

Both ways pitch-fork bifurcation diagrams of families of one-dimensional maps

西沢 清子 (城西大学 理学部)

e-mail kiyoko@math.josai.ac.jp

URL <http://math.josai.ac.jp/~kiyoko/>

1 Introduction

パラメーターの変化で非線形関数族の力学系の複雑さを測ろうとするときに、その変化に伴う周期軌道の生成と消滅は最も基本的な分岐過程であって、この系の複雑度を示している。特に吸引的周期軌道の変化の様子はしばしば一方方向の、または両方向の熊手分岐図として描かれる。

特に、メイによる個体生物学で有名な例であるロジスチック関数族 $\{f_\lambda(x) = \lambda x(1-x); \lambda \in [1, 4]\}$ は最も簡単な非線形写像でありながら、大変複雑な力学系である。すなわち周期倍分岐カスケイドがカオスにいたる一般的なルートの一つであることを認識させた例であり、物理学、化学、生物学に於いて実区間離散力学系はカオスの挙動を持つモデルとし重要であることは知られている。

しかし、一般には周期軌道の分岐はロジスチック関数族の力学が示す分岐よりははるかに複雑である。すなわちパラメーター λ が単調に増加するとき、ロジスチック関数族は、周期軌道が生成されることがあっても、決して消滅はしないという単調性を有するが、非線形力学系の多くはこの性質を持たない。さらにあるパラメーターの近傍では周期軌道の生成と消滅が無限回おこりることさえある。

ここでは、こうした1パラメーター非線形関数族の非単調な分岐現象を論じる。

はじめに分岐に関する幾つかの定義をする：

1パラメーター非線形関数族を $\{f_\lambda\}_\Lambda$ とする。パラメーター λ が単調に変化するとき、分岐値 λ_0 が **orbit creating** と呼ばれるのは、 λ_0 で新たに周期点が生じ、存在していた周期点は消滅しないときで、**orbit annihilating** と呼ばれるのは、 λ_0 で存在していた周期点は消滅し、新たに周期点が生じないときとする。さらに **neutral** とは周期点の誕生も消滅も起こらないときとする。族 $\{f_\lambda\}_\Lambda$ が **monotone increasing (resp. decreasing)** であるとは、すべての分岐値が **neutral** か **orbit creating (resp. annihilating)** のとき

で、**non-monotone** であるとは orbit creating と orbit annihilating な分岐値を持つときとする。

パラメータ λ が単調に変化するとき、分岐値 λ_0 が **anti-monotone** と呼ばれるのは、 λ_0 の任意の近傍に無限個の orbit creating と orbit annihilating が存在するときで、族がこのような anti-monotone 分岐値を一つでももてば、この族を **anti-monotone** と呼ぶ。

anti-monotonicity パラメータ値については、dissipative planar diffeomorphisms の 1 パラメータ系において研究がなされている。その系では homclinic 点 および heteroclinic 点の挙動が本質的である。すなわち Newhouse & Robinson ([New79], [Rob83]) によってある種の非退化性の仮定のもとに、任意の homoclinic-tangency パラメータ値の任意の近傍には homoclinic-tangency パラメータ値からなる dense な集合を部分集合としてもつパラメータ値の区間が存在する事が示されている。この区間を **Newhouse interval** と呼ぶ。続いて、Kan, Kocak, and York ([KKY92]) によって homoclinic-tangency パラメータ値の近傍では anti-monotone 分岐が生じているという次の定理が得られた：

Antimonotonicity Theorem

In any neighborhood of a nondegenerate, homoclinic-tangency parameter value of a one-parameter family of dissipative C^3 diffeomorphisms of the plane, there must be both infinitely many orbit-creation and infinitely many orbit-annihilation parameter values.

