数理解析研究所講究録
1030 巻 1998 年 37-45

不均一な非線形電気回路における衝撃波
Shock wave in an inhomogeneous LC circuit

横浜国大・工　江原 純一 (Jun-ichi EHARA) *
横浜国大・工　渡辺 慎介 (Shinsuke WATANABE) †

1 序論

Inner friction による散逸を含む戸田格子では，衝撃波が安定に伝播する [1)]．この系と等価な非線形電気回路における実験でも，同様の結果が得られている [2)] [3)]．

回路パラメーターが均一ではなく，ある規則に従って変化している回路を不均一回路と呼ぶ．不均一な電気回路におけるソリトンの実験では，振幅の増加やパルス幅の圧縮などの現象が観察できる [4)]．

本研究では，回路方程式の数値計算により，不均一回路を伝播する衝撃波について調べた．

2 回路方程式の理論的解析

2.1 Burgers 型方程式の導出

本研究で扱う回路の模式図を図 1 に示す．ただし，インダクタと抵抗は線形の素子，キャパシタは非線形の素子を用いるとした．この回路の回路方程式は，

$$L_n \frac{dI_n}{dt} = v_n - v_{n+1} \tag{1}$$

$$\frac{dq_n}{dt} = I_{n-1} - I_n \tag{2}$$

$$v_n = R_n \frac{dq_n}{dt} + V_n \tag{3}$$

である．非線形キャパシタは次式で与えられる電圧特性をもつとする．

$$q_n = Q_n \ln\left(1 + \frac{V_n}{F_n}\right) \tag{4}$$

*ehara@ene.bsk.ynu.ac.jp
†watanabe@ene.bsk.ynu.ac.jp

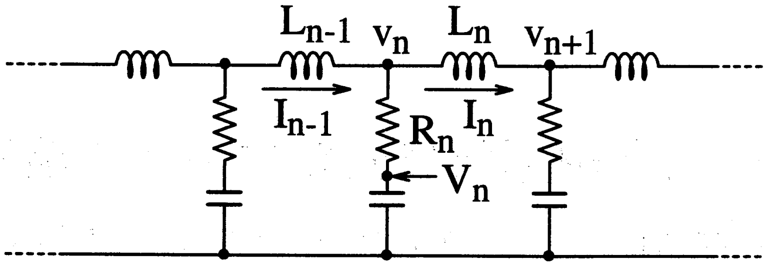


図 1: キャパシタと直列に抵抗を接続した不均一 LC 梯子型回路

ここで，V_n はキャパシタ間の電圧，v_n はインダクタ両端の電位，I_n は各段のループ電流，q_n はキャパシタに蓄えられる電荷である．また，この系における回路パラメータは，インダクタンス L_n，非線形キャパシタと直列に接続した抵抗 R_n，非線形キャパシタ特性 Q_n および F_n である．(1).(2),(4) はソリトンの実験に用いられる非線形 LC 梯子型回路の方程式と同様である [4)] が，キャパシタと直列に抵抗が加わっている点 ((3) 式) が異なる．

(2) を t で微分して(1),(3) を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2q_n}{dt^2} &= \frac{1}{L_{n-1}}\left(R_{n-1}\frac{dq_{n-1}}{dt} - R_n\frac{dq_n}{dt} + V_{n-1} - V_n\right)\\ &\quad +\frac{1}{L_n}\left(R_n\frac{d\,q_n}{dt} - R_{n+1}\frac{d\,q_{n+1}}{dt} + V_n - V_{n+1}\right) \qquad (5)\end{aligned}$$

となる．キャパシタの電圧特性(4) を用いると，キャパシタ両端の電圧 V_n に対する微分方程式:

$$\begin{aligned}&L_nQ_n\frac{d^2}{dt^2}\ln\left(1+\frac{V_n}{F_n}\right) =\\ &\frac{L_n}{L_{n-1}}\left\{R_{n-1}Q_{n-1}\frac{d}{dt}\ln\left(1+\frac{V_{n-1}}{F_{n-1}}\right) - R_nQ_n\frac{d}{dt}\ln\left(1+\frac{V_n}{F_n}\right) + V_{n-1} - V_n\right\}\\ &\quad + \left\{R_nQ_n\frac{d}{dt}\ln\left(1+\frac{V_n}{F_n}\right) - R_{n+1}Q_{n+1}\frac{d}{dt}\ln\left(1+\frac{V_{n+1}}{F_{n+1}}\right) + V_n - V_{n+1}\right\} \qquad (6)\end{aligned}$$

