数理解析研究所講究録
1032巻 1998年 46-61

非線型SDEの数値解法に関する最近の話題

小川 重義 [1]
金沢大学工学部

1 非線形拡散の確率数値解析

非線型 SDE の数値解法については様々な問題がある。このノートではその中で次の二つの話題；1）非線型 SDE の弱近似解の収束性、2）乱流解析における Burgers Model に代表される準線形 SDE のオイラー法に基づく数値近似解法の収束性、を取り上げこれらについての最近の進展を、筆者自身の結果（[4],[5],[7], [8]）を中心に解説する。

1.1 SDE モデル

非線型流体の運動、拡散律速反応、集団遺伝学における問題、多孔媒質中の浸透現象等、非線型拡散が関係する現象は数多くある。非線型拡散現象の数値シミュレーションはそれゆえ数理科学における大きな課題の一つであるが、非線型 SDE の数値近似解法の研究が始められたのはそれほど昔のことではない（cf.[4],[5]）。筆者は数年来こうした問題意識から次のような極く一般的な非線型 SDE の数値近似解法に関心を持ってきた：

$$\begin{cases} dX_t = a(t, X_t, u)dt + b(t, X_t, u)dW_t, \\ X_0 = \xi(\omega) \quad \sim \ u_0(x)dx \end{cases} \tag{1}$$

ここに $W_.$ はブラウン運動、 $u(t,x)$, $u_0(x)$ はそれぞれ方程式の解 X_t 及び初期値 $\xi(\omega)$ の *pdf* 確率密度関数である。衆知のようにこの SDE は次のような方程式で表される非線形拡散現象の確率モデルを与える：

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x\{a(t,x,u)u\} = \frac{1}{2}\partial_x^2\{b^2(t,x,u)u\}, \quad (t,x) \in R_+ \times R^1 \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2}$$

[1] s_ogawa@t.kanazawa-u.ac.jp

数値解析の分野ではモンテ・カルロ法に代表される確率的手法は、パラメーター次元が高い問題に対しては必要不可欠な手法とされながらも、その手間の多さと、その割には低い精度の故に、依然として「第０次近似」を与えるものとして認識されている。もっとも、ある種の非線型問題（特に、半線形拡散現象の数値近似）に対しては、パラメータの次元が低い場合でも、従来の決定論的手法を凌駕する特徴を示すものであることが最近の研究で明らかにされつつある (eg. E.Puckett, D.Talay, M.Bossy, S.Ogawa, M.Chauvin, A.Rouault etc.) 。ところで、乱流拡散の例に見る如く準線形拡散現象の確率的数値シミュレーション問題に関しても SDE の数値近似に基づく研究がなされており、冒頭に記したように本ノートではこうした問題に焦点を当て、筆者の最近の研究結果中心に関連する話題を紹介する。

1.2 滑らかな近似モデル

ここでは、まづ一般的な非線形 SDE 対して、これまでに知られている結果の概観を纏めておきたい。

問題 (2) の数値解を SDE(1) の数値解から構成するための第一歩として、筆者は（[4]）つぎのように滑らかなモデルについて考えることを提案した。

$$\begin{cases} dX_t = a(t, X_t : u)dt + b(t, X_t : u)dW_t, \\ X_0 = \xi(\omega) \quad \sim \; u_0(x)dx \end{cases} \tag{3}$$

ここに

$c(t, x : g) = c(t, x, \int F(x-y)g(y)dy)$ ($c(\cdot) = a(\cdot),\ b(\cdot)$ であり、$g(x)$ は pdf) また $F(x)$ は適当に滑らかな核である。

更に $u(t, x)$ は問題 (3) の未知解 X_t の分布密度関数 pdf を表すが、これは存在して適当に滑らかならば次の初期値問題の古典的解になっ

ている。

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x\{a(t,x:u)u\} = \frac{1}{2}\partial_x^2\{b^2(t,x:u)u\}, & (t,x) \in R_+ \times R^1 \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{4}$$

