omega_{\pm} \tag{2.4}$$

の形に与える．ここに，$\mathbf{u}^{\pm}$ は撹乱の速度を表す．

以後，全ての物理量は球形渦の半径 a，無限遠方での一様流の速度 U, 流体の密度 ρ によって次のように無次元化されているものとする．

$$\frac{U}{a}t \to t, \quad \frac{r}{a} \to r, \quad \frac{\mathbf{u}}{U} \to \mathbf{u}, \quad \frac{p}{\rho U^2} \to p \qquad etc. \tag{2.5}$$

3 外部領域 Ω_+ における流れ

Hill の渦の摂動は，渦領域の外部から渦無しの微小撹乱を加えたことによるものと仮定する．それ故，外部領域 Ω_+ における乱された速度 $\mathbf{u}^+$ はポテンシャル流である．即ち，$\mathbf{u}^+$ は，速度ポテンシャル $\Phi(r,\theta,\phi,t)$ を用いて，

$$\mathbf{u}^+ = \mathrm{grad}\Phi \tag{3.6}$$

で与えられる．

極座標系では $\Phi(r,\theta,\phi,t)$ は球面調和関数を用いて次のように表される．

$$\Phi(r,\theta,\phi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A^e_{nm}(t)Y^e_{nm}(\theta,\phi)+A^o_{nm}(t)Y^o_{nm}(\theta,\phi))\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1} \tag{3.7}$$

ここで，

$$Y^e_{nm}(\theta,\phi)=\cos m\phi P^m_n(z),\ Y^o_{nm}(\theta,\phi)=\sin m\phi P^m_n(z),\ \ z=\cos\theta.$$

であり，$P^m_n(z)$ は Legendre の倍関数である．以下に，(3.7) 式右辺に含まれる方位角の波数 m を方位数と呼ぶことにする．

従って，領域 Ω_+ における乱された速度 $\mathbf{u}^+=(u^+,v^+,w^+)$ は，

$$\left\{\begin{array}{lll} u^+ = & \dfrac{\partial\Phi}{\partial r} & = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(n+1)A_{nm}Y_{nm}\left(\frac{1}{r}\right)^{n+2} \\ v^+ = & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} & = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}A_{nm}\frac{\partial Y_{nm}}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\right)^{n+2} \\ w^+ = & \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\phi} & = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{A_{nm}}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{nm}}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r}\right)^{n+2} \end{array}\right. \tag{3.8}$$

で与えられる．ここで簡単のために $A_{nm}(t)Y_{nm}(\theta,\phi)$ で，

$$A^e_{nm}(t)Y^e_{nm}(\theta,\phi)+A^o_{nm}(t)Y^o_{nm}(\theta,\phi)$$

を表わすことにする．

4　内部領域 Ω_- における流れ

軸対称的な変形の場合には，領域 Ω_- での乱された速度 $\mathbf{u}^-$ は渦無しの流れである．従って，外部領域と同様に速度ポテンシャルが存在するが，一般に，3次元的（即ち，非軸対称）な変形の場合には，$\mathbf{u}^-$ は渦運度となることが考えられる．それ故，内部

領域 Ω_- における流れを知るためには，3 次元 Euler 方程式を解く必要がある．

そこで，領域 Ω_- における圧力 $p(r,\theta,\phi,t)$ を，$p_H^-(r,\theta)$ を Hill の球形渦に対する圧力分布として，

$$p(r,\theta,\phi,t) = p_H^-(r,\theta) + \epsilon p^-(r,\theta,\phi,t) \tag{4.9}$$

の形に置く．ここに，p^- は撹乱に対応する圧力である．

ここで，領域 Ω_- における流れの場，

$$\mathbf{u}(r,\theta,\phi,t) = \mathbf{u}_H^-(r,\theta) + \epsilon \mathbf{u}^-(r,\theta,\phi,t), \quad p(r,\theta,\phi,t) = p_H^-(r,\theta) + \epsilon p^-(r,\theta,\phi,t) \tag{4.10}$$

を Euler の運動方程式

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad\ p}$$

に代入し，ϵ について 1 次のオーダーの量を取ると，

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^-}{\partial t} &= -3r\cos\theta u^- + \frac{3}{2r}(1-3r^2)\sin\theta v^- + \frac{3}{2}(1-r^2)\cos\theta\frac{\partial u^-}{\partial r}\\ &\quad -\frac{3}{2r}(1-2r^2)\sin\theta\frac{\partial u^-}{\partial\theta} - \frac{\partial p^-}{\partial r}\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v^-}{\partial t} &= -\frac{3}{2r}\sin\theta u^- + \frac{3r}{2}\cos\theta v^- + \frac{3}{2}(1-r^2)\cos\theta\frac{\partial v^-}{\partial r}\\ &\quad -\frac{3}{2r}(1-r^2)\sin\theta\frac{\partial v^-}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial p^-}{\partial\theta}\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w^-}{\partial t} &= \frac{3r}{2}\cos\theta w^- + \frac{3}{2}(1-r^2)\cos\theta\frac{\partial w^-}{\partial r} - \frac{3}{2r}(1-2r^2)\sin\theta\frac{\partial w^-}{\partial\theta}\\ &\quad -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p^-}{\partial\phi}\end{aligned} \tag{4.13}$$

を得る．但し，$\mathbf{u}^- = (u^-, v^-, w^-)$ である．また，　連続方程式は，

$$\frac{\partial u^-}{\partial r} + \frac{2u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v^-}{\partial\theta} + \frac{\cot\theta v^-}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w^-}{\partial\theta} = 0 \tag{4.14}$$

となる．ここで，(4.14) 式を考慮して，(4.11) ～ (4.13) 式から，$\dfrac{\partial u^-}{\partial t}, \dfrac{\partial v^-}{\partial t}, \dfrac{\partial w^-}{\partial t}$ なる項を消去することにより，撹乱圧力に対す

る方程式が，次のように得られる．

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p^-}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p^-}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p^-}{\partial\phi^2}=F(r,\theta,\phi) \quad (4.15)$$