が得られる．

ここで小振幅連続体近似を行い回路の段数 n を連続座標 x に改めると，電圧 V_n は

$$V_{n\pm1} = V(x) \pm \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \pm \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\cdots$$

回路パラメータ L_n,R_n,Q_n,F_n は

$$L_{n\pm1} = L(x) \pm \frac{dL}{dx} \qquad R_{n\pm1} = R(x) \pm \frac{dR}{dx}$$
$$Q_{n\pm1} = Q(x) \pm \frac{dQ}{dx} \qquad F_{n\pm1} = F(x) \pm \frac{dF}{dx}$$

と表される．したがって，(6) は次の偏微分方程式に近似できる:

$$LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$
$$+RC\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}-\left(\frac{d}{dx}\ln\frac{L}{F^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+2RC\left(\frac{d}{dx}\ln\frac{RQ}{L^{1/2}}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} \quad (7)$$

ただし，

$$u=\frac{V}{F} \quad \text{(特性電圧 F で規格化したキャパシタ間電圧)}$$
$$C=\frac{Q}{F} \quad (V=0\ \text{でのキャパシタの微分容量})$$

である．

ここで，時間 t と空間座標 x を

$$\tau=\varepsilon\left(t-\int^{\xi}\frac{d\xi}{v}\right) \quad , \quad \xi=\varepsilon^2 x \quad (8)$$

と変換し，u を ε で摂動展開する:

$$u=\varepsilon u^{(1)}+\varepsilon^2 u^{(2)}+\varepsilon^3 u^{(3)}+\cdots \quad (9)$$

(7) に (8),(9) を代入し，$\varepsilon^n(n=1,2,\cdots)$ の各係数をまとめると，ε^3 の係数は

$$v^2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial\tau^2}=\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial\tau^2} \qquad \therefore v=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

となり，衝撃波の (線形の) 速度 v が求められる．ε^4 の係数から，

$$2\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial\xi\partial\tau}-\frac{1}{2v}\frac{\partial^2 u^{(1)2}}{\partial\tau^2}-\frac{RC}{v}\frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial\tau^3}-\left(\frac{d}{d\xi}\ln\frac{L}{F^2}\right)\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\tau}=0$$

であるが，この式を τ で 1 回積分すると，

$$2\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi}-\frac{1}{v}u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\tau}-\frac{RC}{v}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial\tau^2}-\left(\frac{d}{d\xi}\ln\frac{L}{F^2}\right)u^{(1)}=0 \quad (10)$$

となり，Burgers 方程式に不均一効果の項 $\left(\frac{d}{d\xi}\ln\frac{L}{F^2}\right)u^{(1)}$ を加えた偏微分方程式が得られる．ここで $\xi, u^{(1)}$ を

$$\eta=\int^{\xi}\frac{RC}{v}d\xi, \qquad U=RC\,u^{(1)} \quad (11)$$

と変換して (10) の係数を整理すると，

$$2\frac{\partial U}{\partial\eta}-U\frac{\partial U}{\partial\tau}-\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}+\nu(\eta)U=0 \quad (12)$$

$$\nu(\eta)=\frac{d}{d\eta}\ln\frac{(RQ)^2}{L} \quad (13)$$

の形になる．

回路パラメータが均一である場合，すなわち $\nu(\eta) = 0$ の場合，(12) は通常の Burgers 方程式となり，その衝撃波解は

$$U(\eta,\tau) = \frac{a}{2}\left\{1 + \tanh\left[\frac{a}{4}\left(\tau + \frac{a}{4}\eta - \delta_0\right)\right]\right\} \tag{14}$$

である．$\nu(\eta) \neq 0$ の場合，$\nu(\eta)$ が小さいと仮定すると (12) の解は (14) に不均一効果による摂動を加えたもの:

$$U(\eta,\tau) = \frac{a(\eta)}{2}\left\{1 + \tanh\left[\frac{a(\eta)}{4}\left(\tau + \int^{\eta}\frac{a(\eta)}{4}d\eta - \delta_0\right)\right]\right\} \tag{15}$$