この族の分岐図は反対向きの熊手分岐図となる。具体的な例としてはヘノン写像族が知られている。

$$H_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - x^2 + by \\ x \end{pmatrix}$$

1次元写像族 $\{f_\lambda\}$ に対しての anti-monotone 分岐に関しては Jonassenn ([Jona93]) の方法がある: β -lift という 2次元写像

$$F_{\beta,\lambda} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\lambda(x) + \beta y \\ x \end{pmatrix} \quad 0 < |\beta| < 1$$

を作る。このとき $\{f_\lambda\}$ の non-degenerate homoclinic orbit は丁度 β -lift $F_{\beta,\lambda}$ の transversal homoclinic point に対応している。 β -lift は transversal homoclinic point を含む chaotic invariant set を持つ。

十分に小さな $\beta = \beta_0$ を固定して

$$F_{\beta_0,\lambda} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\lambda(x) + \beta_0 y \\ x \end{pmatrix}$$

とすると $\{F_{\beta_0, \lambda}\}$ は non-degenerate, homoclinic-tangency parameter を有する。従って、Antimonotonicity Theorem によって、この族は anti-monotone である。また anti-monotone を保証する Newhouse interval が存在する。 $\beta \rightarrow 0$ とするとき、この区間の幅が 0 にならなければ $\{f_\lambda\}$ は anti-monotone である。しかしこの極限操作で Newhouse interval がいつ生き残るかについての $\{f_\lambda\}$ に対する条件は求まっていない。

Milnor and Thurston, Douady and Hubbard ([MT88],[DH85]) は Teichmüller 空間の理論を使って、ロジスチック関数族 $\{f_\lambda(x) = \lambda x(1-x); \lambda \in [1, 4]\}$ は monotone increasing であることを示した (図 1 を参照)。しかしロジスチック関数族の分岐の単調性は、1 パラメーター非線形関数族の中ではむしろ特異であって、多くの非線形関数族は非単調な分岐過程をもつ。ここでパラメーターの入れ方がロジスチック関数族のようにある特定の関数 f を固定して $\{mf(x)\}_{m \in \mathbb{R}}$ と限ったものに対してはどうかという問題が生じてくる。すなわち、固定される関数に対してどのような制限があれば分岐の単調性が保証されるか? である。この問題に関して多くの研究が為されている。現在 f に対しては単峰でありシュワルツ微分が負である条件の基で、単調な分岐を持つ 1 パラメーター関数族 $\{mf(x)\}_m$ の特徴付けが研究されている。分岐の単調性はまたこの族の位相的エントロピーの単調性をも示している。

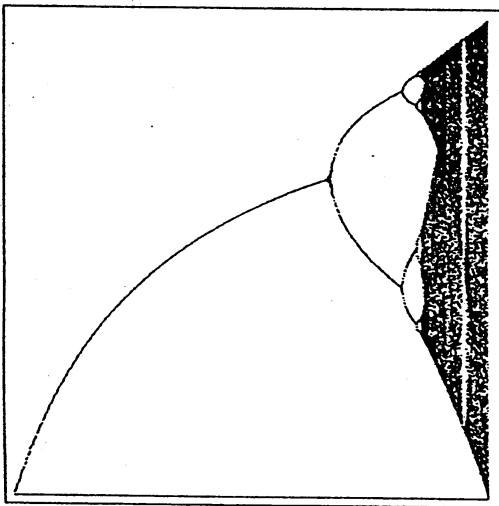


Figure 1: One-way pitchfork in the logistic family. $\{\lambda x(1-x)\}, (1 \leq m \leq 4)$.

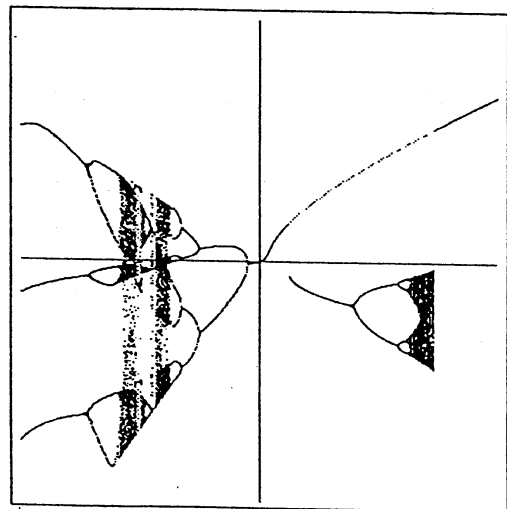


Figure 2: Both-ways pitchforks in quadratic rational maps. $\{m(\frac{1}{5} + \frac{x}{1+x^2})\}$.

