数理解析研究所講究録
1031巻 1998年 157-167

非拡大写像及び非拡大半群に対する強収束定理

玉川大学工学部 塩路直樹 (NAOKI SHIOJI)

1. 序

1975年, Baillon [2] は, Hilbert 空間における最初の非線形エルゴード定理を示した. Bruck [6, 7] はそれを拡張し次の定理を得た.

定理 1 (Bruck). C を Banach 空間 E における閉凸集合とする. T を C から自身への非拡大写像で, その不動点集合 $F(T)$ が空でないものとする. もし, E が一様凸でそのノルムが Fréchet 微分可能ならば, 各 $x \in C$ に対して, $\{1/(n+1)\sum_{i=0}^{n} T^i x\}$ は $F(T)$ のある元に弱収束する.

もし, $C = E$ で T が線形でならば, $\{1/(n+1)\sum_{i=0}^{n} T^i x\}$ は強収束することが知られている. したがって, 線形のエルゴード定理を自然な形で拡張した非拡大写像に対する強収束定理があるかということは, 大きな問題であった. ところで, 非拡大写像に対する強収束定理は全くなかったわけではなく, 次の有名な定理があった ([15, 32]).

定理 2 (Reich, Takahashi-Ueda). C 及び E, T を定理 1 のようにする. E のノルムは一様に Fréchet 微分可能にであるか, または, E は一様凸でそのノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとする. このとき, C から $F(T)$ の上への sunny でかつ非拡大なレトラクション P が存在する. さらに, $\{a_n\}$ を, $0 < a_n \leq 1$ かつ $a_n \to 0$ を満たす実数列とし, x を C の元, $\{x_n\}$ を

$$x_n = a_n x + (1 - a_n) T x_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

で定義される点列とする. このとき, $\{x_n\}$ は Px に強収束する.

この $\{x_n\}$ が T の不動点に強収束するので, Halpern [8] と Reich [16] は, $0 \leq b_n \leq 1$ かつ $b_n \to 0$ として, 次の式で定義される反復法を考えた.

$$y_0 \in C, \quad y_{n+1} = b_n x + (1 - b_n) T y_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

この列に対して, Reich [16] は次の問題を提出した.

問題 (Reich). E を Banach 空間とする. 非拡大写像に対して不動点性を持つ弱コンパクト凸な E の任意の部分集合 C 及び C 上の任意の非拡大写像 T, 任意の $x \in C$ に対して, (1.1) で定義される点列 $\{y_n\}$ が常に T の不動点に収束するような数列 $\{b_n\}$ は存在するか?

一方, Miyadera-Kobayasi [13] は, 非拡大写像の族に対する次の収束定理を得た.

定理 3 (Miyadera-Kobayasi). E を一様凸な Banach 空間で, そのノルムが Fréchet 微分可能であるとする. C を E における閉凸集合とする. $\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上の非拡大半群で, その共通不動点集合 $\bigcap_{t\geq 0} F(T(t))$ が空でないものとする. このとき, 各 $x \in C$ に対して, $\{1/t \int_0^t T(t)x\,dt\}$ は $\bigcap_{t\geq 0} F(T(t))$ のある元に弱収束する.

一般的に, $\{1/t\int_0^t T(t)x\,dt\}$ は強収束しない. したがって, $\bigcap_{t\geq 0} F(T(t))$ の元に強収束する自然な反復法が存在するかということもまた問題であった.

この論文では, 非拡大写像及び非拡大半群に対する強収束についての結果を述べる. まず, Reich の問題に対して解答を与える. これは, Wittmann [33] の結果の拡張を与えることにもなる. 次に, [19, 20] における Shimizu-Takahashi の考えと [10, 11, 18, 29, 30] 等において発展してきた非線形エルゴード理論の方法を用い, 非拡大半群に対する強収束定理を得る. これは, [19, 20] における Shimizu-Takahashi の結果の拡張を与えることにもなる.

2. 準備

この論文では, ベクトル空間はすべて実空間とし, $\mathbb{N}$ によって, 非負整数全体からなる集合を表す.

E を Banach 空間とする. C を E の部分集合で, T を C から自身への写像とする. $\overline{\mathrm{co}}C$ によって, C の閉凸包を表し, $F(T)$ によって, 集合 $\{x\in C : x = Tx\}$ を表す. すべての $x, y \in C$ に対し $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つとき, T は**非拡大**であるという.

正数 r に対して, B_r により, 原点中心で半径 r の E における閉球を表す. E が**一様凸**であるとは, 任意の正数 ε に対して, $x, y \in B_1$ かつ $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ならば $\|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta$ となる正数 δ が存在することである. E が一様凸であることと, 関数 $x \mapsto \|x\|^2$ が E の各有界部分集合上**一様凸**であること, すなわち, 任意の正数 r, ε に対して, $x, y \in B_r$ かつ $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ならば $\|(x + y)/2\|^2 \leq (\|x\|^2 + \|y\|^2)/2 - \delta$ となる正数 δ が存在することは同値である. ([28, 34] 参照.)

一様凸空間における非拡大写像の次の素晴らしい性質を Bruck [7] は得た.

命題 (Bruck). D を一様凸な Banach 空間における有界閉凸集合とする. $N(D)$ で, D から自身への非拡大写像全体を表し, 各 $\eta > 0$ と $T \in N(D)$ に対して, $F_\eta(T) = \{x \in D : \|Tx - x\| \leq \eta\}$ とする. このとき, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $T \in N(D)$ ならば $\overline{\mathrm{co}}F_\delta(T) \subset F_\varepsilon(T)$ を満たす $\delta > 0$ が存在する.

