数理解析研究所講究録
1032巻 1998年 125-128

Weyl列とVan der Corput列について
On Weyl sequences and Van der Corput sequences

日本アイビーエム 東京基礎研究所　　手塚 集　(Shu Tezuka)

1。はじめに

今日使われている low-discrepancy sequences は、2つのタイプに分類される。一つは Weyl列 $\{n\alpha\}$, $n=0,1,2,\ldots$,から派生したもので、その系統として、 Richtmyer列がある。ここで、α は無理数であるとし、記号 { } は小数部分のみをとることを意味している。もうひとつは Van der Corput 列 $\phi(n), n=0,1,2,\ldots$,の一般化である。ここで、ϕ は 基底2の radical inverse function を意味する。この系統では、Halton 列をはじめ (t,s)-列(これは Sobol, Faure, および 一般化 Niederreiter 列を含む非常に広いクラス)が属している。

ここでは、この2つの異なる1次元 low-discrepancy sequences の類似点について2つの観点から論じたい。1つはGF{2, z}(GF(2)上の形式的ローラン展開により構成される体)での Van der Corput 列及び Weyl 列のアナロジーという観点である。ここでは、2つの数列の違いは生成行列の違いとして現れてくる。もう一つの観点は、Weyl 列の連分数近似に基づくものである。α として、黄金分割比を用いた場合について解析する。この場合はフィボナッチ数体系における Van der Corput 列との著しい共通点が存在することが示される。

2。定義

まず、discrepancy の定義は次のように与えられる(文献2、3参照)。

(定義)
k次元単位立方体内の N 個の点 $X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$ に対して、k≥1 かつ部分区間 $J=\prod_{i=1}^{k}[0,u_i)$ (ここで$0<u_i\le 1, 1\le i\le k$)としたとき、次のように discrepancy を定義する。

$$D_N^{(k)} = \sup_J \left| \frac{A(J;N)}{N} - Vol(J) \right|$$

ここで、A(J;N)は $X_n \in J$ となる $n, 0 \le n < N$, の数で、Vol(J)は部分区間Jの体積、また supremum はすべてのJについてとることにする。□

k次元単位立方体内の 無限点列 $X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}, \ldots$ はもしすべての N>1 に対して、先頭のN点の discrepancy が

$$D_N^{(k)} \le C_k \frac{(\log N)^k}{N}$$

を満たすならば、low-discrepancy sequence と呼ばれる。ここで、C_k は次元kのみに依る定数である。

また、 フィボナッチ数体系（文献1参照）とは次のようなものである：
$F_i, i = 0,1,2,\ldots,$ をフィボナッチ数とする。つまり、$F_0 = 0, F_1 = 1$ で、$F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ を満足する数列である。すると、非負整数nは次のような形に一意に表現できる。

$$n = a_0 F_2 + a_1 F_3 + \cdots + a_{k-3} F_{k-1}$$

ここで、a_{k-3} は0ではないとする。
すると、Van der Corput 列, $\phi(n), n=0,1,2,\ldots,$ は次のように一般化できる。非負整数 $n = a_0 F_2 + a_1 F_3 + \cdots + a_{k-3} F_{k-1}$ とすると、

$$\psi(n) = \frac{a_0 F_{k-1} + a_1 F_{k-2} + \cdots + a_{k-3} F_2}{F_k}$$

となる。
ここで、$F_i = 2^{i-2}$ とすれば、$\psi(n)$ が基底2の radical inverse function $\phi(n)$ と一致していることは容易にわかる。

3。ＧＦ｛２，ｚ｝におけるアナロジーという観点

非負整数nの2進展開を $n = n_0 + n_1 2 + n_2 2^2 + \cdots$ とする。その時、ＧＦ（２）上の多項式 n(z)を $n_0 + n_1 z + n_2 z^2 + \cdots$ と定義する。また、ＧＦ｛２，ｚ｝内の元で deg(a)<0 となるようなものを選び a(z)= $a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \cdots$ とおく。Weyl 列のアナロジーから、次のような数列が定義できる。

