

孤立特異点の平滑化と QUILLEN の計量

吉川 謙一 (KEN-ICHI YOSHIKAWA)  
名古屋大学・多元数理科学研究科

本稿は研究集会「特異点と複素解析幾何」での筆者の講演に加筆したものである。同時期に開催された研究集会「多変数関数論にあらわれる解析と幾何」でも同様の内容の講演をした。本稿独自の内容として孤立特異点の平滑化に対して解析的トーションの挙動と周期の挙動との関連を論じた部分と *Andreotti – Mayer-* 形式の積分公式について論じた部分がある。本稿で触れなかった話題に Quillen 計量と射影的 dual 性がある。「多変数 …」の筆者の稿を見て頂けると幸いである。

1. 楕円曲線の判別式

Jacobi の  $\Delta$ -関数とは以下で定義される保型関数である：

$$(1.1) \quad \Delta(\tau) = q \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \quad q = \exp(2\pi i\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

$\Delta(\tau)$  は次の 3 つの特徴付けを持つ。

(1)  $\Delta(\tau)$  は唯一の重さ 12 の尖点形式である。

$$(1.2) \quad \Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12} \Delta(\tau), \quad \lim_{\text{Im}\tau \rightarrow +\infty} \Delta(\tau) = 0.$$

(2)  $\Delta(\tau)$  は楕円曲線の判別式である (Jacobi)。

$E_\tau := \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$  の Weierstrass 表示を  $y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$  とする時、

$$(1.3) \quad g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2 = (2\pi)^{12} \Delta(\tau).$$

(3)  $\Delta(\tau)$  は  $E_\tau$  の解析的トーシオンである (Kronecker 極限公式)。

$g_\tau = (\text{Im}\tau)^{-1}|dz|^2$  を  $E_\tau$  の Kähler 計量、

$\tau(E_\tau) = \exp(\zeta'_\tau(0))$  を  $(E_\tau, g_\tau)$  の解析的トーシオンとする時、

$$(1.4) \quad \text{Im}\tau \cdot \tau(E_\tau) = (2\pi)^2 |\Delta(\tau)|^{-\frac{1}{6}}.$$

(3)'  $\Delta(\tau)$  はコホモロジーの行列式の標準的な断面のノルムである。

$p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}$  を  $\mathbb{H}$  上の楕円曲線の基本族 ( $p^{-1}(\tau) = E_\tau$ ) ,

$\lambda(\mathcal{O}_{\mathbb{E}}) := \det p_* \mathcal{O}_{\mathbb{E}} \otimes (\det R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathbb{E}})^{-1}$  をコホモロジーの行列式、

$\sigma_{\mathbb{E}} = 1 \otimes dz$  を  $\lambda(\mathcal{O}_{\mathbb{E}})$  の標準的な断面、 $\|\cdot\|_Q$  を Quillen 計量とする時、

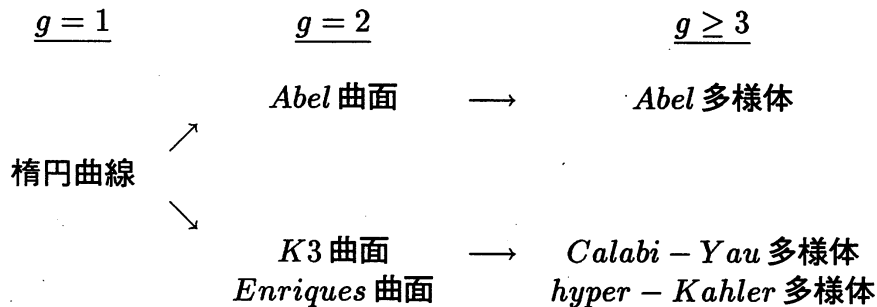
$$(1.5) \quad \|1 \otimes dz\|_Q^2(\tau) = (2\pi)^2 |\Delta(\tau)|^{-\frac{1}{6}}.$$

**定理 1.1.** 楕円曲線の基本族に対して解析的トーシオンは判別式と一致し、それは *Jacobi* の  $\Delta$ -関数である。

次の問題は定理 1.1 の高次元化を考えるに際して基本的であり、本稿の主題である。

**問題 1.1.** *Kronecker* 極限公式の自然な高次元化を見つけよ。

候補となる幾何学的対象として  $c_1(X) = 0$  となる Kähler 多様体を考える：



本稿では Abel 多様体の系列で *Kronecker* 極限公式を一般化する。K3 曲面や Enriques 曲面については *Jorgenson-Todorov* の研究 ([J-T1,2]) がある。また、Abel 多様体の場合については *Jorgenson-Kramer* ([J-K]) が筆者と類似した内容を扱っている。