以下, 第2節では上に挙げた「滑らか PDE モデル」(4) とSDE (3) の数値解析に関する筆者の最近の結果とその改良([4], [5], [6], [7]), の簡単な紹介を行う。本来のモデル(2) には、例えば Burgers 方程式のように数理物理学上興味のある対象も含まれているが第3、4節では、この本来のモデルの数値解析を目指して、第2節で得られた結果の可能な一般化について考察する。

2 滑らかモデルに関する既知の結果

議論を簡単にするために諸係数については次のような仮定をおく：

(A.1) $a(t,x,y)$, $b(t,x,y)$ は十分大きな (x,y) について1次の増大(of linear growth) であり、

(A.2) $a(t,x,y)$, $b(t,x,y)$ は t について連続, x, $y \in R^1$ については Lipschitz である。

(A.3) $F(x)$ は C^2-class で、有界な台を持ち、 $u_0(x)$ は適当な $p \geq 1$ に対して条件, $E|\xi|^{2p} < +\infty$ を満たすものとする。

これだけの仮定があるとSDE (3) は一意的な強解 $(X_t,\ u(t,x))$ をもつが、我々の主目的はこの強解の数値近似解を構成することである。

2.1 Euler-Maruyama スキームの場合

Euler-Maruyama スキームで SDE (3) を離散化すれば、次のようになる。但し、 $t_k = k \cdot h$, $h = T/N$ また、 $\overline{X}_k = \overline{X}_{t_k}$ は $t = t_k$ に於

ける真の解 X_{t_k} の近似値を表すものとする：

$$\begin{cases} \overline{X}_{k+1} = \overline{X}_k + a(t_k, \overline{X}_k : \mathbf{M}\overline{u}(t_k)) \cdot h + b(t_k, \overline{X}_k : \mathbf{M}\overline{u}(t_k)) \cdot \Delta_k W, \\ 0 \leq k \leq N-1, \\ \overline{X}_0 = \xi(\omega), \quad \text{但し} \quad \Delta_k W = W(t_{k+1}) - W(t_k) \end{cases} \tag{5}$$

ここに $\overline{u}(t_k, x)$ は近似値 $\overline{X}_k$ の *pdf* を、また$\mathbf{M}\overline{u}(t_k)$ はそれの Monte Carlo estimator を表すものとしている。この estimator は適当な大きさ、N_0 の標本 $\{\overline{X}_k(\omega^i),\ 1 \leq i \leq N_0\}$ から構成されるべきである。いろいろな候補者が考えられるが、しばし議論の一般性を保つために具体的な形を指定せず、ただ以下の基準を満たす estimator が与えられているとして議論を進める。

(M) 分布 $g(x)dx$ に従う大きさ N_0 の標本に対して、$^\exists\eta(>0)$ such that

$$E[\int \epsilon(x)\phi(x)dx]^{2p} = C_{g,\phi}N_0^{-2p\eta} \quad \text{for} \quad {}^\forall\phi \in C_0^1,$$ ここに

$\epsilon(x) = \mathbf{M}g(x) - g(x)$ であり、$C_{g,\phi}$ は$g(x)$, ϕ に依存する定数である.

仮定 (A.1)-(A.3), (M) のもとで次の結果が得られている。

Theorem 2. 1 **([6])** *Euler-Maruyama* 型のスキーム *(5)* で構成される近似値 $\{\overline{X}_k\}$ は次の意味で *"1/2"*-次の強近似を与える：

$$\max_k E|\overline{X}_k - X_{t_k}|^{2p} = C\{N_0^{-2p\eta} + h^p\} \tag{6}$$

(註 1) 当初([4]) この結果は次のより強い条件 (M.2) のもとで示された：

(M.2) $$E\int|\mathbf{M}g(x) - g(x)|^{2p}dx = O(N_0^{-2p\eta}).$$

(註 2) Mil'stein scheme に対しても同様な結果が成り立つ（cf. ogawa [5], [6]）

近似の精度と必要な手間の関係をより見易くするために、２つのパラ

メーター $N,\ N_0,$ はつぎの関係、$N_0 = N^{\beta}$ for $^{\exists}\beta,$ を満たすとしておく。このとき、例えば上の結果は次のように表される。

$$\max_k E|\overline{X}_k - X_{t_k}|^{2p} = C \cdot h^{2p(\eta\beta \wedge 1/2)},$$