(ii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{y\in D\\ T\in N(D)}} \left\| \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T^i y - T\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T^i y\right)\right\| = 0.$

E^* を E の双対空間とする. $\langle x, x^*\rangle$ により $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を表す. また, J により E から 2^{E^*} への**双対写像**を表す. すなわち, 各 $x \in E$ に対し $Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$ とする. $2J$ は $x \mapsto \|x\|^2$ の劣微分となる. すなわち, $\|y\|^2 \geq \|x\|^2 + 2\langle y - x, Jx\rangle$ がすべての $x, y \in E$ に対して成り立つ. $U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ と置く. E のノルムが **Gâteaux 微分可能**であるとは, 各 $x, y \in U$ に対し, 次の極限値

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

が存在することである. E のノルムが**一様に Gâteaux 微分可能**であるとは, 各 $y \in U$ に対し, 極限値(2.1) が $x \in U$ について一様に存在することである. E のノルムが **Fréchet 微分可能**であるとは, 各 $x \in U$ に対し, 極限値(2.1) が $y \in U$ について一様に存在することである. E のノルムが**一様に Fréchet 微分可能**であるとは, 極限値(2.1) が $x, y \in U$ について一様に存在することである. E のノルムが Gâteaux 微分可能ならば, E, E^* にそれぞれノルム位相, 汎弱位相を入れたとき, 双対写像は一価連続写像になることや, E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能ならば, 先程と同じ位相で, E の有界部分集合上双対写像は一様連続になることが知られている.

C を E の凸部分部分集合とし, K を C の空でない部分集合とする. P を C から K の上への**レトラクション**, すなわち, $Px = x$ がすべての $x \in K$ に対して成り立つとする. このとき, P が

sunny であるとは, $Px+t(x-Px)\in C$ を満たす $x\in C$ と $t\geq 0$ に対して $P(Px+t(x-Px))=Px$ が成り立つことである. [5, 定理 3] または [14, 補助定理 2.7] により, E のノルムが Gâteaux 微分可能であれば, C から K の上へのレトラクション P が sunny かつ非拡大であることは, すべての $x\in C$ 及び $y\in K$ に対し $\langle x-Px, J(y-Px)\rangle\leq 0$ が成り立つことと同値である. よって, sunny かつ非拡大なレトラクションは高々1つしか存在しないことがわかる. また, E が Hilbert 空間で, K が C の凸部分集合のとき, P が sunny かつ非拡大なレトラクションであることは, P が距離射影であること, すなわち, すべての $x\in C$ に対し $\|x-Px\|=\min_{y\in K}\|x-y\|$ が成り立つことと同値である.

S を半群とする. S 上の実数値有界関数全体の空間を $B(S)$ と表し, 通常の上限ノルムを入れる. $s\in S$ 及び $f\in B(S)$ に対して, $B(S)$ 上の写像 $l_s f$ を

$$(l_s f)(t)=f(st), \qquad t\in S$$

と定める. X を $B(S)$ の部分空間で, $1\in X$ とし, X^* をその双対空間とする. この論文中では, $\mu\in X^*$ と $f\in X$ に対して, $\mu(f)$ の代わりに $\mu_t(f(t))$ と書くことがある. $\mu\in X^*$ が X 上の **mean** であるとは, $\|\mu\|=\mu(1)=1$ が成り立つことである. μ が X 上の mean であることは, すべての $f\in X$ に対して $\inf f(S)\leq\mu(f)\leq\sup f(S)$ が成り立つことと同値である. X は l_s -不変であるとする, すなわち, すべての $s\in S$ に対し $l_s(X)\subset X$ が満たされているとする. X 上の mean μ が**左不変**であるとは, すべての $s\in S$ 及び $f\in X$ に対して$\mu(l_s f)=\mu(f)$ が成り立つことである. X 上の mean の列 $\{\mu_n\}$ が**漸近的に強左不変**であるとは, すべての $s\in S$ に対して $\|\mu_n-l_s^*\mu_n\|\to 0$ が成り立つことである. S が可換の場合は, mean が左不変であることを単に**不変**と言い, mean の列が漸近的に強左不変なことを単に**漸近的に強不変**と言う ([10, 12]). $B(\mathbb{N})$ 上の不変な mean は, 特に **Banach 極限**と呼ばれている ([3]).

E を回帰的 Banach 空間とする. X を $B(S)$ の部分空間で, 1 を含むとし, μ を X 上の mean とする. f を S から E への写像で, $f(S)$ が E の有界部分集合であり, すべての $x^*\in E^*$ に対し $t\mapsto\langle f(t), x^*\rangle$ は X の元とする. このとき, すべての $x^*\in E^*$ について $\langle x_0, x^*\rangle=\mu_t\langle f(t), x^*\rangle$ を満たす $x_0\in E$ が存在する. この定義は Pettis 積分の定義とよく似ていることを注意しておく ([9]). [10] に従い, x_0 を $\int f(t)\,d\mu(t)$ と表す.

3. 結果

まず, Reich の問題に対する解答を [21] の通り与える. E が Hilbert 空間の場合, この結果は Wittmann [33] によって得られていることを注意しておく.