## 2. コホモロジーの行列式と Quillen 計量

### 2.1 解析的トーシオン.

$(M, g_M)$  をコンパクト Kähler 多様体、

$\square_{0,q}$  を  $M$  上の  $(0, q)$ -形式に作用するラプラシアン、

$\sigma(\square_{0,q}) = \{0 \leq \dots \leq 0 \leq \lambda_{0,q}(1) \leq \lambda_{0,q}(2) \leq \dots\}$  を  $\square_{0,q}$  のスペクトル、

$\zeta_{0,q}(s) := \sum_{k \geq 1} \lambda_{0,q}(k)^{-s}$  を  $(M, g_M)$  のスペクトル  $\zeta$ -関数とする。

この時、 $\zeta_{0,q}(s)$  は全平面上有理型で、 $s = 0$  で正則である (Seeley)。

**定義 2.1.** 解析的トーシオンとは次式で定義される実数である：

$$\tau(X) := \prod_{q \geq 0} (\det \square_{0,q})^{(-1)^q q}, \quad \det \square_{0,q} := \exp \left( - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \zeta_{0,q}(s) \right).$$

### 2.2 コホモロジーの行列式.

$\pi : X \rightarrow S$  を複素多様体間の固有平滑 Kähler 射とする。

**定義 2.2.** コホモロジーの行列式とは以下で定義される  $S$  上の直線束である：

$$\lambda_X := \bigotimes_{q \geq 0} (\det R^q \pi_* \mathcal{O}_X)^{(-1)^q}.$$

$\lambda_X$  には次の様にして Hermite 計量が入る。

$g_{X/S}$  を相対接束  $TX/S := \ker \pi_*$  上の Kähler 計量、

$\mathcal{H}^{0,q}(X_t)$  をファイバー  $X_t$  上の調和  $(0, q)$ -形式の空間とする。

Hodge の定理より、 $\lambda_X$  のファイバーは調和形式の空間の行列式と見なせる：

$$(2.1) \quad \lambda_{X_t} = \bigotimes_{q \geq 0} (\det H^q(X_t, \mathcal{O}_{X_t}))^{(-1)^q} \cong \bigotimes_{q \geq 0} (\det \mathcal{H}^{0,q}(X_t))^{(-1)^q}$$

これより調和形式の積分を通じて  $\lambda_X$  に Hermite 直線束の構造が入り、この計量を

$L^2$ -計量と呼び、 $\|\cdot\|_{L^2}$  と書く。

**定義 2.3.**  $\lambda_X$  の  $g_{X/S}$  に関する *Quillen* 計量とは以下で定義される *Hermite* 計量のことである： $\|\cdot\|_Q^2(t) := \tau(X_t) \cdot \|\cdot\|_{L^2}^2(t)$ .

次の2定理は *Quillen* 計量に関して最も基本的である。

**定理 2.1** ([B-G-S]).  $c_1(\lambda_X, \|\cdot\|_Q)$  を  $(\lambda_X, \|\cdot\|_Q)$  の *Chern* 形式とすれば、

$$c_1(\lambda_X, \|\cdot\|_Q) = \pi_*(Td(TX/S, g_{X/S}))^{(1,1)}.$$

**定理 2.2** ([B-G-S]).  $g_{X/S}, g'_{X/S}$  を *Kähler* 計量の族、 $\|\cdot\|_Q, \|\cdot\|'_Q$  を  $g_{X/S}, g'_{X/S}$  に関する  $\lambda_X$  の *Quillen* 計量とすれば、

$$\log \left( \frac{\|\cdot\|'_Q}{\|\cdot\|_Q} \right)^2 = \pi_*(\widetilde{Td}(TX/S; g_{X/S}, g'_{X/S}))^{(0,0)}.$$