SDE の解の強近似が得られれば、それに基づいて非線形 PDE (4) の数値近似解を構成することが次の課題となる。これは「密度推定問題」であるが、いわゆる "kernel method" を適用する場合を考えてみると (cf. ([6])):

確率分布 $g(x)dx$ に従う標本 $\{\zeta(\omega^i),\ 1 \leq i \leq N_0\}$ から、その分布密度 $g(x)$ を次のようにして推定する：

$$\mathbf{M}_K^{\delta} g(x) := \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} K_{\delta}(x - \zeta(\omega^i)),$$

ここに δ は正定数、 $K_{\delta}(x) := \frac{1}{\delta} K(\frac{x}{\delta})$ で $K(x)$ は滑らかな関数。核 $K(x)$ はつぎの条件を満たすものとしてある。

(K.1) $\int K(x)dx = 1, \quad \int |xK(x)|dx < +\infty$.

(K.2) 適当な $r_1 > 0$ に対して, 次の評価が成立,
$K_{r_1} := \sup_y \frac{|1 - (\mathcal{F}K)(y)|}{|y|^{r_1}} < +\infty,$ 但し $\mathcal{F}K(y)$ は $K(x)$ の Fourier image.

さて、このようなよい性質を持つ核 $K(x)$ を使って構成した推定量 $\mathbf{M}_K^{\delta}\overline{u}(t_k, x),$ は初期値問題の解 $u(t_k, x)$ に対して良好な数値近似を与えていることが期待される。実際、以下の結果が得られている。

Proposition 2. 1 ([6]) 初期値問題 *(4)* の解 $u(t, x)$ が以下の性質を持つとせよ。

適当な $r > 0$ に対して, $U_r := \sup_t \int_{-\infty}^{\infty} |y^r (\mathcal{F}u)(t, y)|^2 dy < +\infty.$

このとき推定量 $\mathbf{M}_K^\delta \overline{u}(t_k,x)$ の平均2乗誤差、 $IMSE(t_k,N_0,\delta) := E\int|\mathbf{M}_K^\delta \overline{u}(t_k,x)-u(t_k,x)|^2dx$ $(1\geq r)$, は次の評価を満たす。

$$IMSE(t_k,N_0,\delta)\leq \frac{K^2}{N_0\delta}+(K_rU_r)^2\delta^{2r}+\delta^{-3}K'^2E|X_{t_k}-\overline{X}_k|^2 \qquad (7)$$

但し、

$$K^2=\int|K(x)|^2dx, \quad K'^2=\int|K'(x)|^2dx.$$

Proposition2. 1 と Theorem2. 1 を組み合わせて以下の結果：

Theorem 2. 2 ([6]) *Proposition 2. 1* における と同様の条件の下で、推定量 $\mathbf{M}_K^\delta u(t_k,x)$ は *window width parameter* δ を適当に調節すれば以下の評価を満たすようにできる。

$$\min_\delta \min_k IMSE(t_k,N^\beta,\delta)\leq 3[E_r(\delta_*)+\delta_*^{-1}K^2N^{-\beta}]=O(N^{-4r/(2r+3)})$$

但し,

$$E_r(\delta)=(K_rU_r)^2\delta^{2r}+CK^2\delta^{-3}N^{-2} \text{ で } \delta_*=(\frac{3CK^2}{2r(K_rU_rN)^2})^{1/(2r+3)}.$$

2.2 モデルの改良と問題点

これまでは既知の結果の紹介であったが、以下の諸問題がモデルの一般化と改良に付随して現れてくる。

(Q.1) 必ずしも独立でないようなデータ $\{\overline{X}_k(\omega^i)\}$ を標本として estimator 構成に使用することの可能性。また、経験分布 $\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{n_0}\delta_{\overline{X^i}_k}$ を estimator として使用することの可能性を調べること。

(Q.2) そのようなモデルの「弱近似」としての収束性を調べること。

(Q.3) 最初の問題、(1) と (2) に対する近似解の構成法は？ 滑らかモデルにおいて核 $F(x)$ を極限状態 $\delta_0(x)$ まで収縮したとき対応する近似解の列はどの様に振る舞うか？ 特に Burgers equation (i.e. $a(t,x,y)=y,\ b(t,x,y)=1,\ F(x)=\delta(x)$)) に対する近似解の構成に応用できるであろうか？