ここで，$F(r,\theta,\phi)$ は，

$$F(r,\theta,\phi)=-12\sin\theta v^- - 9r\cos\theta\frac{\partial u^-}{\partial r}-3r\sin\theta\frac{\partial v^-}{\partial r}+12\sin\theta\frac{\partial u^-}{\partial\theta} \quad (4.16)$$

である．従って，u^-, v^-, w^-, p^- は (4.11) ∼ (4.13) 式，及び，(4.15) 式を同時に満足するように求めなくてはならない．

ここで，$\mathbf{u}^+$ に倣って，u^-, v^-, w^- および p^- についても，Ω_- で，球面調和関数 $Y_{nm}(\theta,\phi)$ を用いて，次のように展開する．

$$\begin{aligned}
u^-(r,\theta,\phi,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} u_{nm}(r,t)Y_{nm}(\theta,\phi), && (4.17)\\
v^-(r,\theta,\phi,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} v_{nm}(r,t)\frac{\partial Y_{nm}(\theta,\phi)}{\partial\theta}, && (4.18)\\
w^-(r,\theta,\phi,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{w_{nm}(r,t)}{\sin\theta}\frac{\partial Y_{nm}(\theta,\phi)}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r}\right)^{n+2}, && (4.19)\\
p^-(r,\theta,\phi,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} p_{nm}(r,t)Y_{nm}(\theta,\phi), && (4.20)
\end{aligned}$$

ここでも上のように $u_{nm}(r,t)Y_{nm}(\theta,\phi)$ を次のような式で表すことにする．

$$u_{nm}(r,t)Y_{nm}(\theta,\phi)=u^e_{nm}(r,t)Y^e_{nm}(\theta,\phi)+u^o_{nm}(r,t)Y^o_{nm}(\theta,\phi) \qquad etc.$$

(4.17), (4.18), (4.19), (4.20) 式を (4.11), (4.12), (4.13) 式へ代入し，得られた各々の方程式の両辺に $\cos m\phi$ あるいは $\sin m\phi$ を掛けて ϕ について $0 \sim 2\pi$ まで積分すると，$\partial u^e_{nm}/\partial t$ に対する方程式が得る（詳細については論文 [2] 参照）．

ここで，$\partial u^o_{nm}/\partial t$ に対しても，$\partial u^e_{nm}/\partial t$ と同じ形の方程式を満たすことに注意する．

次に，このようにして得られた各方程式に，Legendre の倍関数についての漸化式：

$$zP_n^m(z) = \frac{n-m+1}{2n+1}P_{n+1}^m(z)+\frac{n+m}{2n+1}P_{n-1}^m(z),$$

$$(1-z^2)\frac{dP_n^m(z)}{dz} = -\frac{n(n-m+1)}{2n+1}P_{n+1}^m(z)+\frac{(n+1)(n+m)}{2n+1}P_{n-1}^m(z).$$

を代入し，各々方程式の両辺に $P_n^m(z)$ を掛け，Legendre の倍関数の直交性に注意して，z について $-1\sim 1$ まで，それぞれ項別積分すれば，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_n}{\partial t} &= -3r\left(\frac{n-m}{2n-1}u_{n-1}+\frac{n+m+1}{2n+3}u_{n+1}\right)\\
&-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-2r\right)\{\frac{(n-1)(n-m)}{2n-1}u_{n-1}-\frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3}u_{n+1}\}\\
&+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-3r\right)\{\frac{(n-1)(n-m)}{2n-1}v_{n-1}-\frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3}v_{n+1}\}\\
&+\frac{3}{2}(1-r^2)\left(\frac{n-m}{2n-1}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial r}+\frac{n+m+1}{2n+3}\frac{\partial u_{n+1}}{\partial r}\right)-\frac{\partial p_n}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_n}{\partial t} &= \frac{(n-2)(n-m-1)(2n+1)}{(n+1)(n+m)(2n-3)}\frac{\partial v_{n-2}}{\partial t}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-6r\right)[\frac{(n-m-2)}{(n+1)}\\
&\frac{(n-m-1)(2n+1)}{(n+m)(2n-5)(2n-3)}u_{n-3}-\{\frac{2n+1}{(n+1)(n+m)}\\
&-\frac{n-m}{(n+1)(2n-1)}-\frac{(n-m-1)(n+m-1)(2n+1)}{(n+1)(n+m)(2n-3)(2n-1)}\}u_{n-1}\\
&+\frac{n+m+1}{(n+1)(2n+3)}u_{n+1}]\\
&+\frac{3}{2}(\frac{1}{r}-2r)[\frac{(n-3)(n-2)(n-m-2)(n-m-1)(2n+1)}{(n+1)(n+m)(2n-5)(2n-3)}v_{n-3}\\
&-\{\frac{n(n-1)(2n+1)}{(n+1)(n+m)}-\frac{n(n-1)(n-m)}{(n+1)(2n-1)}-\frac{n(n-1)(n+m-1)}{(n+1)(n+m)}\\
&\frac{(n-m-1)(2n+1)}{(2n-3)(2n-1)}-\frac{m^2(2n+1)}{(n+1)(n+m)}\}v_{n-1}+(n+2)\\
&\frac{(n+m+1)}{2n+3}v_{n+1}]-\frac{3}{2}(1-r^2)[\frac{(n-3)(n-m-2)}{(n+1)(n+m)}\\
&\frac{(n-m-1)(2n+1)}{(2n-5)(2n-3)}(\frac{v_{n-3}}{r}+\frac{\partial v_{n-3}}{\partial r})+\{\frac{(n-1)(n-m)}{(n+1)(2n+3)}\\
&-\frac{n(n+m-1)(n-m-1)(2n+1)}{(n+1)(n+m)(2n-3)(2n-1)}\}\\
&(\frac{v_{n-1}}{r}+\frac{\partial v_{n-1}}{\partial r})-\frac{(n+2)(n+m+1)}{(n+1)(2n+3)}
\end{aligned}$$

$$
\left(\frac{v_{n+1}}{r}+\frac{\partial v_{n+1}}{\partial r}\right)] + \frac{1}{r}\frac{(n-2)(n-m-1)(2n+1)}{(n+1)(n+m)(2n-3)}p_{n-2}
$$
$$
-\frac{1}{r}p_n, \tag{4.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w_n}{\partial t} &= \frac{3}{2}r\left(\frac{n-m}{2n-1}w_{n-1}+\frac{n+m+1}{2n+3}w_{n+1}\right) \\
&\quad -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-2r\right)\left\{\frac{(n-2)(n-m)}{2n-1}w_{n-1}-\frac{(n+3)(n+m+1)}{2n+3}w_{n+1}\right\} \\
&\quad +\frac{3}{2}(1-r^2)\left(\frac{n-m}{2n-1}\frac{\partial w_{n-1}}{\partial r}+\frac{n+m+1}{2n+3}\frac{\partial w_{n+1}}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}p_n.
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