但し、 $\widetilde{Td}(TX/S; g_{X/S}, g'_{X/S})$  は *Bott-Chern* 類である。

*Quillen* 計量の境界挙動に関連して、次の問題は基本的である。

**問題 2.1.**  $\pi: X \rightarrow S$  が特異ファイバーを持つ場合に、 $\lambda_X$  の曲率を計算せよ。

そこで最も一般的な退化の場合に問題 2.1 を考える。

**定義 2.4.**  $\pi: X \rightarrow S$  を複素多様体間の射影的固有正則射、 $S$  を単位円盤とする。

$(\pi, X, S)$  が孤立特異点の平滑化  $\stackrel{def}{\iff} \begin{cases} 1) & \Sigma(\pi) := \{x \in X; d\pi(x) = 0\} \subset X_0, \\ 2) & \#\Sigma(\pi) < \infty. \end{cases}$

この時、特異ファイバー  $X_0$  は超曲面孤立特異点のみを特異点として許容する。

$g_X$  を  $X$  の *Kähler* 計量、 $g_{X/S}$  を  $g_X$  から入る  $TX/S$  の *Kähler* 計量、

$\|\cdot\|_Q$  を  $g_{X/S}$  に関する  $\lambda_X$  の *Quillen* 計量とする。

**定理 2.3** ([Y1]).  $\|\cdot\|_Q$  は  $\lambda_X$  の特異 *Hermite* 計量で、曲率は次式で与えられる：

$$c_1(\lambda_X, \|\cdot\|_Q) = \pi_*(Td(TX/S, g_{X/S}))^{(1,1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!} \mu(X_0) \delta_0.$$

( $n = \dim X/S$ ,  $\mu(X_0)$  : 特異ファイバーの全 *Milnor* 数、 $\delta_0 := -\frac{i}{2\pi} \bar{\partial} \partial \log |t|^2$ )

測度と見た時、右辺第1項が連続部分を第2項が特異部分に対応している。

### 2.3 超曲面孤立特異点の平滑化と解析的トーシオン.

定理 2.3 の応用として解析的トーシオンと周期の関係について述べる。

$\pi : X \rightarrow S$  を超曲面孤立特異点の平滑化、

$g_X$  を  $X$  の Kähler 計量、 $g_t := g_X|_{X_t}$  を  $X_t$  上の誘導計量、

$\tau(X_t)$  を  $(X_t, g_t)$  の解析的トーシオン、

$H_n(X_t, \mathbb{Z})_{fr}$  を  $H_n(X_t, \mathbb{Z})$  の自由部分、

$\Lambda = (\lambda_{ij})$  を  $H_n(X_t, \mathbb{Z})_{fr}$  上の固定された交差行列、

$\{\gamma_1(t), \dots, \gamma_l(t)\}$  を  $H_n(X_t, \mathbb{Z})_{fr}$  の許容基底 ( $\stackrel{def}{\iff} \langle \gamma_i(t), \gamma_j(t) \rangle = \Lambda$ )、

$\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  を  $\pi_*\omega_{X/S}$  の  $\mathcal{O}_S$ -基底；  $\pi_*\omega_{X/S} = \mathcal{O}_S\omega_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_S\omega_m$ 、

$\Omega(t) := \left( \int_{\gamma_i(t)} \omega_j(t) \right)_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m}$  を  $X_t$  の許容基底に関する周期行列とする。

この時、次の問題は自然であろう。

**問題 2.2.**  $t \rightarrow 0$  の時の  $\tau(X_t)$  の挙動を決定せよ。

**定理 2.4([Y1]).**  $g_X$  が Hodge 計量、即ち  $g_X$  の Kähler 類が整であると仮定する。

この時、次が成立する。

(1)  $\tau(X_t)$  は  $t \rightarrow 0$  の時、漸近展開を持つ： $\exists \{r_1, \dots, r_N\} \in \mathbb{Q}$  s.t.  $t \rightarrow 0$  の時、

$$\tau(X_t) \sim \sum_r \sum_{i,j \geq 0} \sum_{k \geq -n \cdot h^{n,0}} a_{rijk} |t|^r t^i \bar{t}^j (\log |t|)^k \quad (t \rightarrow 0)$$

(2)  $t \rightarrow 0$  の時、

$$\tau(X_t) \approx |t|^{\frac{2(-1)^n}{(n+2)!} \mu(X_0)} \det({}^t\Omega(t)\Lambda\bar{\Omega}(t))^{(-1)^{n+1}}$$

(3)  $Sing X_0$  が有理特異点ならば、 $t \rightarrow 0$  の時、

$$\tau(X_t) \approx |t|^{\frac{2(-1)^n}{(n+2)!} \mu(X_0)}.$$

注意.