定理 4 (Shioji-Takahashi). C を Banach 空間 E における閉凸集合とする. E のノルムは一様に Fréchet 微分可能であるか, E が一様凸でそのノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるかを仮定する. T を C から自身への $F(T)\neq\emptyset$ を満たす非拡大写像とし, P を C から $F(T)$ の上への sunny かつ非拡大なレトラクションとする. $\{b_n\}$ を, $0\leq b_n\leq 1$ かつ $b_n\to 0$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n=\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}|b_{n+1}-b_n|<\infty$ を満たす実数列とする. x を C の元とし, $\{y_n\}$ を(1.1)で定義する. このとき, $\{y_n\}$ は Px に強収束する.

次に, 非拡大半群に対する強収束定理を示す. その前に, 非拡大半群や作用素 T_μ の定義を述べる.

S を半群とし, C を回帰的 Banach 空間 E の閉凸部分集合とする. 写像族 $\{T_t : t\in S\}$ がC 上の**非拡大半群**であるとは, すべての $t, s\in S$ に対し, T_t は C から自身への非拡大写像で, $T_{ts}=T_tT_s$ が成り立つことである. $\{T_t : t\in S\}$ を, $\{T_t u : t\in S\}$ が有界になる $u\in C$ が存在する C 上の非拡大半群とする. X を $B(S)$ の部分空間で, 1 を含み, すべての $x\in C$ 及び $x^*\in E^*$ に対して写像 $t\mapsto\langle T_t x, x^*\rangle$ は X の元とする. [18] に従い, 各 X 上の mean μ 及び $x\in C$ に対し$\int T_t x\,d\mu(t)$

を $T_\mu x$ とも書く. すなわち, $T_\mu x$ は, すべての $x^* \in E^*$ ついて $\langle T_\mu x, x^*\rangle = \mu_t\langle T_t x, x^*\rangle$ を満たす C の元である. X 上の mean μ に対して, T_μ は C 上の非拡大写像となり, $\bigcap_{t\in S} F(T_t) \subset F(T_\mu)$ を満たす.

ここで, 半群 S 及び $B(S)$ の部分空間 X, 漸近的に強不変な mean の列 $\{\mu_n\}$, C 上の非拡大半群 $\{T_t : t \in S\}$, 作用素 T_μ の典型的な例を 2 つ上げる.

例 1. $S = \mathbb{N}$ かつ $X = B(\mathbb{N})$ とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, μ_n を

$$\mu_n(f_0, f_1, \cdots) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f_i, \qquad (f_0, f_1, \cdots) \in X$$

で定義される $B(\mathbb{N})$ 上の mean とする. このとき, $\{\mu_n\}$ は漸近的に強不変である. T を, 回帰的 Banach 空間の閉凸部分集合 C から自身への $F(T) \neq \emptyset$ を満たす非拡大写像とする. $\{T_t : t \in \mathbb{N}\} = \{I, T, T^2, \cdots\}$ と置く. このとき, $\{T_t : t \in \mathbb{N}\}$ は C 上の非拡大半群で,

$$T_{\mu_n} x = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T^i x, \qquad x \in C$$

を満たす.

例 2. $S = [0, \infty)$ とし, X を S 上の実数値有界可測関数全体からなる空間とする. 可測性の定義から, $1 \in X$ 及びすべての $s \in S$ に対し $l_s(X) \subset X$ となることは明らかである. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, μ_n を

$$(\mu_n)_t(f(t)) = \frac{1}{\gamma_n}\int_0^{\gamma_n} f(t)\,dt, \qquad f \in X$$

で定義される X 上の mean とする. ただし, $\{\gamma_n\}$ は$\gamma_n \to \infty$ を満たす正数列とする. このとき, $\{\mu_n\}$ は漸近的に強不変である. $\{T(t) : t \geq 0\}$ を, 一様凸な Banach 空間における m -増大作用素 A によって生成される非拡大半群とし, $C = \overline{D(A)}$ と置く. ただし, 0 は A の値域に含まれているとしておく. このとき, C は凸集合となり, その軌道が有界な C の元が存在する. さらに,

$$T_{\mu_n} x = \frac{1}{\gamma_n}\int_0^{\gamma_n} T(t)x\,dt, \qquad x \in C$$

となることもわかる.

さて, 定理 2 の非線形半群版となる定理を示す. これは, [27] で得られている.

定理 5 (Shioji–Takahashi). E を一様凸な Banach 空間で, そのノルムは一様に Gâteaux 微分可能であるとする. C を E の閉凸部分集合とする. S を半群とし, $\{T_t : t \in S\}$ を, $\bigcap_{t\in S} F(T_t)$ が空でない C 上の非拡大半群とする. X を $B(S)$ の部分空間で, 1 を含み, すべての $s \in S$ に対し l_s -不変で, すべての $x \in C$ 及び $x^* \in E^*$ について写像 $t \mapsto \langle T_t x, x^*\rangle$ は X の元とする. もし, X 上に左不変な mean が存在するなら, C から $\bigcap_{t\in S} F(T_t)$ の上への sunny かつ非拡大なレトラクションが存在する. さらに, $\{\mu_n\}$ を漸近的に強左不変な X 上の mean の列とし, P を C から $\bigcap_{t\in S} F(T_t)$ への sunny かつ非拡大なレトラクションとする. $\{a_n\}$ を, $0 < a_n \leq 1$ 及び $a_n \to 0$ を満たす実数列とする. x を C の元で, $\{x_n\}$ を

$$x_n = a_n x + (1 - a_n) T_{\mu_n} x_n, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

によって定義される列とする. このとき, $\{x_n\}$ は Px に強収束する.