3 問 (Q.1) について ー 経験分布による密度の推定

言うまでもないことであるが、これまでに示した結果は、効果的な数値解法の開発といった実際的観点から見れば中間的性格のもである。確率密度関数の estimator $\mathbf{M}\overline{u}(t_k, x)$ の構成に使用されるデータは独立であることが仮定されている。この事を実際の数値計算において忠実に実現するには、例えばSDE の数値近似手順を最初から１本ではなく、同一のものを複数本用意すればよく（各時間ステップ毎に)、理論的には可能である。しかし、ある程度の精度の近似解を得るには実に多数の SDE solver line をあつらえる必要があり、並列計算機の使用を前提としない限り余り実用的とは言い難い。これに対する処方は「データの独立性を保証する」ことを諦めることである。筆者達（cf. [3]）がこれまで実験で用いていた方法は、以下に解説するように N_0 個の干渉粒子系の SDE を考え、これらを数値的に解くことである。この方法は理論的にはこれまでの結果の直接的応用として処理される。勿論、これまで展開された議論の前提を緩和するわけであるから全てを再点検する必要があるが、その影響は幸いにして最終的誤差評価の式に、これに基づく付加項、 $O(N_0^{-1/2})$ のオーダーの、が加わるに留まる（この事実については、当時ー１９９２年前後ーはほぼ明らかなことであると考えて、あえて解析結果を論文の形で纏めることはしなかった)。上のような考察から、我々は自然に以下に示すような干渉粒子系の SDE にたどり着く。

$$\begin{cases} dX_t^i = & a(t, X^t, \dfrac{1}{N_0}\sum_{j\neq i}^{N_0} F(X_t^i - X_t^j))dt \\ & +b(t, X_t^i, \dfrac{1}{N_0}\sum_{j\neq i}^{N_0} F(X_t^i - X_t^j))dW_t^i \\ X_0^i = & \xi^i, \ \ 1 \leq i \leq N_0 \end{cases} \tag{8}$$

ここに,

$W_t := (W^1, W^2, \cdots, W^{N_0})$ は N_0-次元標準 Brownian 運動であり $\{\xi^i\}$ は分布 $u_0(x)dx$ に従う $i.i.d.$ 確率変数列である。

非線形 PDE (4) の数値近似に焦点を絞れば SDE としては最初の (3)

ではなくて、この干渉粒子系の SDE を数値的に近似すればよい。この型の SDE 系は Boltzmann 方程式や粘性流体等の確率論的研究では既に馴染みのものであるが、確率数値解析の観点から取り上げられたのは最近の事である（cf. D.Talay, L.Tubaro, P.Bernard, M.Bossy [11], [1]）。

3.1 干渉粒子系 SDE の離散化モデル

干渉粒子系 SDE (8) に Euler-Mauyama scheme を適用して次の離散化モデルを得る。

$$\begin{cases} \overline{X}^i_{k+1} = & a(t_k, \overline{X}^i_k, \dfrac{1}{N_0}\sum_{j\neq i}^{N_0} F(\overline{X}^i_k - \overline{X}^j_k))h \\ & +b(t_k, \overline{X}^i_k, \dfrac{1}{N_0}\sum_{j\neq i}^{N_0} F(\overline{X}^i_k - \overline{X}^j_k))\Delta_k W^i \\ \overline{X}^i_0 = & \xi^i, \ \ 1 \le i \le N_0 \end{cases} \tag{9}$$

このモデルに次の補助的モデルを対応させよう。

$$\begin{cases} \overline{Y}^i_{t_{k+1}} = & a(t_k, \overline{Y}^i_{t_k}; \overline{u}^i(t_k))h + b(t_k, \overline{Y}^i_{t_k}; \overline{u}^i(t_k))\Delta_k W^i \\ \overline{u}^i(t_k, x) = & \overline{Y}^i_{t_{k+1}} \text{ の } pdf。 \\ \overline{Y}^i_0 = & \xi^i, \ \ 1 \le i \le N_0 \end{cases} \tag{10}$$