ここでは 2 次有理関数 $f(x)$ に対しての 1 パラメーター関数族 $\{mf(x)\}_m$ の分岐現象に付いて述べる。すなわち f の選び方によって様々な分岐が生ずる ([FN95]) (図 2 を参照)。この分岐の多様性を説明するためにとる我々の基本的な方法は実 2 次有理関

数族のモデュライ空間でこの関数族 $\{mf(x)\}_m$ が定義する代数曲線 γ_f (定理1) の性質を調べることに帰着させる。具体的には、モデュライ空間に適当な座標をいれ、関数の力学的挙動によってこの空間を分割し、双曲成分の配置と分岐現象を引き起こす特定の代数曲線群を定義し、つぎに曲線 γ_f がどの双曲成分を通過するか、またどの特定の代数曲線群と交差するかを調べることである。

特に anti-monotone 分岐については β -lift をつかわずに代数曲線の方法で例のみを示す。

Section 2 で、複素2次有理関数族のモデュライ空間、双曲成分の配置、分岐現象を引き起こす特定の代数曲線群の定義などを J. MILNOR ([Mil92]) から引用し、さらに実2次有理関数族のモデュライ空間中に目的に合わせた領域と直線族を用意する。

Section 3 で分岐問題に対する議論を具体的な関数族 $\{m(r + \frac{x}{1+x^2})\}_m$ (r fixed) に対して展開する。これは H. E. Nusse and J. A. Yorke の論文 (p.329 in [NY88]) の次の部分に触発されたためである。

“ If it is written in our form, i. e., $m[b_0 + a_0 \frac{x}{1+x^2}]$, by fixing the ratio of a and b , it apparently does not exhibit period-halving bifurcation as the parameter m is increased.”

この記述にはかなりの曖昧さがある。すなわち比の取り方によって、この関数族は様々な分岐過程を生じる。たとえば比が 0.58 の1パラメータ関数族 $\{m(0.58 + \frac{x}{1+x^2})\}$ では非単調な分岐過程、さらに詳しくはバブリング、を持つ (例1)。さらに定理2として

”もし $r \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ であれば、 r を固定したときこの関数族 $\{m(r + \frac{x}{1+x^2})\}$ はどのような分岐も起こさない、すなわち、この関数族はパラメータ m がどのように変化しても常に唯一つの吸引的不動点を持ち、他のいかなる周期点も持たない。さらにこの値 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ は次の意味で最良のものである： $r < \frac{3\sqrt{3}}{8}$ であれば関数族 $\{m(r + \frac{x}{1+x^2})\}$ は必ず周期倍分岐を引き起こす”

ことを示す。さらに $r=0$ のときの関数族 $\{m(\frac{x}{1+x^2})\}$ は、複素有理関数族とみなすことによって、非自明な自己同型群を持つ関数の共役類からなるモデュライ空間の特異集合 (Symmetry Locus) の normal form を与えて、対応する代数曲線がこの特異集合の定義方程式である。

2 2次有理関数族

2.1 複素2次有理関数族のモジュライ空間

$\bar{\mathbb{C}}$ を Riemann sphere とする。 $\text{Rat}_2(\mathbb{C})$ を $\bar{\mathbb{C}}$ から $\bar{\mathbb{C}}$ への 2 次有理関数族とする。群 $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ が空間 $\text{Rat}_2(\mathbb{C})$ 上に次のように作用する：

$$g \circ f \circ g^{-1} \in \text{Rat}_2(\mathbb{C}) \quad \text{for } g \in \text{PSL}_2(\mathbb{C}), f \in \text{Rat}_2(\mathbb{C}).$$