のように，任意の方位数 m を固定する毎に，$n \geq m$ となる全ての n に対して成り立つ各展開係数の時間発展に対する方程式系として導かれる．従って，これらの方程式系は，任意の方位数 m については閉じており，u^e_{nm}, u^o_{nm} は独立に同じ方程式を満たすので，これ以後，簡単なために，u^e_{nm}, u^o_{nm} 等の代わりに u_n 等を用いることにした．ここで，(4.22) については，この式の右辺に $\partial v_{n-2}/\partial t$ なる項を含んでいるために，この方程式は任意の方位数 m に対して，$n \geq m+1$ なる n について成り立つことに注意する．そこで，$\partial v_m/\partial t$ に対する方程式を得るために，論文 [2] の（2.20）式の両辺を z について $-1 \sim z$ まで積分する．この式の両辺に $P^m_m(z)$ を掛けて z について $-1 \sim 1$ まで積分することにより，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_m}{\partial t} &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-6r\right)\sum_{n=m}^{\infty}\alpha^m_n u_n + \frac{3}{2}(1-r^2)\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{2m+1}{2m+3}\delta_{n,m+1}-\alpha^m_n\right) \\
&\quad \left(\frac{v_n}{r}+\frac{\partial v_n}{\partial r}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r}-2r\right)\sum_{n=m}^{\infty}\{n(n+1)\alpha^m_n - m^2\beta^m_n\}v_n \\
&\quad -\frac{p_m}{r}
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

のように得られる．ここで，$\delta_{n,m}$ は Kronecker のデルタであり，係数 α^m_n, β^m_n は，

$$
\alpha^m_n = \frac{(2m+1)}{2(2m)!}\int_{-1}^{1}P^m_m(z)\int_{-1}^{z}P^m_n(x)dxdz \tag{4.25}
$$

$$
\beta^m_n = \frac{(2m+1)}{2(2m)!}\int_{-1}^{1}P^m_m(z)\int_{-1}^{z}\frac{P^m_n(x)}{1-x^2}dxdz \tag{4.26}
$$

である．

次に，$p_n(r,t)$ に対する方程式は，(4.15) 式に (4.20) 式を代入し，上と同様な操作を施すことによって，

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dp_n}{dr}\right)-\frac{n(n+1)}{r^2}p_n=f_n(r), \quad (0<r<1) \tag{4.27}$$

が得られる．

ここで，$f_n(r)$ は，

$$\begin{aligned} f_n(r) \;=\; & \frac{(n-1)(n-m)}{2n-1}\left(12u_{n-1}-12v_{n-1}-3r\frac{\partial v_{n-1}}{\partial r}\right) \\ & -\frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3}\left(12u_{n+1}-12v_{n+1}-3r\frac{\partial v_{n+1}}{\partial r}\right) \\ & -\frac{9(n+m+1)}{2n+3}r\frac{\partial u_{n+1}}{\partial r}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

である．(4.27) 式の一般解を求めると，

$$p_n(r)=ar^n+br^{-(n+1)}+\frac{r^n}{2n+1}\int_1^r r^{-(n-1)}f_n(r)dr-\frac{r^{-(n+1)}}{2n+1}\int_0^r r^{n+2}f_n(r)dr \tag{4.29}$$

となる．ここで，a と b は任意定数である．

5　流れ場の連続性

3 次元的な微小撹乱を加えられたことによって歪められた Hill の渦の表面 $S(t)$ の内外の速度分布は，連続的につながらなくてはならない．内部領域 Ω_- における乱された速度 $\mathbf{u}^-=(u^-,v^-,w^-)$ に対する境界条件は，この $S(t)$ における流れの連続性から得られる．

撹乱を加えられた後の渦の流れの場は，

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_H+\epsilon\mathbf{u}^\pm \quad \text{and} \quad p=p_H^\pm+\epsilon p^\pm \quad \text{in} \ \ \Omega_\pm \tag{5.30}$$

として与える．ここに，p_H^+ と p_H^- は，それぞれ本来の Hill 球形渦の内部，外部の圧力分布を表しており，それらは，

$$p_H^+ \;=\; p_0-\frac{1}{2}\{\left(1-\frac{1}{r^3}\right)^2+\frac{3}{r^3}\left(1-\frac{1}{4r^3}\right)\sin^2\theta\} \tag{5.31}$$

$$p_H^- = p_0 - \frac{9}{8}\{\left(1-r^2\right)^2 + \left(3-2r^2\right) r^2 \sin^2\theta\} \tag{5.32}$$

で与えられる．ここで，p_0 は定数である．

速度場 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ について，u の連続性から ϵ について 1 次のオーダーの量をとると，

$$u^-(1,\theta,\phi,t) = u^+(1,\theta,\phi,t). \tag{5.33}$$

故に，

$$u_n(1,t) = -(n+1)A_n(t). \tag{5.34}$$

同様に，v の連続性から，

$$h(\theta,\phi,t) = \frac{2}{15\sin\theta}\left(v^-(1,\theta,\phi,t) - v^+(1,\theta,\phi,t)\right). \tag{5.35}$$

更に，w の連続性から，

$$w^-(1,\theta,\phi,t) = w^+(1,\theta,\phi,t). \tag{5.36}$$

故に，

$$w_n(1,t) = A_n(t). \tag{5.37}$$

が得られる．ここで，A_{nm} の代わりに，A_n と表した．

p と $\partial p/\partial r$ の連続性から，境界 $r = 1 + \epsilon h$ において，ϵ について 1 次のオーダーの量をとると，

$$p^-(1,\theta,\phi,t) = p^+(1,\theta,\phi,t), \tag{5.38}$$

$$\frac{\partial p^-(1,\theta,\phi,t)}{\partial r} = \frac{\partial p^+(1,\theta,\phi,t)}{\partial r} - \frac{45}{2}\sin^2\theta h(\theta,\phi,t) \tag{5.39}$$