$$(1) A(t) \approx B(t) \quad (t \rightarrow 0) \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \exists a \neq 0 \quad \text{s.t.} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t)}{B(t)} = \exp(a),$$

$$(2) {}^t\Omega(t) \wedge \bar{\Omega}(t) = \left( \int_{X_t} \omega_i(t) \wedge \bar{\omega}_j(t) \right).$$

以上は解析的トーシヨンと多様体の周期の関係についての定理であるが、より明解な漸近挙動についての予想を述べたい。

$(p, \mathcal{O}_{X,p})$  を  $f(z) \in \mathbb{C}\{z_0, \dots, z_n\}$  で定まる超曲面孤立特異点、

$b_f(s) = (s+1) \prod_i (s + \alpha_i)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{Q}_+$  を  $(p, \mathcal{O}_{X,p})$  の  $b$ -関数とする。

定義 2.5.

$$\nu(p) := \sum_{0 < \alpha_i < 1} \alpha_i, \quad \nu(X_0) := \sum_{p \in \text{Sing } X_0} \nu(p),$$

$$\delta_{n-1}(X_0) := \dim H_{(2)}^0(X_0, \Omega_{X_0}^{n-1}) - \dim H^0(X_t, \Omega_{X_t}^{n-1}) \quad (t \neq 0).$$

予想 2.1.  $t \rightarrow 0$  の時、 $\tau(X_t)$  の主要部は次式で与えられる：

$$\tau(X_t) \approx |t|^{2(-1)^n \left\{ \frac{\mu(X_0)}{(n+2)!} - \nu(X_0) \right\}} \left( \log \frac{1}{|t|} \right)^{(-1)^n \delta_{n-1}(X_0)}$$

例 2.1.  $X_t = \{z_0^d + \dots + z_n^d - t z_{n+1}^d = 0\} \subset \mathbb{P}^{n+1} \quad (t \rightarrow 0)$

注意.  $\text{Sing } X_0$  が有理特異点  $\iff \forall i : \alpha_i > 1 \implies \nu(X_0) = \delta_{n-1}(X_0) = 0$ .

これより予想 2.1 で  $\text{Sing } X_0$  が有理特異点の場合が定理 2.4 (3) である。

### 3. Abel 多様体の判別式

第1節で楕円曲線について考えたことを Abel 多様体に対して考える。

$\mathfrak{S}_g := \{\tau \in M(g; \mathbb{C}); {}^t\tau = \tau, \text{Im } \tau > 0\}$  を  $g$  次 Siegel 上半空間、

$\Lambda = \{\Lambda_\tau := \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_g \oplus \mathbb{Z}\tau_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\tau_g\}_{\tau \in \mathfrak{S}_g}$  を  $\mathbb{C}^g$  の格子族、

$A_\tau := \mathbb{C}^g / \Lambda_\tau$  ( $1_g = (e_1, \dots, e_g)$ ,  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_g) \in \mathfrak{S}_g$ ) を Abel 多様体、

$p: \mathbb{A} := \mathbb{C}^g \times \mathfrak{S}_g / \Lambda \rightarrow \mathfrak{S}_g$  を  $\mathfrak{S}_g$  上の主偏曲 Abel 多様体の基本族 ( $p^{-1}(\tau) = A_\tau$ )、

$T\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g = \ker p_* = \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \frac{\partial}{\partial z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \frac{\partial}{\partial z_g}$  を  $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$  の相対接束、

$g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g} = \{g_\tau\}_{\tau \in \mathfrak{S}_g}$  を  $T\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g$  の Kähler 計量 ( $g_\tau := {}^t dz (\text{Im } \tau)^{-1} d\bar{z}$ )、

$\Gamma_g := Sp(2g; \mathbb{Z})$  を Siegel モジュラー群とする。

$\Gamma_g$  は次のように  $\mathbb{A}$  に作用する:  $\forall \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g, \forall (z, \tau) \in \mathbb{A}$ ,

$$(3.1) \quad \gamma \cdot (z, \tau) = ({}^t(C\tau + D)^{-1}z, (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}), \quad \gamma^* g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g} = g_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}.$$