2 つの関数 $f_1, f_2 \in \text{Rat}_2(\mathbb{C})$ が **holomorphically conjugate** であるとは $g \circ f_1 \circ g^{-1} = f_2$ となる $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ があるときとする。これを $f_1 \sim f_2$ と書く。この作用による $\text{Rat}_2(\mathbb{C})$ の商空間を $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ とし、2 次有理関数 f の正則共役類 $\langle f \rangle$ の **moduli space** とする。 $f \in \text{Rat}_2(\mathbb{C})$ の不動点を z_1, z_2, z_3 とし、その固有値を $\mu_i = f'(z_i)$ とする。また $\sigma_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, $\sigma_2 = \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1$, $\sigma_3 = \mu_1\mu_2\mu_3$. とする。このとき $\sigma_3 = \sigma_1 - 2$ という関係が得られ、Milnor(Lemma 3.1 in [Mil92]) によって $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ に座標 (σ_1, σ_2) が入り、 $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ と \mathbb{C}^2 は同一視される。また $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ の自然なコンパクト化として射影空間 $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ を考える。無限遠での ideal point は 2 次有理関数の極限関数で、1 次分数関数または定数に退化したものが対応しているとみなすことが出来る。

f の自己同型群 $\text{Aut}(f) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ とは $g \circ f \circ g^{-1} = f$ をみたす $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ の集合とする。有限群である。 $\tilde{f} \in \langle f \rangle$ であるような \tilde{f} に対して $\text{Aut}(\tilde{f})$ と $\text{Aut}(f)$ とは同型であることに注意すれば、自明でない自己同型群をもつ共役類 $\langle f \rangle$ が意味を持ち、従ってその全体を **bf symmetry locus** と呼び、 $\mathcal{S}(\subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ と書く。

各 $\mu \in \mathbb{C}$ にたいして、 $\text{Per}_n(\mu) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ とは固有値が μ である周期 n の周期点をもつ関数 f の共役類 $\langle f \rangle$ の全体とする。すなわち

$$\text{Per}_n(\mu) = \{ \langle f \rangle \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); f^n(z) = z, (f^n)'(z) = \mu \}.$$

特に周期 1 又は 2 のとき $\text{Per}_1(\mu), \text{Per}_2(\mu)$ は直線束である (Lemma 3.4 and Lemma 3.6 in [Mil92]):

$$\begin{aligned} \text{Per}_1(\mu) &= \{ \langle f \rangle \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); \sigma_2 = (\mu + \mu^{-1})\sigma_1 - (\mu^2 + 2\mu^{-1}) \} \\ \text{Per}_2(\mu) &= \{ \langle f \rangle \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); \sigma_2 = -2\sigma_1 + \mu \}. \end{aligned}$$

Symmetry locus \mathcal{S} は既約 3 次代数曲線である。その定義方程式は以下で与えられる ([FN98]) :

$$S(\sigma_1, \sigma_2) = 2\sigma_1^3 + \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 4\sigma_2^2 - 8\sigma_1\sigma_2 + 12\sigma_1 + 12\sigma_2 - 36 = 0. \quad (1)$$

有理関数が双曲的であるとは各 critical orbit がある吸引周期軌道に収束することである。双曲的な 2 次有理関数はモジュライ空間で開集合であって、その連結成分は

双曲的成分と呼ばれる。M. Rees ([Ree90]) によれば双曲的成分は4クラスに分けられる：

Type B: Bitransitive. Each of the two critical points belongs to the immediate basin of some attracting periodic point, where these two periodic points are distinct but belong to the same orbit. Evidently the period must be two or more.

Type C: Capture. Only one critical point belongs to the immediate basin on a periodic point, but the orbit of the other critical point eventually falls into this immediate basin. Again the period must be two or more.

Type D: Disjoint attractors. The two critical points belong to the attracting basins for two disjoint attracting periodic orbits.

Type E: Escape. Both critical orbits converge to the same attracting fixed point.