を得る．上の条件から $\dfrac{\partial p_n^-(1,t)}{\partial r}$ を求めると，

$$\frac{\partial p_n^-(1,t)}{\partial r} = -(n+1)p_n^-(1,t) + C_n(t), \tag{5.40}$$

が得られる．ここに，$C_n(t)$ は，

$$\begin{aligned} C_n(t) = & -\frac{3(n-1)(n-m)}{2n-1}v_{n-1}^-(1,t) + \frac{3(n+2)(n+m+1)}{2n+3}v_{n+1}^-(1,t) \\ & +\frac{3}{2}\frac{(3n-1)(n-m)}{2n-1}w_{n-1}^-(1,t) \\ & +\frac{9}{2}\frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3}w_{n+1}^-(1,t). \end{aligned} \tag{5.41}$$

である．(5.40) 式が，内部領域 Ω_- での乱された圧力 p^- の展開係数 p_n についての方程式（即ち，(4.27)）に対する境界条件である．ここで，原点での圧力の一意性から，$p^-(0,t)=0$ と置くと，これらの条件を満足する (4.27) 式の解は，

$$\begin{aligned} p_n(r,t) &= \frac{C_n(t)}{2n+1}r^n \\ &+\frac{r^n}{2n+1}\int_1^r r^{-(n-1)}f_n(r,t)dr \\ &-\frac{r^{(n+1)}}{2n+1}\int_0^r r^{n+2}f_n(r,t)dr \end{aligned} \tag{5.42}$$

と求めることができる．以上から，領域 Ω^- での乱された圧力 p^- が求められる．

6 数値計算

渦に撹乱を与えた後，$t>0$ での 渦表面の形 $h(\theta,\phi,t)$ は (5.35) 式から

$$h(\theta,\phi,t)=-\frac{2}{15}\sum_{n=m}^{\infty}(v_n(1,t)-w_n(1,t))\frac{dP_n^m(z)}{dz}\cos m\phi. \tag{6.43}$$

で計算できるはずであるが，右辺の級数は [2] によると，$z=\pm1$ の近くにおいては，非常に収束性が悪いので，ここで別の方法を用いる．

$S(t)$ は同じ流体粒子から構成されるので

$$\frac{D}{Dt}(r-1-\epsilon h(\theta,\phi,t))=0, \tag{6.44}$$

が成り立つ．これより，ϵ について 1 次のオーダーの量をとれば，

$$\frac{\partial h}{\partial t}=u^-(1,\theta,\phi,t)+3\cos\theta h+\frac{3}{2}\sin\theta\frac{\partial h}{\partial\theta}. \tag{6.45}$$

が得られる．ここで，(6.45) 式は，形式的には (6.43) 式と等価である．本論文では，

$$u^-(1,\theta,\phi,t)=\sum_{n=m}^{\infty}u_n(1,t)P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi. \tag{6.46}$$

によって与えられる数値解 $u^-(1,\theta,\phi,t)$ を用いて偏微分方程式 (6.45) 式を数値積分することによって $h(\theta,\phi,t)$ を求めることにする．

これから3次元的な微小攪乱の場合の数値結果を出す前に，Moffatt と Moore による軸対称的な攪乱の場合の数値結果を述べる．論文 [1] によると 攪乱を加えた後の表面の形 $h(\theta,t)$ を次のように与える．

$$h = -\frac{1}{5} - 2A_2(t)\mu + \frac{1}{20}\mathrm{sech}^2\tau \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{n(n+1)} (\mathrm{th}\tau)^{n-3} P_n'(\mu) \tag{6.47}$$

ここで，

$$\frac{(2n+1)^2}{n(n+1)} = 4(1 + \frac{1}{4n(n+1)}) \tag{6.48}$$

である．(6.48) 式の左辺は $n \geq 1$ の場合に対し，$\dfrac{1}{4n(n+1)}$ は小さいと見なして無視する．この時 (6.47) 式の無限級数は和が求められて

$$\begin{aligned} h &= -\frac{1}{5} - 2A_2(t)\mu + \frac{\mathrm{cosech}^2\tau}{5\mathrm{th}\tau} \frac{d}{d\mu} \sum_{n=3}^{\infty} (\mathrm{th}\tau)^n P_n(\mu) \\ &= -\frac{1}{5} - 2A_2(t)\mu \quad + 1/5\mathrm{cosech}^2\tau[(1 - 2\mu\mathrm{th}\tau + \mathrm{th}^2\tau)^{-3/2} \\ &\quad -1 - 3\mu\mathrm{th}\tau] \end{aligned} \tag{6.49}$$

となる．ここで，$\mu = \cos(\theta), \tau = 3/4t$ である．(6.49) 式は Moffatt と Moore の近似的な解析解である．彼らはこの式から数値結果を出した．(6.47) 式は (6.43) 式に相当する．

$S(t)$ は同じ流体粒子から構成されるので $h(\theta,t)$ を求めてくれば次の式

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial \mu}[(1-\mu^2)h] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n n(n+1) P_n(\mu), \tag{6.50}$$

が得る．(6.50) 式が (6.45) 式に相当する．A_n は次の方程式を満す．

$$\frac{dA_n}{dt} = 3\frac{n-1}{2n+1}[\frac{n(n-3)}{2n-1}A_{n-1} - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}A_{n+1}]$$

$$(n = 1, 2, ...)$$

次に (6.49) 式と (6.50) 式から数値結果を出して比較して見る．3 次元的な微小攪乱と軸対称的な微小攪乱の場合の u_n, v_n, w_n と A_n に対する発展方程式は n について閉じていないので，これを数値積分するには $n > N$ 無視して閉じた方程式系にしなければならない．ここでは軸対称的な攪乱の場合は $N = 50, 100, 150, 200$ とし，3 次元的な攪乱の場合は $N = 150, 350, 550, 750$ とした．また，r については $0 \leq r \leq 1$ を 160 等分した差分式を用いた．時間積分は 4 次の Runge-Kutta 法を適用した．