註 1. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, (3.1) を満たす $x_n \in C$ がただ 1 つ存在することは, Banach の縮小写像の不動点原理からわかる.

註 2. [31] により, 条件 $\bigcap_{t\in S} F(T_t) \neq \emptyset$ は有界な軌道が存在すること, すなわち, $\{T_t u : t \in S\}$ が有界となる $u \in C$ が存在することで置き換えられる.

次に, 非拡大半群に対するもう 1 つの強収束定理を示す. その前に, mean が単調収束であるということを定義しておく.

S を半群とし, X を $B(S)$ の部分空間で, 1 を含み, X の有界列 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ に対し写像 $t \mapsto \sup_n f_n(t)$ がまた X の元になるものとする. X 上の mean μ が**単調収束性を持つ**とは, $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$ を満たす X の有界列 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ に対して, $\mu_t(\lim_n f_n(t)) = \lim_n \mu_t(f_n(t))$ が成り立つこととする.

可測性の定義及び通常の単調収束定理により, 例 2 に現れる X 及び mean μ_n は上の条件を満たすことを注意しておく.

さて, 定理 4 の非線形半群版となる定理を示す. これも, [27] で得られている.

定理 6 (Shioji-Takahashi). C 及び E, S, $\{T_t : t \in S\}$, X を定理 5 の通りとする. X の任意の有界列 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ に対し, 写像 $t \mapsto \sup_n f_n(t)$ は X の元になることを仮定する. $\{\mu_n\}$ を漸近的に強左不変な単調収束性を持つ mean の列とし, P を C から $\bigcap_{t\in S} F(T_t)$ の上への sunny かつ非拡大なレトラクションとする. $\{b_n\}$ を, $0 \le b_n \le 1$ 及び $b_n \to 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$ を満たす実数列とする. x を C の元とし, $\{y_n\}$ を

$$y_0 \in C, \quad y_{n+1} = b_n x + (1 - b_n) T_{\mu_n} y_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

によって定義される列とする. このとき, $\{y_n\}$ は Px に強収束する.

註 3. E が Hilbert 空間の場合は, X に対する追加の仮定や, 各 μ_n が単調収束性を持つという仮定は不要である. ([24] を参照せよ.)

定理 5 及び定理 6 から直接導かれる結果として, それぞれ例 1, 例 2 に対応する次の系を得る. これらの結果は, [22, 23, 25] で得られたものである.

系 1. E を一様凸な Banach 空間で, そのノルムは一様に Gâteaux 微分可能であるとする. C を E の閉凸部分集合とする. T を $F(T) \neq \emptyset$ を満たす C から自身への非拡大写像とし, P を C から $F(T)$ の上への sunny かつ非拡大なレトラクションとする. $\{a_n\}$ 及び $\{b_n\}$ を, $0 < a_n \le 1$ 及び $a_n \to 0$, $0 \le b_n \le 1$, $b_n \to 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$ を満たす実数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ 及び $\{y_n\}$ を

$$x_n = a_n x + (1 - a_n) \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} T^j x_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

及び

$$y_0 \in C, \quad y_{n+1} = b_n x + (1 - b_n) \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} T^j y_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

で定義される列とする. このとき, $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ はともに Px に強収束する.

系 2. C 及び E を系 1 のようにとる. $\{T(t) : t \ge 0\}$ を例 2 のようにとる. このとき, C から $\bigcap_{t\ge 0} F(T(t))$ の上への sunny かつ非拡大なレトラクション P が存在する. さらに, $\{a_n\}$ 及び $\{b_n\}$ を系 1 のようにとり, $\{\gamma_n\}$ を例 2 のようにとる. x を C の元とし, $\{x_n\}$ 及び $\{y_n\}$ を

$$x_n = a_n x + (1 - a_n) \frac{1}{\gamma_n} \int_0^{\gamma_n} T(t) x_n \, dt, \qquad n \in \mathbb{N}$$

及び

$$y_0 \in C, \quad y_{n+1} = b_n x + (1-b_n)\frac{1}{\gamma_n}\int_0^{\gamma_n} T(t)y_n\,dt, \qquad n \in \mathbb{N}$$

で定義される列とする. このとき, $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ はともに Px に強収束する.

定理 5 及び定理 6 において, 抽象的な mean を用いて結果を得ているため, 次の結果も得られる.

系 3. C 及び E, $\{T(t) : t \geq 0\}$, P, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を系 2 のようにとる. $\{\lambda_n\}$ を 0 に収束する正数列とする. x を C の元とし, $\{x_n\}$ 及び $\{y_n\}$ を

$$x_n = a_n x + (1-a_n)\lambda_n \int_0^\infty e^{-\lambda_n t}T(t)x_n\,dt, \qquad n \in \mathbb{N}$$

及び

$$y_0 \in C, \quad y_{n+1} = b_n x + (1-b_n)\lambda_n \int_0^\infty e^{-\lambda_n t}T(t)y_n\,dt, \qquad n \in \mathbb{N}$$

で定義される列とする. このとき, $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ はともに Px に強収束する.

4. 証明

まず, 定理 4 に対して証明を与える. 次の補助定理の証明は, [21] におけるものと異なることを注意しておく. すなわち, この補助定理の証明のために, Banach 極限についての命題を [21] では用いたが, ここでは直接これを示す.