Type E(Escape) 双曲的成分はただ1つ存在することが知られている。

2.2 実モジュライ空間

実係数2次有理関数族 $\text{Rat}_2(\mathbf{R})$ に対して3個の固定点と対応する固有値は全てが実数か、1個が実で残りの2個は互いに複素共役である。従って σ_i ($1 \leq i \leq 3$) はやはり実数が対応する。J.Milnor に従って $\text{Rat}_2(\mathbf{R})$ の実モジュライ空間 $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ を単に実 (σ_1, σ_2) -平面と定義する。 $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ には次のような”特異点”が存在することに注意しておく：いま $\mathcal{S}_{\mathbf{R}} = \mathcal{S} \cap \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, とし、 $\langle \rangle_{\mathbf{R}}$ で、 $\text{Rat}_2(\mathbf{R})$ の関数の $\text{PSL}_2(\mathbf{R})$ での実共役類を表せば $(\text{Rat}_2(\mathbf{R})/\text{PSL}_2(\mathbf{R})) \setminus \{ \langle a(x + \frac{1}{x}) \rangle_{\mathbf{R}}, \langle a(x - \frac{1}{x}) \rangle_{\mathbf{R}} \}_{a \in \mathbf{R}^\times}$ は $\mathbf{R}^2 \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{R}}$, と同型であり、一方 $\{ \langle a(x \pm \frac{1}{x}) \rangle_{\mathbf{R}} \}_{a \in \mathbf{R}^\times}$ と $\mathcal{S}_{\mathbf{R}}$ のあいだには2:1の対応がある。

以後 $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ を \mathbf{R}^2 と同一視する。

次に [Mil92] から、 $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ での双曲的成分 B, C, D, E の配置を引用し、これらの事実に双曲成分 (escape locus) についての考察を加え、分岐に付いての議論のために幾つかの領域を用意する。

2.2.1 双曲的成分 (Type D) の実部

相異なる2個の吸引固定点を持つ関数の共役類からなる双曲的成分 (Type D) $D_{1,1}$ の実部は

$$D_{1,1} = \{(\sigma_1, \sigma_2); -2\sigma_1 + 1 < \sigma_2 < 2\sigma_1 - 3\}.$$

また双曲的 成分 (Type D) $D_{1,2}$ の実部は

$$D_{1,2} = \{(\sigma_1, \sigma_2); -2\sigma_1 - 1 < \sigma_2 < -2\sigma_1 + 1, \sigma_2 < 2\sigma_1 - 3\}.$$

その他の disjoint 成分の実部は半平面 $\{\sigma_1 < -6\}$ に存在する (P.42 of [Mil92])。

2.2.2 双曲的 成分 (Type E) の実部

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ では双曲的 成分 (Type E) は連結であるが、その実部は2つの部分に分かれる：その上部を E_1 、下部を E_2 とする。 E_1 に属する関数は吸引固定点以外にはどんな実周期点をも持ち得ないことが知られている (Caption of Figure 16 in [Mil92])。この事実は後の我々の議論での最も重要なことである。

双曲的 成分 (Type E) の実部 $E = E_1 \cup E_2^{(1)} \cup E_2^{(2)}$ の境界は次の曲線で与えられる (

2.2.3 双曲的 成分 (Type B) の実部

Per₂-bend として次の領域を定義する：

$$\{(\sigma_1, \sigma_2); -2\sigma_1 - 1 < \sigma_2 < -2\sigma_1 + 1, \sigma_1 > -6, \sigma_2 > 2\sigma_1 - 3\}.$$

Per₂-bend に属する関数は type B または type C である。従って2つの critical orbits は終局的に同じものである。

2.2.4 3本の分岐実直線

$n = 1, 2$ に対して Per _{n} (μ) は直線であり、さらに $\mu = 1$ のときには Per₂(1) = Per₁(-1) である。後の議論のために次の3本の実直線を分岐実直線と呼ぶ：

$$\text{Per}_1(1) : \sigma_2 = 2\sigma_1 - 3 \tag{2}$$

$$\text{Per}_1(-1) : \sigma_2 = -2\sigma_1 + 1 \tag{3}$$

$$\text{Per}_2(-1) : \sigma_2 = -2\sigma_1 - 1 \tag{4}$$

分岐実直線は双曲成分 $E_1, D_{1,1}, D_{1,2}$ 及び Per₂-bend の境界である。

3 非単調な分岐過程をもつ2次有理関数族

ここでは M. Bier and T. C. Bountis [BB84] によって与えられ、H. E. Nusse and J. A. Yorke ([NY88]) によって書き改められた次の2パラメータ数2次有理関数族の分岐について述べる：

$$\left\{ f_{m,r}(x) = m \left(r + \frac{x}{1+x^2} \right) \right\}_{(m,r) \in \mathbf{R}^2}$$