図 1 は $m = 0, N = 50$ の場合の表面の形 $h(\theta, t)$ の時間発展 $(t = 3, 4)$ の様子を示す．$\theta = 0$ は後部淀み点に対応する．図 1 は式 (6.49) から出した．$t = 0$ で与えられた攪乱が時間と共に後部淀み点付近で Moffatt-Moore が言った spike の形が確かに現われている事が分かる．

図 2 は $m = 0, N = 50, t = 2.5$ の場合の (6.49) 式と (6.50) 式から計算した数値解 $h(\theta, t)$ の比較した様子を示す．$\theta = 0$ は後部淀み点に，$\theta = 180$ は前部淀み点に対応する．図 2 で $N = 50, t = 2.5$ の時に二つ式から出た解はほぼ同じように見えるが．前部淀み点付近で (6.49) の解は少しずれている事がわかる．これは (6.50) から出た解と (6.49) から出た解は前部淀み点付近で一致しないことである．または，(6.50) 式の解は $N = 50, t = 2.5$ の場合では前部淀み点付近では収束が遅い．

次に 前部淀み点付近で $m = 0, N = 50, 100, 150, 200, t = 2.5$ の場合を考える．

図 2 で (6.49) 式の解は前部淀み点付近だけでずれていることが分かったが．それで，前部淀み点付近で図を $5\pi/6 \leq \theta \leq \pi$

の間で拡大して見る．これは図3に示す．これによると同じ時間（$t = 2.5$）ではNの数が大きくなるほど(6.50)式の解と(6.49)式の解は前部淀み点付近で一致する．特に，$N = 200$の場合二つの解はほぼ一致する．上の議論によるとわれわれの考え方((6.50)式）から解を求めるためには発展方程式の展開の項数を十分に取らなければならないということが分かった．

3次元的な撹乱の場合は解を(6.45)式から求める．図4は$m = 2, N = 750$としたときの初期撹乱に対する$\phi = 0$の渦断面の表面の形$h(\theta, 0, t)$の時間発展（$t = 0, 0.5, 1.0$）の様子を示す．ここで任意の方位角ϕにおける渦断面の表面の形$h(\theta, \phi, t)$を知るためには，図に表す各々の曲線に$\cos m\phi$を掛ければよい．この図から，初期に与えた撹乱は，時間の経過と共に後流側へ向かって流されて行き，後部淀み点へ近づくに連れて，撹乱のピークは次第に増大していく様子がわかる．$h(\theta, 0, t) = h(\theta, \pi, t), h(\theta, \pi/2, t) = h(\theta, 3\pi/2, t) = -h(\theta, 0, t)$が成り立つ事から，時間の経過と共に，後部淀み点付近のの部分から渦度を持つ流体が外部の渦無しの流れの中へ流出すると，各々の部分から回転軸の回りにπだけ回転した部分では，逆に，渦無しの流体が渦領域の内部へ流入する．これはMoffattとMooreが述べたspikeに対応する構造が，後部淀み点の回りから現れてくることになる．

図5は$m = 2, N = 150, 350, 550, 750, t = 1.0$の場合の(6.45)式から計算した数値解$h(\theta, \phi, t)$の様子を示す．後部淀み点付近で数値解は$N \geq 0$によらずほぼ一致する．前部淀み点付近で解はずれている様に見える．それで，前部淀み点付近で図を$5\pi/6 \leq \theta \leq \pi$の間で拡大して見る．これを図6に示す，これによると同じ時間（$t = 1.0$）ではNの数が大きくなるほど(6.45)式の解は前部淀み点付近で0に近づいていくことが分かる．特に，$N = 750$の

場合の (6.50) 式の解はほぼ安定な流れに収束している．

上の結論からいうと，時間の経過と共に後部淀み点 ($\theta = 0$) の回りから，$m = 2$ の場合は二ヶ所に，Moffatt と Moore が述べた spike に対応する構造が現われてくる様子が見られた．前回 [2] の結果では $m = 2$ の場合は前部淀み点($\theta = \Pi$) 付近から，不安定性が現われると思われたが，上の計算結果から，これは展開の項数が少な過ぎためめの数値誤差で項数を増やすと安定な流れに収束した．$m \geq 3$ でも原理的には同様に計算できる．$m = 3, 4$ に対する試験的な計算結果では，方位数 $m = 3, 4$ のどちらの場合においても，撹乱を加えた後の渦表面の変化の傾向 $m = 2$ と似ている．時間の経過と共に後部淀み点 ($\theta = 0$) の回りから，$m = 3$ の場合は三ヶ所に，$m = 4$ の場合は四ヶ所に，それぞれ spike に対応する構造が現われてくる．$m = 3, 4$ の場合は前部淀み点($\theta = \Pi$) 付近で，安定な流れに収束させるために，上の展開の項数を $m = 2$ の展開の場合の項数より沢山取らなければならないようである．

参考文献

[1] Moffatt, H.K. and D.W.Moore,J.Fluid Mech. 87(1978)749

[2] Akio Fukuyu, Tashpulat Rozi and Akimitsu Kanai. Journal of the Physical Society of Japan Vol. 63, No. 2, February, 1994, pp. 510-527