$\{\overline{Y}^1_{t_k}\}$ が真の解 X_{t_k} に対し 1/2 次の強近似解を与えている事は容易に分かる（cf.[4]）。

$$E\{\max_{1\le k\le N} |X_{t_k} - \overline{Y}^1_{t_k}|^2\} \le C \cdot h.$$

一方, A.Kohatsu と筆者は Kohatsu-Ogawa [8] において次のことを示した：

$$E\{\max_k |\overline{Y}^1_{t_k} - \overline{X}^1_k|^2\} \le C \cdot N_0^{-1}$$

これより直ちに $\{\overline{X}^1_k, \ 1 \le k \le N\}$ が 1/2-次の近似解となることが分かり、次に示すように問題 (Q.1) に対する回答が得られる。

Theorem 3. 1 同じ条件 *(A.1)-(A.3)* *(*但し $p=1$*)* の下で次の評価が成り立つ。

$$E\{\max_k |\overline{X}_k^1 - X_{t_k}|^2\} \le C(h + N_0^{-1}).$$

線形の SDE に対しては Euler-Maruyama scheme は "1/2" 次の強近似を与え、弱近似の意味では "1" 次の近似を与えることは良く知られた事柄である。非線型の SDE についても同様であるかどうか (Q.2) は長い間未解決であったが、最近筆者達（Ogawa,S. Kohatsu-Higa,A [8]）はこの問題を対して以下に示すような肯定的結果を得た。

Theorem 3. 2 (A.Kohatsu-Higa & S.Ogawa [8]) *Euler - Maruyama* 型 *scheme (9)* で構成された近似値 $\{\overline{X}_k^1,\ 1 \le k \le N\}$ *(3)* の真の解 X に対し *"1"* 次の弱近似解を与える。即ち、
任意の滑らかな関数 $h(x) \in C^2$ に対して次の評価が成り立つ、

$$\max_k |E\{h(X_{t_k}) - h(\overline{X}_k^1)\}| \le C\{\Delta t + \frac{1}{\sqrt{N_0}}\}.$$

4 Burgers 型過程の近似

最後の問題 (Q.3) を取り上げよう。即ち、離散化モデル(9) で構成される近似値 $\{\overline{X}_k^1\}$ から推定から推定される近似密度関数 $\overline{u}_k^1(x)$ $(1 \le k \le N)$ が最初の非線形問題 (2) の解 $u(t,x)$ に対してどの様な関係にあるのか、端的に言えば核関数 $F(x)$ を極限状態 $\delta(x)$ へ収縮させたとき $\overline{u}_k^1(x)$ $(1 \le k \le N)$ は $u(t,x)$ の良い近似になっているのかどうかに興味がある。この問題は以下に見るように Burgers equation を具体例に含むようなある種の準線形方程式に対しては "ある意味で" 肯定的に解決されている。

4.1 (Q.3) に対する答

少し見方を変えて、問題 (2) を解（確率分布密度関数 $u(t,x)$）の積分形、即ち確率分布関数 $U(t,x) = \int_{-\infty}^{x} u(t,y)dy$ で書き直せばどのような方程式になるかを観察してみよう。

より具体的に、Burgers equation ($a(t,x,y)=y,\ b(t,x,y)=1\ \ F(x)=H(x)$ ここに $H(x)=$ Heaviside's function) の場合について考えて見ると：

$$dX_t = U(t,X_t)dt + dW_t,\quad X_0=\xi\ \sim\ u_0(x)dx, \tag{11}$$

ただし $U(t,x)=\int_{-\infty}^{x}u(t,y)dy$ で $u(t,x)$ は X_t の pdf である。

もし問題 (11) が弱解をもつならば、それの分布密度関数 $u(t,x)$ は次の Cauchy 問題の超関数解を与える。

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x\{Uu\} = \frac{1}{2}\partial_x^2 u, & (t,x)\in R_+\times R^1 \\ u(0,x)=u_0(x). \end{cases}$$