と考えられる．

次節では，式 (12) を用いて衝撃波の振幅と不均一効果の関係について解析を行う．

2.2 衝撃波の振幅の変化

(12) の両辺を τ について積分すると，

$$2\frac{dJ_1}{d\eta} - \left[\frac{U^2}{2}\right]_{\tau_1}^{\tau_2} - \left[\frac{\partial U}{\partial \tau}\right]_{\tau_1}^{\tau_2} + \nu(\eta)J_1 = 0 \tag{16}$$

ただし J_1 は 1 次の保存量:

$$J_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} U(\eta,\tau)d\tau \tag{17}$$

である．ただしこの積分は，τ_1，τ_2 が次の条件

$$\tau_1 + \int^{\eta}\frac{a(\eta)}{4}d\eta \to -\infty, \qquad \tau_2 + \int^{\eta}\frac{a(\eta)}{4}d\eta \to +\infty \tag{18}$$

すなわち

$$U(\eta,\tau_1) \sim 0 \quad , \quad U(\eta,\tau_2) \sim a(\eta)$$

を満たす空間の範囲で考えることにする．したがって今の場合，(16) は

$$2\frac{dJ_1}{d\eta} - \frac{a^2}{2} - \nu J_1 = 0 \tag{19}$$

となる．

$U(\eta,\tau)$ に(15) で仮定した衝撃波解を代入すると，

$$J_1 = a(\eta)\left(\tau_2 + \int^{\eta}\frac{a(\eta)}{4}d\eta - \delta_0\right) \tag{20}$$

となる．この J_1 を(19) に代入すると，

$$\frac{dJ_1}{d\eta} = \frac{da}{d\eta}\left(\tau_2 + \int^{\eta} \frac{a(\eta)}{4} d\eta - \delta_0\right) + \frac{a(\eta)^2}{4}$$

および(13) より，

$$\left\{\frac{d}{d\eta}\ln\left[a^2\frac{(RQ)^2}{L}\right]\right\}\left(\tau_2 + \int^{\eta} \frac{a(\eta)}{4} d\eta - \delta_0\right) = 0 \tag{21}$$

となる．(21) は恒等的に成り立つので，U の振幅 a と回路パラメータ L,R,Q の間には保存則

$$a^2\frac{(RQ)^2}{L} = const. \tag{22}$$

が存在する．

(22) で U の振幅 a を非線形キャパシタ間の電圧 V の振幅 A で表すと，

$$\frac{A^2}{L} = const. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{A_n}{A_1} = \sqrt{\frac{L_n}{L_1}} \tag{23}$$

となる．すなわち，不均一回路において，衝撃波の振幅 A はインダクタンス L の 1/2 乗に比例すると予想される．

3 数値計算

前節で得た予想を確認するため，回路方程式(1), (2),(3) および(4) を直接，4 次の Runge-Kutta 法で数値計算した．

インダクタンスLのみが不均一な回路　インダクタンス L のみが変化する不均一回路における衝撃波を図 2,3 に示す．図 2 は L が回路の段数と共に単調増加する場合，図 3 は単調減少する場合である．また，各図 (a) は時間波形を 100 段ごとに重ね描きしたもの（左端は入力波形），(b) は衝撃波の振幅を回路の段数に対してプロットしたものである．なお，各図 (a) で波面が通り過ぎてしばらく後に波形が異常に変化しているが，これは回路の末端からの反射波であり，衝撃波を考える上では無視しても差し支えない．

図 (b) 中の一点鎖線は衝撃波の振幅 A がインダクタンス L の 1/2 乗に比例するとした曲線(23) を表し，破線は A が L の 1/4 乗に比例するとした曲線

$$\frac{A_n}{A_1} = \left(\frac{L_n}{L_1}\right)^{1/4} \tag{24}$$

を表す．振幅のプロット（黒丸）は，(23) ではなく(24) とよく一致した．

この結果をさらに考察するため，今と異なる条件で不均一効果を加えた回路に対して同様の数値計算を行った．

特性インピーダンスが一定に保たれた不均一回路　均一なLC梯子型回路の特性インピーダンス Z_0 は，$\sqrt{L/C}$ で与えられる．回路の各段で Z_0 が一定である不均一回路における衝撃波を図4に示す．図4(a)は L,C が回路の段数と共に増加する場合，(b)は減少する場合の波形である．