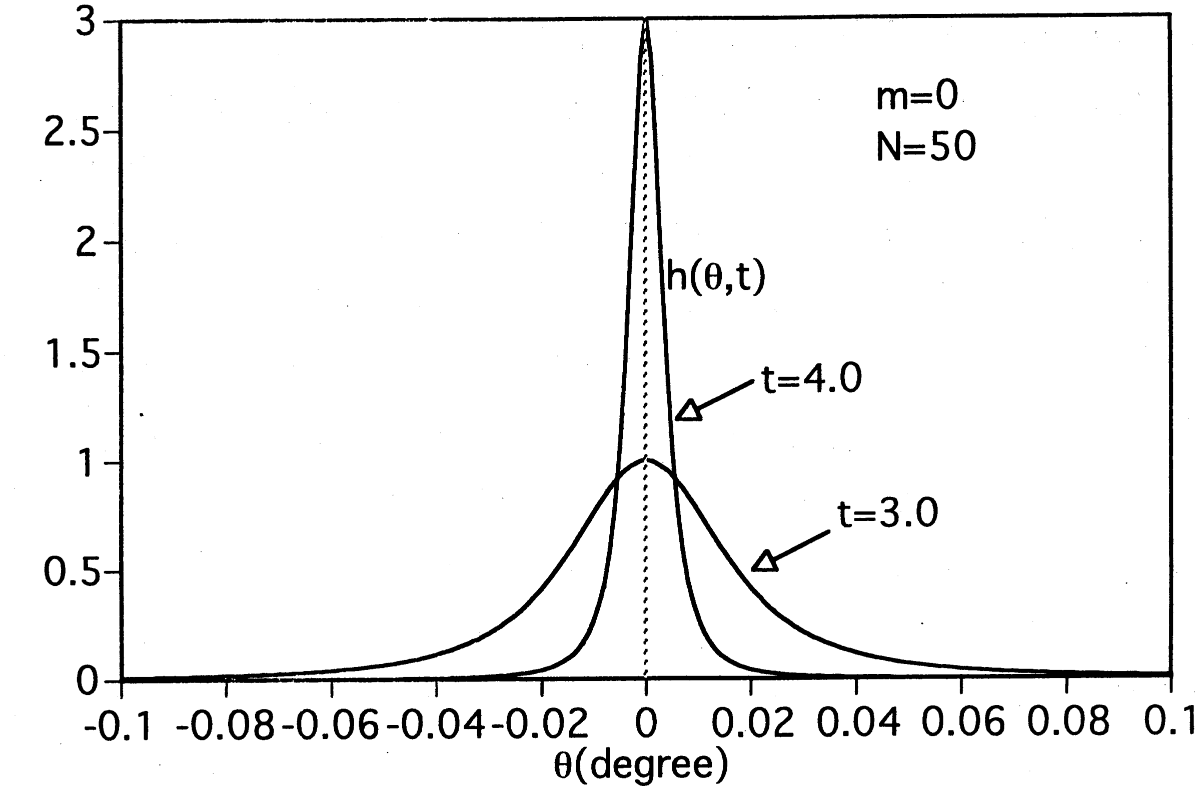

図１．渦表面の形 h(θ,t)の時間発展の様子.

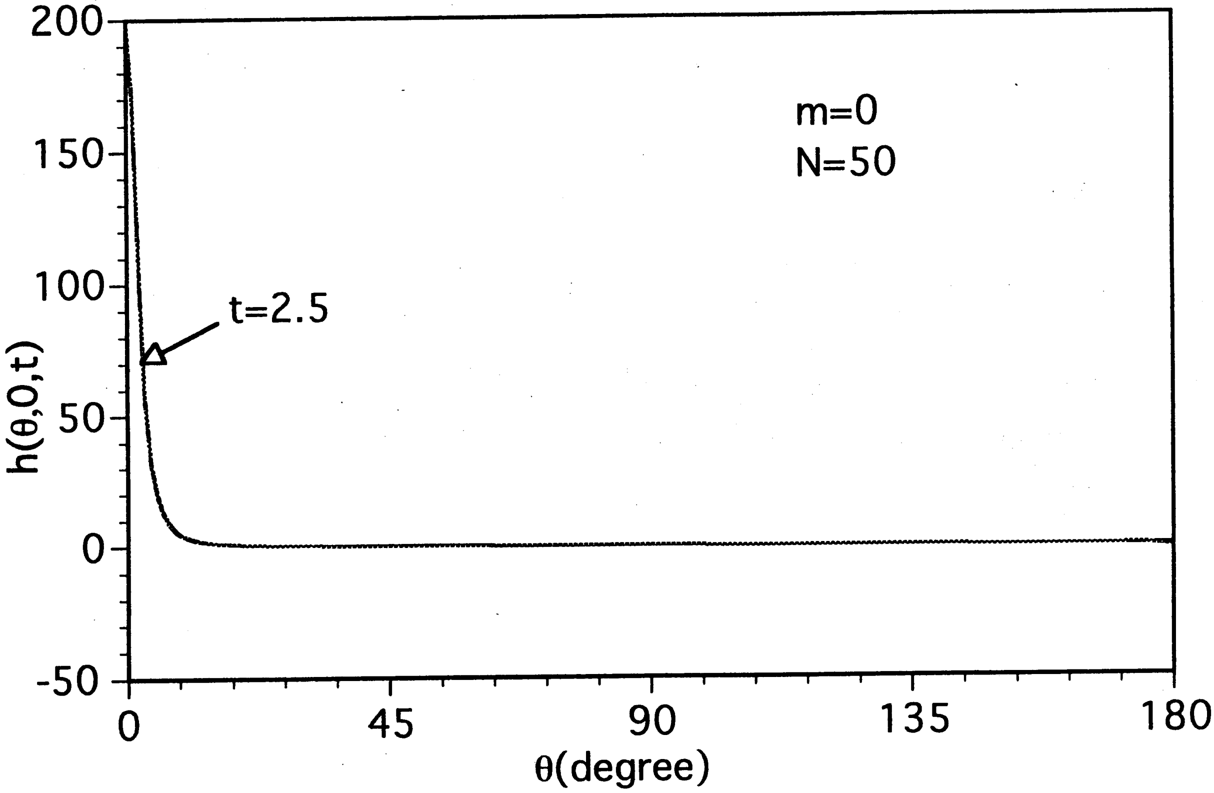

図２．(6.66) 式と (6.67) 式から計算した数値解 h の比較.