ここで $m = 0$ の場合に $f_{0,r}(x)$ は、コンパクト化されたモジュライ空間の中での有理関数の極限としての定数関数として意味を持つことに注意する。また $f_{m,r}$ と $f_{m,-r}$ とは共役であることから、以下では $0 \leq r$ の場合のみ考えれば良い。

Schwarzian derivative: $Sf = f'''(x)/f'(x) - \frac{3}{2}(f''(x)/f'(x))^2$ の符号は局所的な分岐のタイプを決めることが知られている。 $f_{m,r}$ の Schwarzian derivative は常に負なので、この族には regular period-doubling または regular period-halving bifurcations しか生じない。

定理 1 (see [FN98]) パラメータ r を固定して得られる1パラメータ関数族 $\{f_{m,r}(x)\}_m$ は、モジュライ空間 $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ で、既約代数曲線 \mathcal{H}_r 上の全ての点と一致する。 $r (\neq \frac{1}{2}, 0)$ に対しては次の方程式が対応する既約4次代数曲線 \mathcal{H}_r の定義方程式である：

$$\begin{aligned} H_r(\sigma_1, \sigma_2) = & -r^2\sigma_1^4 + (8r^2 - 2)\sigma_1^3 + ((8r^2 - 1)\sigma_2 - 128r^4 + 8r^2 + 1)\sigma_1^2 \\ & + ((-32r^2 + 8)\sigma_2 + 512r^4 - 96r^2 - 12)\sigma_1 + (-16r^2 + 4)\sigma_2^2 \\ & + (512r^4 - 96r^2 - 12)\sigma_2 - 4096r^6 + 1536r^4 - 144r^2 + 36 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

$r = \frac{1}{2}$ のときには3次代数曲線 $\mathcal{H}_{1/2}$ ：

$$H_{\frac{1}{2}}(\sigma_1, \sigma_2) = -\sigma_1^3 - 2\sigma_1^2 + (4\sigma_2 - 24)\sigma_1 + 8\sigma_2 - 64 = 0. \quad (6)$$

$r = 0$ のときには \mathcal{H}_0 ：

$$H_0(\sigma_1, \sigma_2) = 2\sigma_1^3 + \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1^2 - 4\sigma_2^2 - 8\sigma_1\sigma_2 + 12\sigma_1 + 12\sigma_2 - 36 = 0. \quad (7)$$

がそれぞれ対応する。

$r = 0$ のときについて：このとき曲線 \mathcal{H}_0 は、

$$f_{m,0}(x) = m \left(\frac{x}{1+x^2} \right) = m \left(\frac{1}{x + \frac{1}{x}} \right) \sim \frac{1}{m} \left(x + \frac{1}{x} \right),$$

に注意すれば J. Milnor ([Mil92]) による次の結果とリンクする：symmetry locus \mathcal{S} の関数は次のようなパラメータ表示を持つ

$$\mathcal{S} = \left\{ \left\langle k \left(z + \frac{1}{z} \right) \right\rangle ; k \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}.$$

我々のモデルの変数 r, m, σ_1, σ_2 を \mathbb{R} から \mathbb{C} に拡張すれば $\mathcal{S} = \{ \langle f_{m,0} \rangle ; m \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \}$. 従って次の結果を得る。

系 1 (see [FN98]) 曲線 \mathcal{H}_0 は $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ で symmetry locus \mathcal{S} と一致する。