補助定理 1. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle x - Px, J(y_n - Px)\rangle \leq 0.$

証明. $\{a_m\}$ を, $0 < a_m \leq 1/2$ かつ $a_m \to 0$ を満たす実数列とする. このとき, 各 $m \in \mathbb{N}$ に対し $x_m = a_m x + (1-a_m)Tx_m$ 満たす C の元 x_m が一意に存在する. 定理 2 により, $\{x_m\}$ が Px に強収束することを注意しておく. $R = \sup\bigl(\{\|Tx_m\|\} \cup \{\|x_m\|\} \cup \{\|Ty_n\|\} \cup \{\|y_n\|\}\bigr)$ と置く. $(1-a_m)(Tx_m - y_n) = (x_m - y_n) - a_m(x - y_n)$ により, すべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}(1-a_m)^2\|Tx_m - y_n\|^2 &\geq \|x_m - y_n\|^2 - 2a_m\langle x - y_n, J(x_m - y_n)\rangle \\ &= (1-2a_m)\|x_m - y_n\|^2 + 2a_m\langle x - x_m, J(y_n - x_m)\rangle\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}\langle x - x_m, J(y_n - x_m)\rangle &\leq \frac{1}{2a_m}\bigl((1-a_m)^2\|Tx_m - y_n\|^2 - (1-2a_m)\|x_m - y_n\|^2\bigr) \\ &= \frac{1-2a_m}{2a_m}\bigl(\|Tx_m - y_n\|^2 - \|x_m - y_n\|^2\bigr) + \frac{a_m}{2}\|Tx_m - y_n\|^2 \\ &\leq \frac{1-2a_m}{2a_m}\bigl((\|Tx_m - Ty_n\| + \|Ty_n - y_n\|)^2 - \|x_m - y_n\|^2\bigr) + 2R^2 a_m \\ &\leq \frac{1-2a_m}{2a_m}\cdot 6R\|Ty_n - y_n\| + 2R^2 a_m\end{aligned}$$

を得る. $\sum_{n=0}^\infty |b_{n+1} - b_n| < \infty$ により $\lim_n \|Ty_n - y_n\| = 0$ が成り立つから, すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle x - x_m, J(y_n - x_m)\rangle \leq 2R^2 a_m$$

を得る. $\{x_m\}$ は Px に強収束し, E のノルムは一様に Gâteaux 微分可能であることから, 結論を得る. □

以上の準備のもとで, [21, 33] で使われた手法により, 定理 4 の証明を与える.

定理 4 の証明. $\varepsilon > 0$ を取る. 補助定理 7 により, $n \geq m$ ならば $2\langle x - Px, J(y_n - Px)\rangle \leq \varepsilon$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ が取れる. $(1 - b_n)(Ty_n - Px) = (y_{n+1} - Px) - b_n(x - Px)$ により, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$(1 - b_n)^2\|Ty_n - Px\|^2 \geq \|y_{n+1} - Px\|^2 - 2b_n\langle x - Px, J(y_{n+1} - Px)\rangle$$

が成り立つ. したがって, すべての $n \geq m$ に対し $\|y_{n+1} - Px\|^2 \leq b_n\varepsilon + (1 - b_n)\|y_n - Px\|^2$ を得る. 帰納法により, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\|y_{n+m} - Px\|^2 \leq \left(\prod_{j=0}^{n-1}(1 - b_{m+j})\right)\|y_m - Px\|^2 + \varepsilon \leq \exp\left(-\sum_{j=0}^{n-1} b_{m+j}\right)\|y_m - Px\|^2 + \varepsilon$$

が成り立つ. $\sum_n b_n = \infty$ だから, $\overline{\lim}_n \|y_n - Px\|^2 \leq \varepsilon$ を得る. $\varepsilon > 0$ は任意だから, $\{y_n\}$ は Px に強収束する. □

次に, [27] におけるように, 定理 5 及び定理 6 の証明を与える. ただし, [27] では, 漸近的に非拡大な半群に対して証明を与えた.

次の補助定理は, 定理 5 及び定理 6 の証明において本質的である. これは, [1, 11] においても重要な役割を果たす. [11] では, この補助定理を用いて amenable 半群に対するエルゴードレトラクションの存在を示し, 非線形エルゴード理論の 10 数年間未解決であった問題を解決した. この補助定理の証明は, 超準解析を用いて Banach 極限を作る手法からヒントを得た ([17] を参照せよ).

補助定理 2. C を一様凸 Banach 空間 E における閉凸集合とする. S を半群とし, $\{T_t : t \in S\}$ を C 上の非拡大半群で, その共通不動点集合 $\bigcap_{t\in S} F(T_t)$ が空でないものとする. X を $B(S)$ の部分空間で, $1 \in X$ を満たし, すべての $s \in S$ に対し l_s -不変で, すべての $x \in C$ 及び $x^* \in E^*$ に対し写像 $t \mapsto \langle T_t x, x^*\rangle$ は X の元とする. $\{\mu_n\}$ を X 上の漸近的に強左不変な mean の列とする. このとき, 各 $r > 0$ 及び $t \in S$ に対し

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{u \in C\cap B_r} \|T_{\mu_n}u - T_t(T_{\mu_n}u)\| = 0$$

が成り立つ.