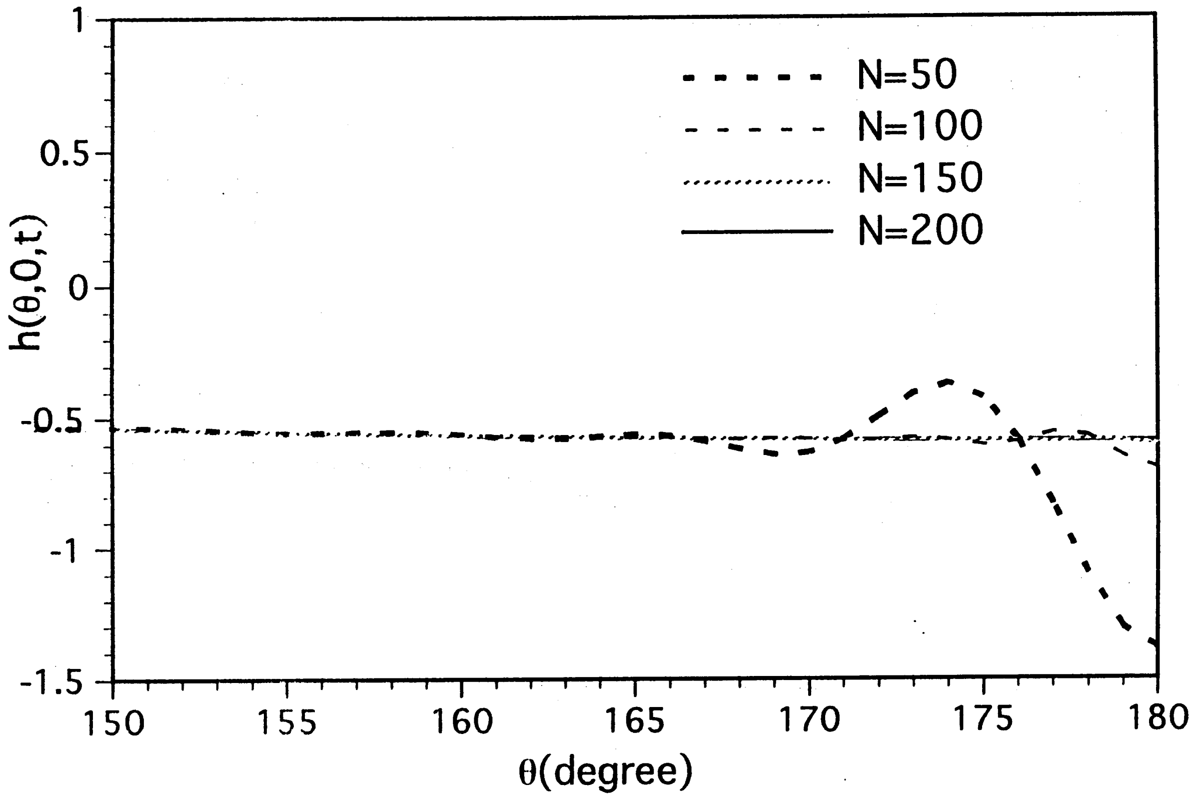

図 3．(6.66) 式と (6.67) 式から計算した数値解 h の比較と(6.66) 式の収束.

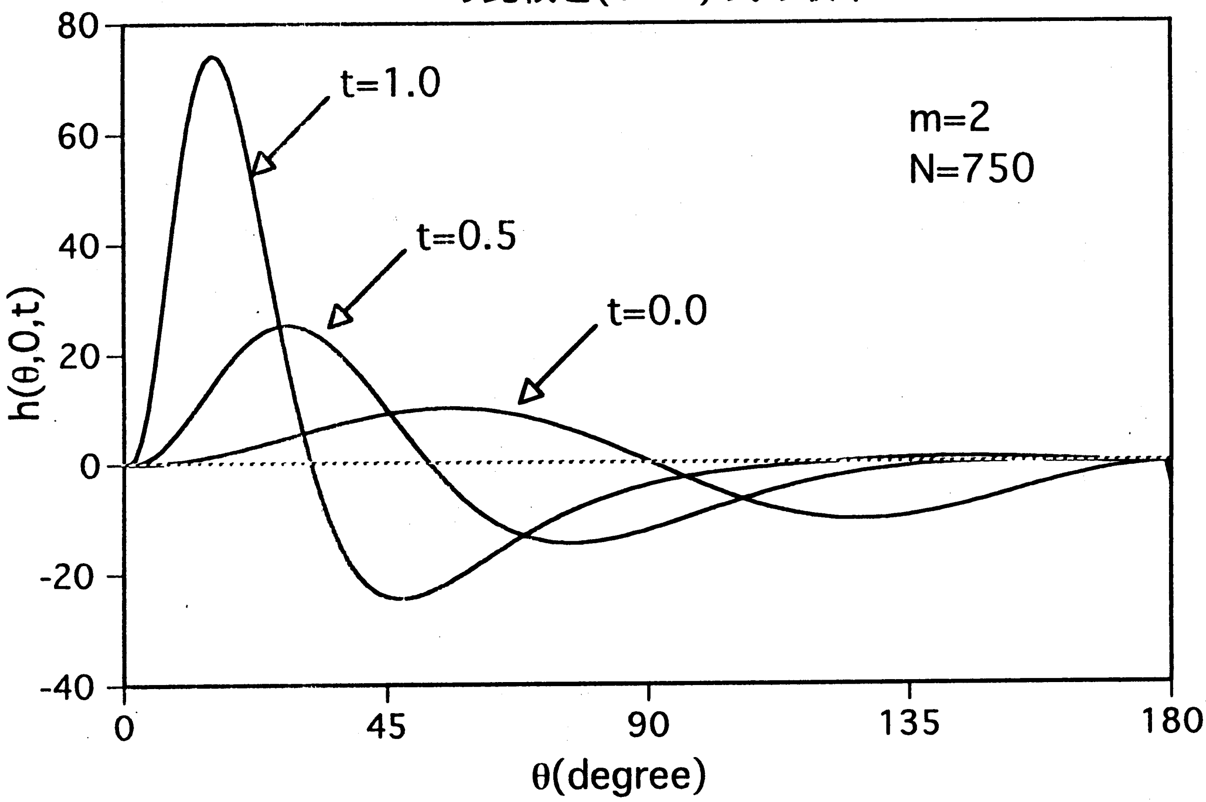

図 4．(6.62) 式に対する渦表面の形 h の時間発展の様子.