この式を確率分布関数 $U(t,x)$ を使って書き直せば、

$$\begin{cases} \partial_x\{\partial_t U + \frac{1}{2}\partial_x U^2 - \frac{1}{2}\partial_x^2 U\} = 0, & (t,x)\in R_+\times R^1 \\ U(0,x)=U_0(x) := \int_{-\infty}^{x}u_0(y)dy. \end{cases}$$

従って、初期データ $u_0(x)$ に適当な正則性を仮定すれば、$U(t,x)$ は Burgers equation に対する初期値問題の解になることがわかる。

$$\begin{cases} \partial_t U + U\partial_x U = \frac{1}{2}\partial_x^2 U, & (t,x)\in R_+\times R^1 \\ U(0,x)=U_0(x). \end{cases} \tag{12}$$

それ故、もし問題 (12) が古典解をもつならば、前節で既に見た方法に従って、我々は SDE (11) の数値近似解を通して Burgers equation の数値近似解を構成する考えに思い至るであろう。ただ今の場合、核 $H(x)$ は滑らかでないから前節で示した結果はそのままでは SDE (11) に適用できない。そこで、この間隙を埋めるために核 $H(x)$ を滑らかな近似核 $H^\epsilon(x)$ ($H^\epsilon(x)\ \to\ H(x)$ as $\epsilon\to 0$) で置き換え、対応する強解列 $\overline{X}_t^\epsilon$ で真の解 X を近似するという方法を考える。

(註３) こうしたアイデアは 1994 年に M.Sniztman [10], D.Talay[1] 等から Burgers equatiopn の数値解法に有効な方法として示唆されたのであるが、以下に見る如く、我々のかなり一般的な非線形 SDE に対し

ても有効であることが確認された（cf. 名古屋での科研費シンポでの発表、Ogawa[7])。また、D.Talay, M.Bossy 達はこのアイデアを Burgers equation の数値近似問題に応用しよい結果を得ていることを付け加えておこう。

最近のノート [7] に従い、Burgers equation を具体例として含む、より一般的な非線形方程式に対する結果を紹介するが、議論の流れそのものは基本的に D.Talay-M.Bossy [1] と大きく変わる物ではない。

4.2 SDE of Burgers like processes

問題を (11) より一般的な枠組みで扱いたいので、次のような "Burgers もどき過程" の数値近似解を構成することを考えたい。

$$\begin{cases} dX_t = a(t,X,U)dt + b(t,X,U)dW_t, \\ X_0 = \xi \ \sim \ u_0(x)dx \\ U(t,x) = \int^x u(t,y)dy \ \text{で}\ u(t,x) = X_t \ \text{の pdf。} \end{cases} \tag{13}$$

係数 $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ と初期データ $u_0(x)$ については先に挙げた条件 (A.2), (A.3) (with $p=1$) を満たし、更に (A.1) の代わりに次の (A.1)' を満たすものとしておく。

(A.1)' $a(t,x,y)$, $b(t,x,y)$ は $[0,T]\times R^1\times[-1,1]$ 上で有界。

もし問題 (13) が弱解をもち、その密度 $u(t,x)$ が滑らかならば $u(t,x)$ は次の McKean-Vlasov 型の方程式に対する初期値問題を解くことに注意する。

$$\text{(GMV)} \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x\{a(t,x,U)u\} = \dfrac{1}{2}\partial_x^2\{b^2(t,x,U)u\} \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

更にこのとき、分布関数 $U(t,x) = \int_{-\infty}^x u(t,y)dy$ が次の初期値問題の

解になることは容易にわかる。

$$\begin{cases} \partial_t U + a(t,x,U)\partial_x U = \dfrac{1}{2}\partial_x\{b^2(t,x,U)\partial_x U\}, \\ U(0,x) = U_0(x)\ (= \int_{-\infty}^{x} u_0(y)dy). \end{cases} \tag{14}$$

従って、我々はまづ、方程式 (13) の弱解の存在と密度関数の滑らかさ、ついで Burgers もどき過程の数値近似法について調べなければならない。次節でこれらが同時に解決されることを説明しょう。