この場合，衝撃波の振幅は変化しなかった．ただし，波面の傾きは(a)の場合減少し，(b)の場合増加した．

速度が一定に保たれた不均一回路　2.1節より，衝撃波の（線形の）速度 v は，$1/\sqrt{LC}$ である．各段で v が一定である不均一回路における衝撃波を図5に示す．この図で，振幅 A は見かけ上インダクタンス L の1/2乗に比例している．しかし，L と C が同時に変化していることを考慮すると，

$$\frac{A_n}{A_1} = \left(\frac{L_n}{C_n}\right)^{1/4} \left(\frac{L_1}{C_1}\right)^{-1/4} \tag{25}$$

である．

以上の数値計算結果から，不均一回路を伝播する衝撃波の振幅 A と回路パラメータ L,C は保存則

$$\frac{A^2}{\sqrt{L/C}} = const. \tag{26}$$

で結ばれていることがわかる．(26)において，A は電圧の次元，$\sqrt{L/C}$ は抵抗の次元を持つ量であるから，$A^2/\sqrt{L/C}$ は仕事率の次元(W=J/s)を持つ．よって，(26)は衝撃波のエネルギーフローが回路の至る所で一定であることを示している．

以上，小振幅近似が成り立つ振幅で数値計算を行ったが，入力した衝撃波の振幅が大きい場合にも(26)が成立した(図6)．ただしこの場合，衝撃波の速度は小振幅の場合より速く（そのため反射波の到着も速くなっている），波面の傾きは急峻になっている．

4　まとめ

不均一な非線形LC梯子型回路の方程式から，Burgers方程式に不均一項を加えた偏微分方程式が得られた．このBurgers型の方程式から，1次の保存量を考えることにより，不均一効果による振幅の変化を表す関係式が導かれた．

回路方程式の数値計算の結果，衝撃波の振幅の変化は上の予想とは一致せず，エネルギーフローが回路の至る所で一定であることを示す実験式が得られた．小振幅近似が成立しない大振幅の場合にも，この実験式が成立した．

実験式として得られたこのエネルギーフロー一定則を回路方程式から理論的に導出すること，そしてこの法則を非線形電気回路における波動一般に拡張することが今後の課題である．

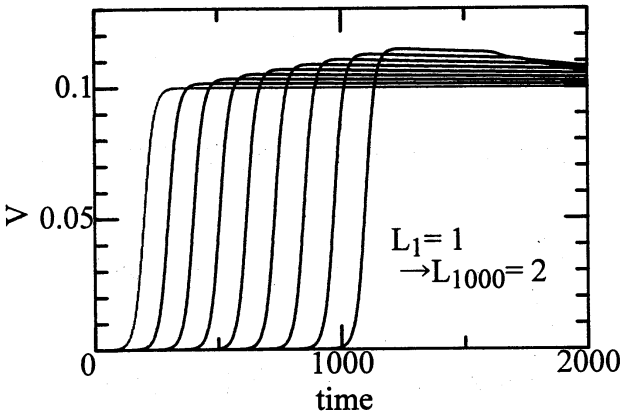
参考文献

1) J.Hietarinta, T.Kuusela, B.A.Malomed: *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** (1995) 3015-3024

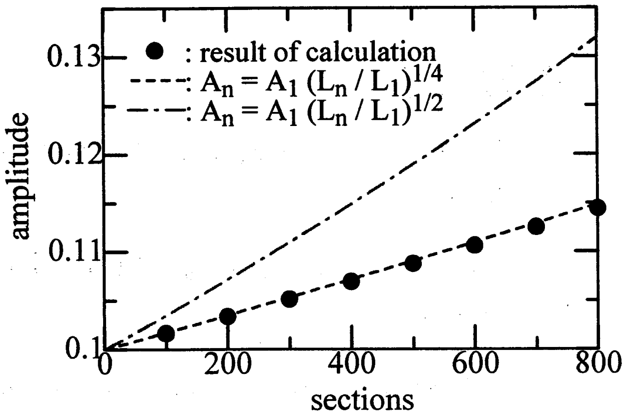
2) S.Watanabe, S.Ishiwata, K.Kawamura, H.Oh: *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** (1997) 984-987