以下では r を固定したときの関数族 $\{f_{m,r}\}_m$ の分岐ダイアグラムを調べる：パラメータ m が単調に変化するとき代数曲線 $\mathcal{H}_r(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ がモジュライ空間のどの部分を通過するかを調べることで、関数族

$$\left\{ f_{m,r}(x) = m \left(r + \frac{x}{1+x^2} \right) \right\}_{(m,r) \in \mathbb{R}^2}$$

の分岐を決定する。

例 1 (see [FN98]) $r = 0.58$ とする。 $\{f_{m,0.58}\}$ は period-doubling と period-halving bifurcations をともにもつ。図 3 に 3 分岐直線とともに代数曲線 $H_{0.58} = 0$ を、また図 4 に対応する関数族の非単調分岐ダイアグラムを示した。この分岐はさらに詳しく言えばいわゆる primary bubbling bifurcation ([BB84]) である。

定理 2 (see [FN98]) r を範囲 $\frac{3\sqrt{3}}{8} \leq r$ にとり固定すれば、 $\{f_{m,r}\}$ には如何なる分岐も生じない。さらにこの値 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ は次の意味で最良のものである： $r < \frac{3\sqrt{3}}{8}$ であれば関数族 $\{m(r + \frac{x}{1+x^2})\}$ は必ず周期倍分岐を引き起こす。

例 2 最後に anti-monotone 分岐を生じている族 $r = 0.54$ の場合の代数曲線 (図 5) と、対応する関数族の分岐ダイアグラム (図 6) を示しておく。

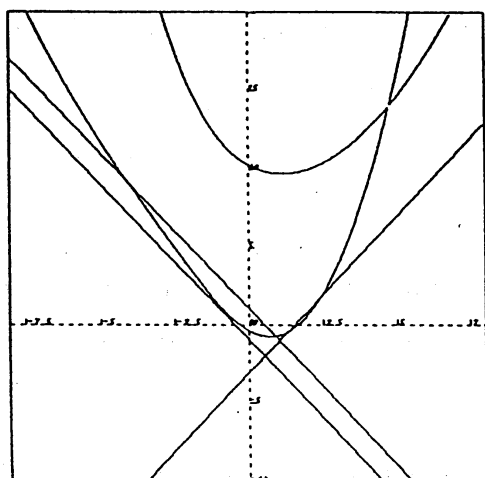


Figure 3: The curve $H_{0.58} = 0$ together with the bifurcation lines. $-8 < \sigma_1 < 8$, $-10 < \sigma_2 < 20$.

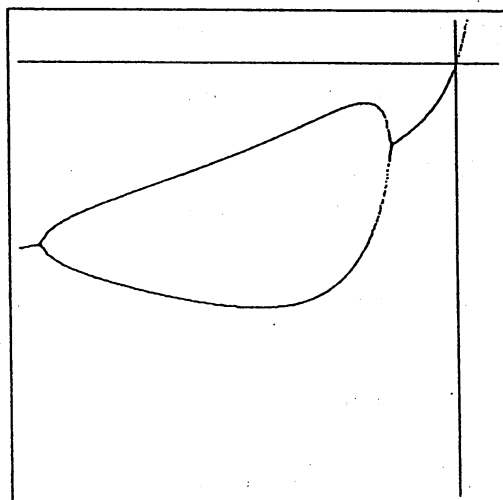


Figure 4: Period-bubbling bifurcation diagram corresponding to $H_{0.58}$. $-10 \leq m \leq 1$, $-2 \leq x \leq 0.2$.

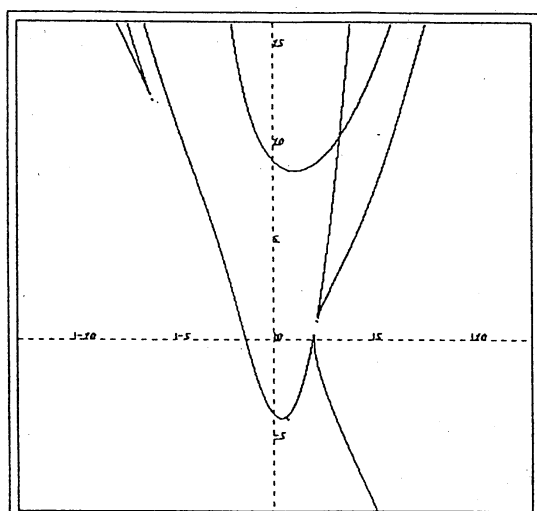


Figure 5: The curve $H_{0.54} = 0$ together with the bifurcation lines. $-8 < \sigma_1 < 8$, $-15 < \sigma_2 < 25$.