証明. $r > 0$ かつ $t \in S$ とする. $z \in \bigcap_{t\in S} F(T_t)$ を固定し, $D = \{x \in C : \|x - z\| \leq r + \|z\|\}$ と置く. $C \cap B_r \subset D$ かつ $T_t(D) \subset D$, すべての $x \in D$ に対し $\|x\| \leq r + 2\|z\|$ となることを注意しておく. 各 $\eta > 0$ に対し, $F_\eta(T_t; D) = \{x \in D : \|x - T_t x\| \leq \eta\}$ と置く. $\varepsilon > 0$ を任意に取る. 2 節の命題により,

$$(\overline{\mathrm{co}} F_\delta(T_t; D) + B_\delta) \cap D \subset F_\varepsilon(T_t; D) \tag{4.1}$$

を満たす $\delta > 0$, 及び, $x \in D$ ならば $\left\|\frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}(T_t)^i x - T_t\left(\frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}(T_t)^i x\right)\right\| \leq \delta$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ が取れる. よって, すべての $s \in S$ 及び $u \in C \cap B_r$ に対し

$$\left\|\frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}(T_t)^i(T_s u) - T_t\left(\frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}(T_t)^i(T_s u)\right)\right\| \leq \delta$$

を得る. したがって, すべての X 上の mean μ 及び $u \in C \cap B_r$ に対し,

$$\int \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} T_{t^i s}u \, d\mu(s) \in \overline{\mathrm{co}}\left\{\frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} T_{t^i s}u : s \in S\right\} \subset \overline{\mathrm{co}} F_\delta(T_t; D) \tag{4.2}$$

を得る．ただし, $t^0 s$ は s を表す．$\{\mu_n\}$ の漸近的強左不変性により, すべての $n \geq n_0$ 及び $i = 1, \ldots, N$ に対し $\|\mu_n - l_{ti}^* \mu_n\| < \delta/(r + 2\|z\|)$ を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が取れる．よって, すべての $u \in C \cap B_r$ 及び $n \geq n_0$ に対し

$$\begin{aligned}
&\left\| T_{\mu_n} u - \int \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} T_{t^i s} u \, d\mu_n(s) \right\| \\
&\quad = \sup_{\|u^*\|=1} \left| (\mu_n)_s \langle T_s u, u^* \rangle - \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} (\mu_n)_s \langle T_{t^i s} u, u^* \rangle \right| \\
&\quad \leq \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N} \sup_{\|u^*\|=1} \left| (\mu_n)_s \langle T_s u, u^* \rangle - (l_{ti}^* \mu_n)_s \langle T_s u, u^* \rangle \right| \\
&\quad \leq \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N} \|\mu_n - l_{ti}^* \mu_n\| \cdot (r + 2\|z\|) \leq \delta
\end{aligned}$$

が成り立つ．この不等式及び(4.1), (4.2) により, すべての $u \in C \cap B_r$ 及び $n \geq n_0$ に対し $T_{\mu_n} u \in F_\varepsilon(T_t; D)$ を得る．したがって, $\overline{\lim}_n \sup_{u \in C \cap B_r} \|T_{\mu_n} u - T_t(T_{\mu_n} u)\| \leq \varepsilon$ が成り立つ．$\varepsilon > 0$ は任意なので, 結論を得る． □

補助定理 5 の終りまで, C, E, S, $\{T_t : t \in S\}$, X, $\{\mu_n\}$, $\{a_n\}$, x, $\{x_n\}$ は, 定理 5 の通りとする．

補助定理 3. $\{x_{n_i}\}$ を $\{x_n\}$ の部分列とする．このとき,

$$\sup_{y \in C} \varliminf_{i \to \infty} \langle y - z, J(x_{n_i} - z) \rangle \leq 0 \tag{4.3}$$

を満たす $z \in \bigcap_{t \in S} F(T_t)$ が存在する．

証明. E の各有界部分集合上での関数 $u \mapsto \|u\|^2$ の一様凸性により,

$$\overline{\lim_{i \to \infty}} \|x_{n_i} - z\|^2 = \min_{y \in C} \overline{\lim_{i \to \infty}} \|x_{n_i} - y\|^2 \tag{4.4}$$

を満たす $z \in C$ が一意に存在する．$z \in \bigcap_{t \in S} F(T_t)$ を示す．そうではないとすると, $T_t z \neq z$ を満たす $t \in S$ がある．E の各有界部分集合上での関数 $u \mapsto \|u\|^2$ の一様凸性と補助定理 2 により,

$$\overline{\lim_{i \to \infty}} \left\| x_{n_i} - \frac{T_t z + z}{2} \right\|^2 < \frac{1}{2} \left(\overline{\lim_{i \to \infty}} \|x_{n_i} - T_t z\|^2 + \overline{\lim_{i \to \infty}} \|x_{n_i} - z\|^2 \right) \leq \overline{\lim_{i \to \infty}} \|x_{n_i} - z\|^2$$

を得る．z は(4.4) を満たす唯一の C の元だから矛盾である．したがって, $z \in \bigcap_{t \in S} F(T_t)$ である．次に, z は(4.3) を満たすことを示す．$y \in C$ かつ $i \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0, 1]$ ならば

$$\|x_{n_i} - z\|^2 \geq \|x_{n_i} - (\delta y + (1 - \delta) z)\|^2 + 2\delta \langle y - z, J(x_{n_i} - (\delta y + (1 - \delta) z)) \rangle$$

が成り立つから, (4.4) と合わせて, すべての $y \in C$ 及び $\delta \in (0, 1]$ に対し

$$\varliminf_{i \to \infty} \langle y - z, J(x_{n_i} - (\delta y + (1 - \delta) z)) \rangle \leq 0$$