3) S.Watanabe, M.Kawaguchi, K.Kawamura, S.Ishiwata, Y.Ohta, H.Oh: *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** (1997) 1231-1233

4) K.Muroya, S.Watanabe: *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** (1981) 3159-3165, 3166-3172

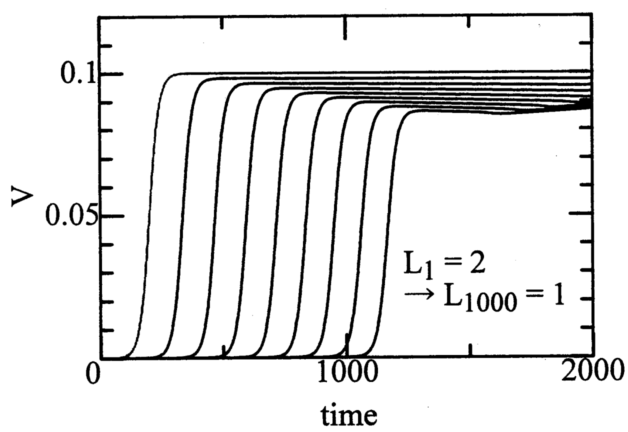


(a) 時間波形 (100段ごとにプロット)

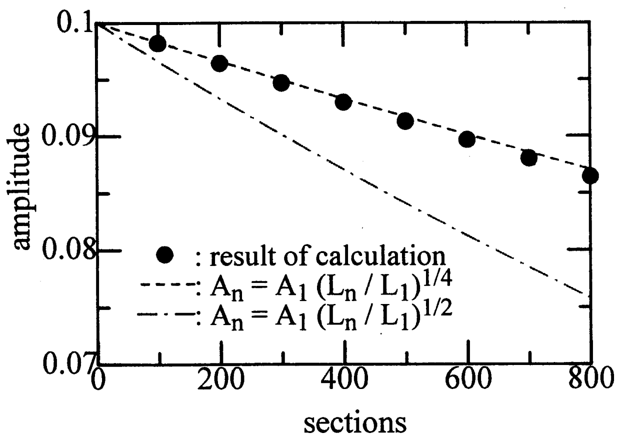


(b) 振幅と回路の段数の関係

図２　インダクタンスLが増加する不均一回路における衝撃波

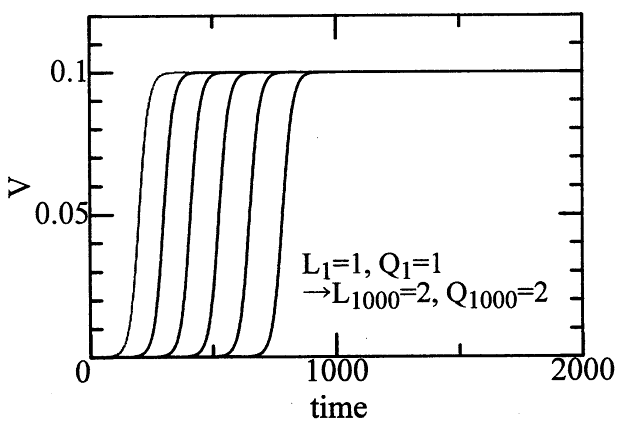


(a) 時間波形 (100段ごとにプロット)