4.3 解の構成

滑らかな核 $\{H^\epsilon(x)\}$ を $H^\epsilon(x) = (H * \rho_\epsilon)(x)$ で与える、ここに $\rho_\epsilon(x)$ は半径 $\epsilon(> 0)$ の mollifier である。$(X^\epsilon., u^\epsilon)$ を $F(x) = H^\epsilon(X)$ とおいた SDE (3) の強解とする、即ち：

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = a_\epsilon(t, X_t^\epsilon, u^\epsilon)dt + b_\epsilon(t, X_t^\epsilon, u^\epsilon)dW_t, \\ X_0 = \xi(\omega) \quad \sim \ u_0(x)dx \\ u^\epsilon(t,x) = \ \text{pdf of the} \ \ X_t^\epsilon. \end{cases} \tag{15}$$

ここに $c_\epsilon(t,x,g) = c(t,x,\int H^\epsilon(x-y)g(y)dy)$, $(c(\cdot) = a(\cdot),\ b(\cdot))$ 但し $g(x)$ は pdf である。

強解の存在は明らかであるから、列 X^ϵ が分布の意味でSDE (13) の弱解に収束することと、この弱解が滑らかな分布密度を持つことを示せばよい。

議論を簡単にするために係数 $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ と $u_0(x)$ は条件 (A.1)'-(A.3) の他に、次のような正則性を持つことを仮定する。

(H.1) SDE (15) の解の *pdf* $u^\epsilon(t,x)$ は x について L^2 に属し、次の estimate, $\|u^\epsilon(t,\cdot)\|_2 \le \psi(t)$ ここに $\psi(t)$ は $(0,T]$ 上で可積分な関数。

(H.2) 初期値問題 (GMV) は高々 1 個の L^1-解を持ち、条件 $\sup_t \|u(t,\cdot)\|_1 < \infty$ を満たす。

(例)　$b(t,x,y)=1$ の場合は $a(t,x,y)$ が (A.1)', (A.2) を満足すれば、上の仮定 (H.1),(H.2) は満たされていることを注意しておく。
実際、条件 (H.1) の成立は S.Meleard-S.Roelly [2] のよく知られた Lemma から直ちに確かめられる。また、条件 (H.2) の検証も、問題 (GMV) を熱核を使って積分方程式に書き直し、更に係数 $a(t,x,y)$ が変数 y について Lipschitz であることに注意すれば容易に得られる。詳しくは例えば Talay-Bossy [1] を見られたい。

Theorem 4. 1 ([7]) 仮定 *(H.1)-(H.2)* の下で、*Cauchy* 問題 *(13)* は唯一の弱解 (X,u) を有し、近似過程列 $\{X^\epsilon\}$ は分布の意味でこの弱解に収束する。更に、弱解の分布関数 $U(t,x)$ は方程式 *(14)* の解になる。

4.4 証明の概略

証明は数段階に分けて行う。最初に (13) の弱解とその密度 $u(t,x)$ は存在すれば一意的であることを確認する。

- SDE (13) の弱解 $X.$ が存在するならば、その *pdf* (分布密度関数) $u(t,x)$ は初期値問題 (GMV) の弱解になることは既に観察した。
- 一方、仮定 (H.2) より、SDE (13) の弱解 X_t の分布関数 $U(t,x)=\int^x u(t,y)dy$ は存在すれば一意的に決定されることを知っている。従って、あらゆる弱解に対して、SDE (13) の係数 $(t,x)\ \rightarrow\ a(t,x,u(t,x)), b(t,x,u(t,x))$ は常に同じである。
- また、あらゆる弱解は以下に示す（非線形）Martingale Problem (MP) の解に対応するから、このことより SDE (13) の弱解 $X.$ の一意性が分かる。

以上より、全ては SDE (13) の弱解の存在を示すことに帰着されるが、そのことは更に次の Martingale Problem の解の存在を示すことに帰着される。

(MP)　連続関数の空間 $C([0,T]\rightarrow R^1)$ 上に次のような確率測度, μ としておく, は存在するか？

(a) $\mu_0 = U_0$ 但し μ_s $(0 \leq s \leq T)$ は変数 $x(s)$ の周辺分布である。

(b) 任意の $\phi \in C^2$ に対して、次の量、
$\phi(x(t)) - \phi(x(0)) - \int_0^t \mathcal{L}_{\mu_s}\phi(x(s))ds$ は μ-martingale になる,
ここに $x(\cdot)$ は $C([0,T] \to R^1)$ 上の canonical process であり、
$\mathcal{L}_\mu \phi := \frac{1}{2}b^2(t,x,U(t,x))\partial_x^2\phi(x) + a(t,x,U(t,x))\partial_x\phi(x)$.