を得る．E のノルムは一様に Gâteaux 微分可能だから, (4.3) を得る． □

補助定理 4. すべての $n \in \mathbb{N}$ 及び $z \in \bigcap_{t \in S} F(T_t)$ に対し, $\langle x_n - x, J(x_n - z) \rangle \leq 0$ が成り立つ．

証明. $n \in \mathbb{N}$ かつ $z \in \bigcap_{t\in S} F(T_t)$ とする. $a_n(x_n - x) = (1-a_n)(T_{\mu_n}x_n - x_n)$ かつ $T_{\mu_n}z = z$ により,

$$\begin{aligned}\langle x_n - x, J(x_n - z)\rangle &= \frac{1-a_n}{a_n}\langle T_{\mu_n}x_n - x_n, J(x_n - z)\rangle \\ &= \frac{1-a_n}{a_n}\big(\langle T_{\mu_n}x_n - T_{\mu_n}z, J(x_n - z)\rangle + \langle z - x_n, J(x_n - z)\rangle\big) \\ &\le \frac{1-a_n}{a_n}\big(\|x_n - z\|^2 - \|x_n - z\|^2\big) = 0\end{aligned}$$

を得る. □

補助定理 5. $\{x_n\}$ は $\bigcap_{t\in S} F(T_t)$ の元に強収束する.

証明. $\{x_{n_i}\}$ を $\{x_n\}$ の任意の部分列とする. 補助定理 3 により, $\underline{\lim}_i\langle x - z, J(x_{n_i} - z)\rangle \le 0$ を満たす $z \in \bigcap_{t\in S} F(T_t)$ が取れる. よって, 補助定理 4 により,

$$\underline{\lim}_{i\to\infty} \|x_{n_i} - z\|^2 \le \overline{\lim}_{i\to\infty} \langle x_{n_i} - x, J(x_{n_i} - z)\rangle \le 0$$

を得る. これは, z に強収束する部分列を $\{x_{n_i}\}$ が含むことを示している. よって, $\{x_n\}$ の各部分列は $\bigcap_{t\in S} F(T_t)$ の元に強収束する部分列を含む. $\{x_{n_i}\}$ 及び $\{x_{m_i}\}$ を, $\{x_n\}$ の部分列で, それぞれ $\bigcap_{t\in S} F(T_t)$ の元 z 及び w に強収束するものとする. 補助定理 4 により, $\langle z - x, J(z - w)\rangle \le 0$ かつ $\langle w - x, J(w - z)\rangle \le 0$ が成り立つので, $z = w$ を得る. したがって, $\{x_n\}$ は $\bigcap_{t\in S} F(T_t)$ の元に強収束する. □

以上の準備のもとで, 定理 5 の証明を与える.

定理 5 の証明. X 上の左不変な mean μ が存在すると仮定する. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mu_n = \mu$ と置く. すると, $\{\mu_n\}$ は漸近的に強左不変な mean の列である. $\{a_n\}$ を, $0 < a_n \le 1$ かつ $a_n \to 0$ を満たす実数列とする. 各 $x \in C$ に対し, $Px = \lim_n x_n$ と置く. ただし, $\{x_n\}$ は(3.1) で定義される列である. 補助定理 5 及び補助定理 4 により, P は定義可能であり, すべての $x \in C$ 及び $z \in \bigcap_{t\in S} F(T_t)$ に対し, $Px \in \bigcap_{t\in S} F(T_t)$ かつ $\langle x - Px, J(z - Px)\rangle \le 0$ が成り立っている. よって, P は C から $\bigcap_{t\in S} F(T_t)$ の上への sunny かつ非拡大な唯一のレトラクションである. 後半部分は, 補助定理 5 により明らかである. □

註 4. $\{a_\alpha\}$ は, $0 < a_\alpha \le 1$ かつ $a_\alpha \to 0$ を満たす実数のネットで, $\{\mu_\alpha\}$ は, すべての $s \in S$ に対し $\lim_\alpha \|\mu_\alpha - l_s^*\mu_\alpha\| = 0$ を満たす X 上の mean のネットで, $\{x_\alpha\}$ は,

$$x_\alpha = a_\alpha x + (1 - a_\alpha)T_{\mu_\alpha}x_\alpha$$

と定められている場合も, $\{x_\alpha\}$ が Px に強収束することは, 同様に示すことができる. このことをはっきりさせるために, 定理 5 の証明は [27] におけるものと少し異なっている.

次に, 定理 6 の証明を与える. 補助定理 7 の終りまで, C, E, S, $\{T_t : t \in S\}$, X, P, $\{\mu_n\}$, $\{b_n\}$, x, $\{y_n\}$ は, 定理 6 に現れるものとする.

補助定理 6. X 上の単調収束性を持つ mean μ に対し, $\overline{\lim}_n \|T_\mu y_n - y_n\| = 0$ が成り立つ.

証明. μ を X 上の単調収束性を持つ mean とする. 測度論の一般論により, X の有界列 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ に対し, $\overline{\lim}_n f_n \in X$ かつ $\overline{\lim}_n \mu_t(f_n(t)) \le \mu_t\bigl(\overline{\lim}_n f_n(t)\bigr)$ が成り立つ. 補助定理 2 と $\{y_n\}$ の定義から, すべての $t \in S$ に対し, $\overline{\lim}_n \|T_t y_n - y_n\| = 0$ が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} \|T_\mu y_n - y_n\|^2 &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_t \langle T_t y_n - y_n, J(T_\mu y_n - y_n)\rangle \\ &\le \mu_t\Bigl(\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle T_t y_n - y_n, J(T_\mu y_n - y_n)\rangle\Bigr) \le 0.\end{aligned}$$

を得る. □

次の補助定理は, 定理 6 の証明に際して本質的である.