W_n(z)={ n(z)a(z) }。

ここで{ }は小数部分（次数が負の部分）のみを残す操作を意味している。W_n(z)= $w_{n1} z^{-1} + w_{n2} z^{-2} + w_{n3} z^{-3} + \cdots$ とすると、行列表現により、

$$\begin{pmatrix} w_{n1} \\ w_{n2} \\ w_{n3} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

と表すことができる。つまり、この場合に[0,1]内の数列を $W_n(2)= w_{n1}2^{-1} + w_{n2}2^{-2} + w_{n3}2^{-3}+\cdots$ と定義すれば、これは(t,k)列とよばれる数列であることがわかる。さらにここで用いられる生成行列はHankel行列とよばれる特殊な対称行列になっていることが示せる。また、Van der Corput列のＧＦ｛２，ｚ｝におけるアナロジーについては、すでに文献３で解析されており、この場合も(t,k)列とよばれる数列になることが知られている。しかし、その時現れる生成行列は対称行列ではあるが、Hankel行列とはならないことがわかっている。つまり、ＧＦ｛２，ｚ｝におけるアナロジーという観点では、どちらの数列も(t,k)列に分類され、生成行列の性質にのみ違いが生じているということになる。

４。Weyl列の連分数近似という観点

Weyl列は $W_n=\{n\alpha\},\ n=1,2,\ldots,$ において $\alpha=(1+\sqrt{5})/2$ とした時がもっとも一様である事が知られている。ここで、α は黄金分割比であり、記号｛ ｝は実数の小数部分をとることを意味している。また、その連分数近似を用いて次のような近似数列 $\overline{W}_n, n=1,2,\ldots,$ が考えられる。つまり、$F_{k-1}\le n<F_k$ に対して,

$$\overline{W}_n = \{\frac{F_{k-1}(a_0F_2+\cdots a_{k-3}F_{k-1})}{F_k}\}, \tag{1}$$

とするのである。ここで、$n=a_0F_2+a_1F_3+\cdots+a_{k-3}F_{k-1}$ であり、また a_{k-3} は０ではないとする。その時次の定理が成り立つ。

（定理）

$n=a_0F_2+a_1F_3+\cdots+a_{k-3}F_{k-1}$ とした時、

$$\overline{W}_n = \frac{(-1)a_0F_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-2}a_{k-3}F_1}{F_k} \qquad (\mathrm{mod}\ 1)$$

である。□

(証明)

まず、$0\le i\le k-1$ に対して、

$$F_{k-1}F_i = F_{k-1}F_i + F_kF_{i+1} = F_{k+i} \qquad (\mathrm{mod}\ F_k)$$

である。また、$1\le i$ に対して、

$$F_{k+i} = h_i F_k + (-1)^{i-1} F_{k-i},$$

が成り立つ。ここで、 $h_1 = 1, h_2 = 3,$ 及び $h_i = h_{i-1} + h_{i-2}$ である。ゆえに

$$F_{k+i} = (-1)^{i-1} F_{k-i} \qquad (\mathrm{mod}\ F_k)$$

となり、これを(1)式の右辺分子に代入することにより、証明が完了する。

□

ここで注意することは、

$$-\frac{F_{k-1}}{F_k} \le \frac{(-1)a_0 F_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-2} a_{k-3} F_1}{F_k} \le \frac{F_{k-2}}{F_k} = 1 - \frac{F_{k-1}}{F_k}$$

である。つまり(mod 1)は大した役割はしておらず、区間[0,1]が $-F_{k-1}/F_k$ ずれたにすぎない。また分子をよくみると第２節で定義したフィボナッチ数体系における Van der Corput 列の場合と良くにていることがわかる。実際、(−1)の項がついていることと添え字が $k-2$ から始まることを除けば本質的にはかわらない。つまり、一様性を生み出す構造はどちらも同じになっている。

参考文献

1. D. E. Knuth, The Art of Computer Programming, Vol. 2, Second Edition, Addison-Wesley, 1981.
2. H. Niederreiter, Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, SIAM, Philadelphia, Penn., 1992.
3. S. Tezuka, Uniform Random Numbers : Theory and Practice, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995.