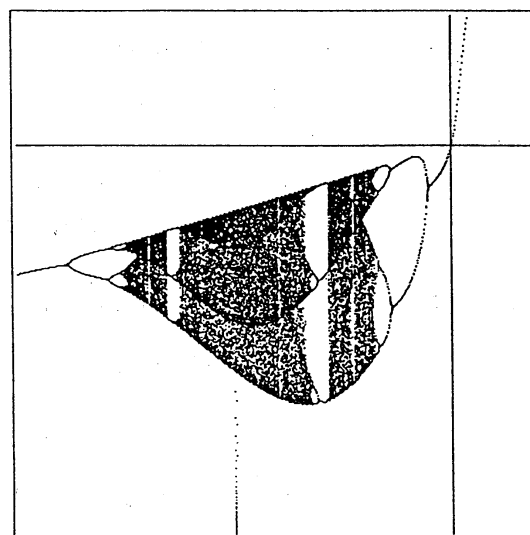


Figure 6: Bifurcation diagram corresponding to $H_{0.54}$. $-10 \leq x \leq 10$.

References

- [BB84] M. Bier and T. C. Bountis. Remerging Feigenbaum Trees in Dynamical Systems. *Phys. Lett. A*, 104A(5):239–244, 1984.
- [DH85] A. Douady and J. Hubbard. *Etude dynamique des polynomes complexes I,II*. Publ. Math. Orsay, 1984,1985.
- [FN95] M. Fujimura and K. Nishizawa. Bifurcations of Nusse-Yorke's family in the quadratic rational functions. to appear in koukyuuroku of RIMS, Kyoto Univ.
- [FN98] M. Fujimura and K. Nishizawa. Bifurcations and Algebraic Curves for Quadratic Rational functions $\{mf(x)\}_m$. to appear in DCDIS, Watam Press, Waterloo
- [Jona93] T. Jonassen A short note on antimonotonicity in bifurcation diagrams of families of one-dimensinal maps *Preprint Series, IMU OSLO*,41 ,1993 .
- [KKY92] I. Kan, H. koçak, J. Yorke Antimonotonicity: concurrent creation and annihilation of periodic orbits *Annals of Math.*, 136 (1992), 219–252
- [Mil92] J. Milnor. Remarks on quadratic rational maps. Preprint # 1992/14, SUNY Stony Brook, 1992.
- [MT88] J. Milnor and W. Thurston. On iterates maps of the interval. *Lecture Notes in Math.*, 1342:465–563, 1988.
- [New79] K. Newhouse The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms,. *Publ.,I.H.E.S.*, 50: 101 – 151, 1979
- [Nis96] K. Nishizawa. Nonmonotone Bifurcation for Quadratic Rational Functions $\{mf(x)\}_m$. to appear in Proceedings of WCNA96
- [NY88] H. E. Nusse and J. A. Yorke. Period Halving for $x_{n+1} = MF(x_n)$ Where F Has Negative Schwarzian D erivative. *Phys. Lett. A*, 127(6,7):328–334, 1988.
- [Ree90] M. Rees. Components of degree two hyperbolic rational maps. *Invent. Math.*, 100:357–382, 1990.

- [Rob83] C. Robinson Bifurcation to infinitely many sinks *Comm. Math. Phys.*, 90:433–459, 1983.
- [Whi83] D. Whitley. Discrete Dynamical Systems in Dimensions One and Two. *Bull. London Math. Soc.*, 15:177–217, 1983.

Kiyoko NISHIZAWA
Department of Math., Josai Univ.
1-1, Keyakidai, Sakado, Saitama, 350-02 JAPAN
e-mail: kiyoko@math.josai.ac.jp