補助定理 7. $\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle x - Px, J(y_n - Px)\rangle \le 0.$

証明. $\{a_m\}$ を, $0 < a_m \le 1/2$ かつ $a_m \to 0$ を満たす実数列とする. 註 1 により, 各 $m \in \mathbb{N}$ に対し, $x_m = a_m x + (1 - a_m) T_{\mu_m} x_m$ を満たす C の元 x_m が一意に存在する. この $\{x_m\}$ は Px に強収束することが定理 5 によりわかる. $R = \sup\bigl(\{\|T_{\mu_m} x_m\|\} \cup \{\|x_m\|\} \cup \{\|T_{\mu_m} y_n\|\} \cup \{\|y_n\|\}\bigr)$ と置く. 各 T_{μ_m} は非拡大だから, 補助定理 1 の証明と同様にして, すべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\langle x - x_m, J(y_n - x_m)\rangle \le \frac{1 - 2a_m}{2a_m} \cdot 6R\|T_{\mu_m} y_n - y_n\| + 2R^2 a_m$$

を得る. よって, 補助定理 6 と E のノルムの一様 Gâteaux 微分可能性から, 結論を得る. □

以上の準備のもとで, 定理 4 の証明と同様にして, 定理 6 の証明を与える.

定理 6 の証明. $\varepsilon > 0$ とする. 補助定理 7 により, $n \ge m$ ならば $2\langle x - Px, J(y_n - Px)\rangle \le \varepsilon$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ が取れる. したがって, すべての $m \in \mathbb{N}$ について $\|y_{n+1} - Px\|^2 \le b_n \varepsilon + (1 - b_n)\|y_n - Px\|^2$ が成り立ち, これから, すべての $n \in \mathbb{N}$ について $\|y_{n+m} - Px\|^2 \le \exp\bigl(-\sum_{j=0}^{n-1} b_{m+j}\bigr)\|y_m - Px\|^2 + \varepsilon$ を得る. よって, $\overline{\lim}_n \|y_n - Px\|^2 \le \varepsilon$ が成り立つ. $\varepsilon > 0$ は任意だから, $\{y_n\}$ は Px に強収束する. □

参考文献

[1] S. Atsushiba, N. Shioji and W. Takahashi, *Approximating common fixed points by the Mann iteration process in Banach spaces,* in preparation.

[2] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodic pour les contractions non linéares dans un espace de Hilbert,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), 1511-1514.

[3] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* Monografie Mat., PWN, Warszawa, 1932.

[4] F. E. Browder, *Convergence of approximants to fixed points of non-expansive non-linear mappings in Banach spaces,* Arch. Rational Mech. Anal. **24** (1967), 82-90.

[5] R. E. Bruck, Jr., *Nonexpansive retracts of Banach spaces,* Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 384-386.

[6] R. E. Bruck, *A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces,* Israel J. Math. **32** (1979), 107-116.

[7] R. E. Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces,* Israel J. Math. **38** (1981), 304-314.

[8] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps,* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957-961.

[9] E. Hille, *Functional analysis and semi-groups,* Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. vol. **31**, AMS, New York, 1948

[10] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces,* Nonlinear Anal. **12** (1988), 1269-1281.

[11] A. T. Lau, N. Shioji and W. Takahashi, *Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces,* submitted.

[12] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series,* Acta Math. **80** (1948), 167-190.

[13] I. Miyadera and K. Kobayasi, *On the asymptotic behaviour of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces,* Nonlinear Anal. **6** (1982), 349-365.

[14] S. Reich, *Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. **44** (1973), 57-70.

[15] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287-292.

[16] S. Reich, *Some problems and results in fixed point theory,* Contemp. Math. **21** (1983), 179-187.

[17] A. Robinson, *On generalized limits and linear functional,* Pacific J. Math. **14** (1964), 269-283.

[18] G. Rodé, *An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* J. Math. Anal. Appl. **85** (1982), 172-178.

[19] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence theorem for asymptotically nonexpansive mappings,* Nonlinear Anal. **26** (1996), 265-272.

[20] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings,* J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71-83.

[21] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces,* to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[22] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of averaged approximants for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces,* submitted.

[23] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorem for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces,* submitted.

[24] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Hilbert spaces,* to appear in Nonlinear Anal.

[25] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for continuous semigroups in Banach spaces,* submitted.

[26] N. Shioji and W. Takahashi, *Convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings,* to appear in Proceedings of Second World Congress of Nonlinear Analysts.

[27] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces,* submitted.

[28] N. Shioji, *On uniformly convex functions and uniformly smooth functions,* Math. Japonica **41** (1995), 641-655.

[29] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253-256.

[30] W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity,* Canad. J. Math. **44** (1992), 880-887.

[31] W. Takahashi and D. H. Jeong, *Fixed point theorem for nonexpansive semigroups on Banach space,* Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 1175-1179.

[32] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators,* J. Math. Anal. Appl. **104** (1984), 546-553.

[33] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings,* Arch. Math. **58** (1992), 486-491.

[34] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions,* J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 344-374.