近似過程の列 $\{X^\epsilon.\}$ が分布の意味で収束し、更にその極限過程は SDE(13) の弱解になっていることを示せば、証明はおわる。以下要点を箇条書きで記しておく。

- 各 ϵ 毎に SDE (15) の強解 (X^ϵ, u^ϵ) が一意的に存在することに注意する。

- 従って、以下に示す infinitesimal generator L^ϵ に対応する Martingale Problem には一意的に解 μ^ϵ が存在することが分かる：

  $L_\mu^\epsilon \phi := \frac{1}{2}b_\epsilon^2(t,x,\mu)\partial_x^2\phi + a_\epsilon(t,x,\mu)\partial_x\phi$.

- 一方、測度の族 $\{\mu^\epsilon\}$ は tight である。

  (Proof) 実際、条件 (A.1)' より、係数 $a(t,x,y)$, $b(t,x,y)$ は有界であるから、このことから直ちに近似解の族 $\{X^\epsilon.\}$ は equi-continuous であること、即ち：

  任意の ϵ に対して, $E|X_t^\epsilon - X_s^\epsilon|^4 \leq C(t-s)^2$、が成り立つ。

- 従って、$\epsilon_n \to 0$ としたとき、極限 μ^* に収束するような部分列 $\{\mu^{\epsilon_n}\}$ を取り出すことができる。

- また、仮定 (H.1) のもとでは、極限測度 μ^* が $\mathcal{L}_\mu$- martingale problem (MP) の解になることが馴染みの議論により示される。

- 極限測度の周辺分布 μ_t^*, $(^\forall t)$ は全て同じであったから生成作用素 $\mathcal{L}$ の形は上記部分列の選び方に関わらず不変である。

- これより、極限測度 μ^* は全て同一であることが従い、証明が終わる。

参考文献

[1] M.Bossy and D.Talay : Convergence rate for the approximation of the limit law of weakly interacting particles, *INRIA Research Report N°* 2410, Novembre 1994

[2] S.Meleard, S.Roelly-Coppoletta : A propagation of chaos result for a system of particles with moderate interaction, *Stochastic Processes and Their Applications*, 26, 317-332, 1987

[3] S.Ogawa, K.Naono : Stochastic simulation of nonlinear diffusions, *Lectures at Organized session on the numerical simulation of SDEs, held at the '95-Annual Meeting of The Japanese Soc.of Indust.Applied Math.*

[4] S.Ogawa : Monte Carlo simulation of nonlinear diffusion processes II, *Japan J.Indust.Appl.Math.*, vol 2, No.1, (1996)

[5] S.Ogawa : Some problems in the numerical simulation of nonlinear SDEs, *Math.and Computers in Simulation* vol.x, No,xx, (1995)

[6] S.Ogawa : Density estimation problem in the simulation of nonlinear diffusions, (*in Japanese*) *Suurikagaku Koukyuuroku 850*, RIMS Kyoto Univ., 1995

[7] S.Ogawa : Problems in the simulation of Burgers like processes, *Proceedings of the Workshop on Turbulent Diffusion and Related Problems in Stochastic Numerics, held at ISM in Oct.1996* April 1997.

[8] A.Kohatsu-Higa, S.Ogawa : Rate of convergence of the weak approximation of an Euler type to nonlinear SDEs, *Monte Carlo Methods and Applications* 1997

[9] E.G.Puckett : Convergence of a random particle method to solutions of the Kolmogorov equation, *Math. of Comput.*, 52, 31-45, 1989.

[10] M.Snitzman : *Private communication*, at the seminar in Zürich Univ. 1994

[11] D.Talay, P,Bernard, L.Tubaro : Rate of convergence of a stochastic particle method for the Kolmogorov equation with variable coefficients, *Math. of Comput.*, 63, 1994