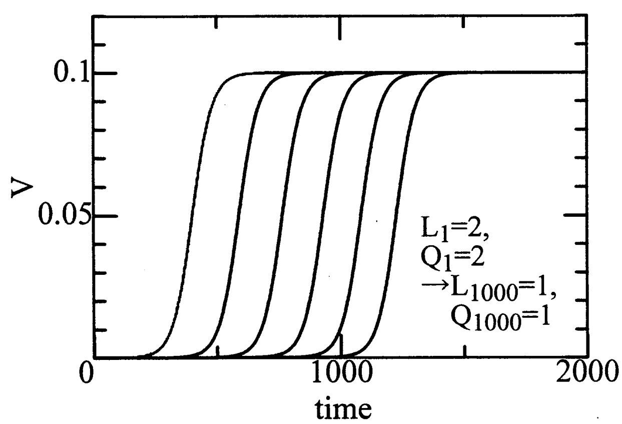


(b) 振幅と回路の段数の関係

図３　インダクタンスLが減少する不均一回路における衝撃波

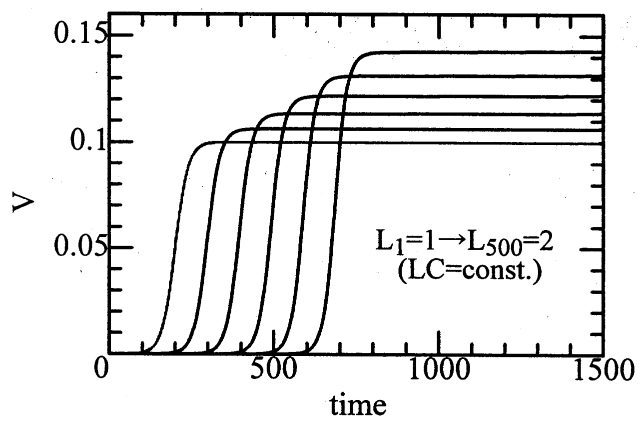


(a) L,Cが共に増加する場合

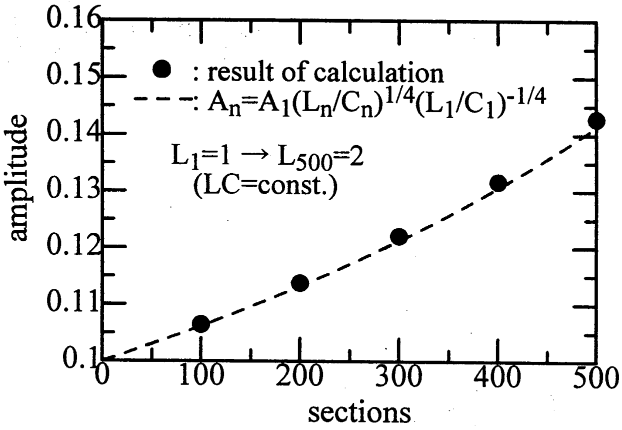


(b) L,Cが共に減少する場合

図４　特性インピーダンス$(L/C)^{1/2}$が一定な不均一回路における衝撃波

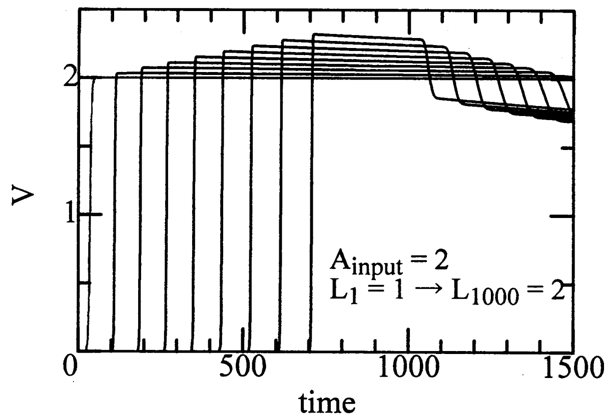


(a) 時間波形 (100段ごとにプロット)

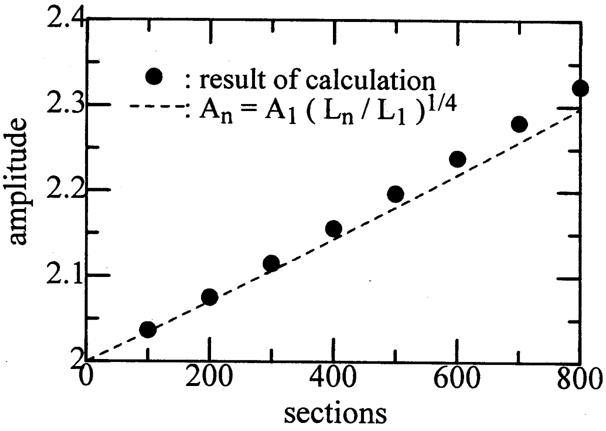


(b) 振幅と回路の段数の関係

図５　速度 $(LC)^{-1/2}$ が一定な不均一回路における衝撃波



(a) 時間波形 (100段ごとにプロット)



(b) 振幅と回路の段数の関係

図６　振幅の大きな衝撃波を不均一回路に入力した場合