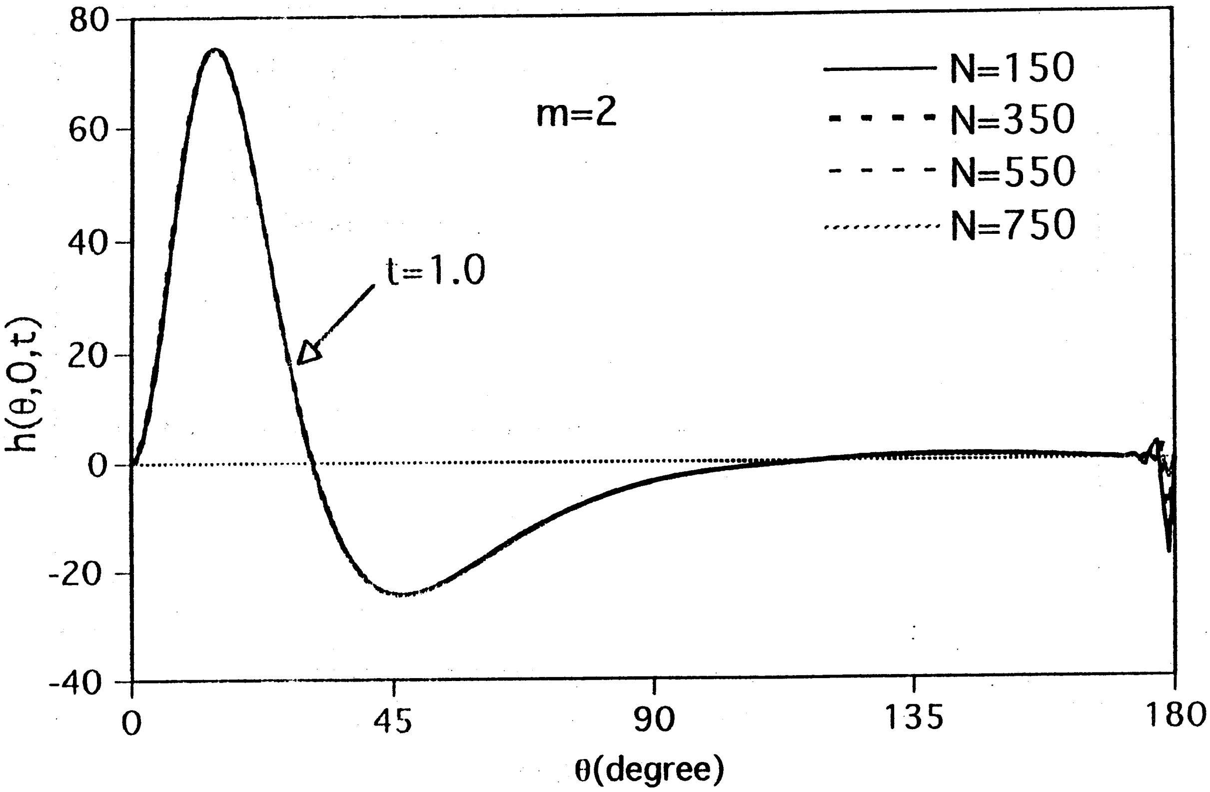

図５．(6.62) 式に対する渦表面の形 h の時間発展の様子．

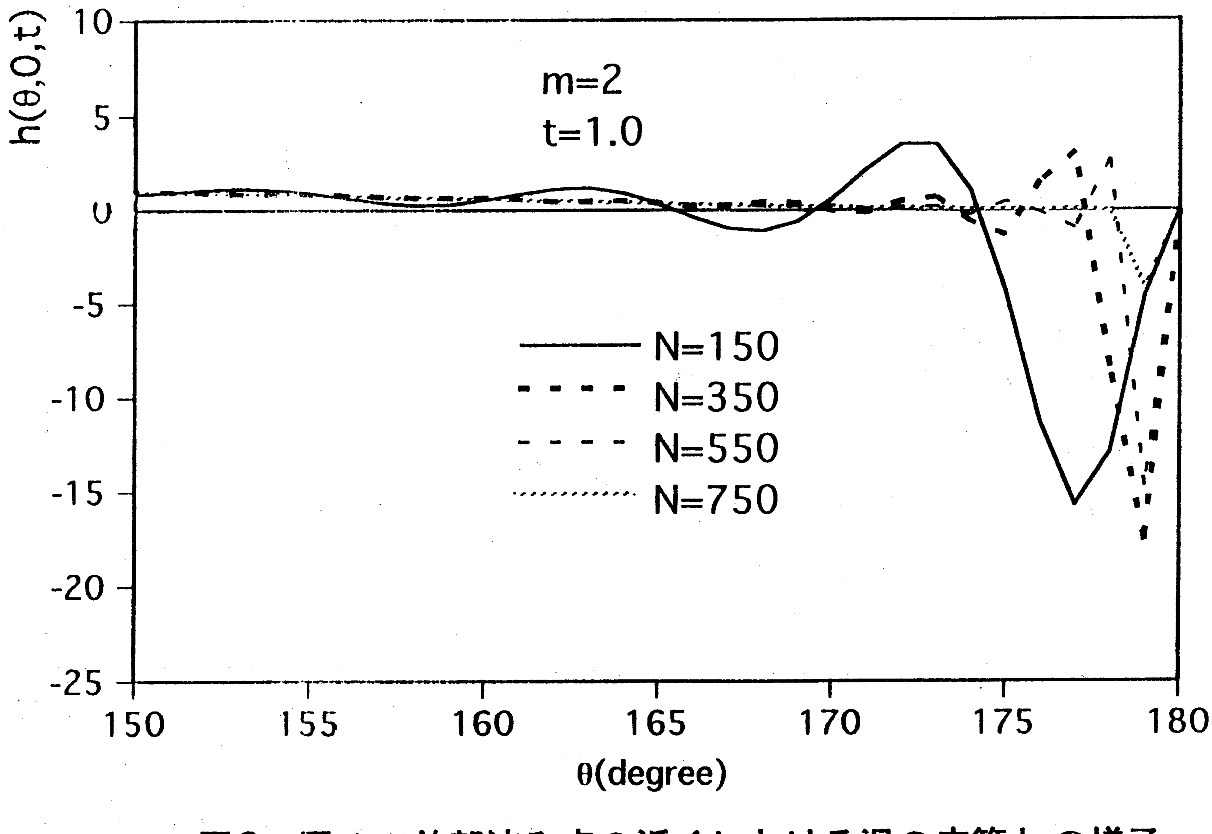

図6．図４の前部淀み点の近くにおける渦の応答 h の様子．