定理 1.1 の素朴な類似として次の問題は自然である。

**問題 3.1.** Abel 多様体の解析的トーシオンは何か?

**定理(Ray-Singer).**  $\tau(A_\tau) \equiv 1 \quad (g > 1)$ .

即ち、 $\tau(A_\tau)$  は何ら保型形式を生み出さない。この理由を考えるために  $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$  のコホモロジーの行列式をしてみる。定義より、 $\lambda_{\mathbb{A}} = \bigotimes_{q \geq 0} (\det R^q p_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}})^{(-1)^q}$  が  $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$  のコホモロジーの行列式である。 $\Gamma_g$  の  $\mathbb{A}$  への作用はファイバーをファイバーに移すので、 $\Gamma_g$  は  $q$  次順像  $R^q p_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}}$  に作用する。従って  $\lambda_{\mathbb{A}}$  にも作用する。又、ファイバーが Abel 多様体なので次が従う:

$$(3.2) \quad \bigwedge^q R^1 p_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \cong_{\Gamma_g} R^q p_* \mathcal{O}_{\mathbb{A}}.$$

一方、勝手なベクトル束  $F$  に対して、

$$(3.3) \quad \bigotimes_{q \geq 0} (\wedge^q F)^{(-1)^q} \cong \begin{cases} F^\vee & (\text{rank } F = 1) \\ 1 & (\text{rank } F > 1) \end{cases}$$

が成立するので、次が従う：

$$(3.4) \quad \lambda_{\mathbb{A}} \cong_{\Gamma_g} \begin{cases} p_*\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g} & (g=1) \\ \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \cdot 1_{\mathbb{A}} & (g>1). \end{cases}$$

ここで  $\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g}$  は  $(p, \mathbb{A}, \mathfrak{S}_g)$  の相対標準束である。

**命題 3.1.**  $g > 1$  ならば  $\lambda_{\mathbb{A}}$  の  $\Gamma_g$ -不変な断面  $1_{\mathbb{A}} \in H^0(\mathfrak{S}_g, \lambda(\mathcal{O}_{\mathbb{A}}))_{\Gamma_g}$  が存在して、 $\|1_{\mathbb{A}}\|_Q(\tau) \equiv 1$  が成立する。

この様に、 $g=1$  と  $g>1$  ではコホモロジーの行列式の構造が全く異なる。従って、次の問題が生ずる。

**問題 3.2.** コホモロジーの行列式が楕円曲線の基本族の一般化となる族は何か？

#### 4. テータ因子の判別式

この節では問題 3.2 に解答を与える。テータ関数を次式で定義する：

$$(4.1) \quad \theta(z, \tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i ({}^t m \tau m + 2 {}^t m z).$$

$\Theta_{\tau} := \{z \in A_{\tau}; \theta(z, \tau) = 0\}$  を  $A_{\tau}$  のテータ因子、

$p: \Theta \rightarrow \mathfrak{S}_g$  をテータ因子の基本族 ( $p^{-1}(\tau) = \Theta_{\tau}$ )、

$\Gamma_g(1, 2) := \{\gamma \in \Gamma_g; \gamma \cdot \Theta = \Theta\} \subset \Gamma_g$  を  $\Gamma_g$  の指数有限な部分群、

$N_g := \{\tau \in \mathfrak{S}_g; \text{Sing } \Theta_{\tau} \neq \emptyset\}$  を Andreotti-Mayer 軌跡とする。

**命題 4.1.**  $N_g$  は  $\Gamma_g$ -不変な  $\mathfrak{S}_g$  上の因子である。

$\mathbb{A}$  上の  $\Gamma_g(1, 2)$ -層の完全列：

$$(4.2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}}(-\Theta) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\Theta} \longrightarrow 0$$

に小平消滅定理を組み合わせるにより、次の同型が得られる：

$$(4.3) \quad \lambda_{\Theta} \cong_{\Gamma_g(1,2)} \lambda_{\mathbb{A}} \otimes (p_*\omega_{\mathbb{A}/\mathfrak{S}_g})^{(-1)^g}.$$



従って、 $\lambda_\Theta$  は次の楕円曲線の場合に類似した標準的断面を持つ：

$$(4.4) \quad \sigma_\Theta(\tau) := 1_{\mathbb{A}}(\tau) \otimes (dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_g)_\tau^{(-1)^g}.$$

**命題 4.2.** テータ因子の基本族  $(p, \Theta, \mathfrak{S}_g)$  のコホモロジーの行列式は楕円曲線の基本族のコホモロジーの行列式の自然な一般化である。

そこで次の問題を考えるのは自然であろう。

**問題 4.1.** テータ因子の解析的トーシヨンは何か？

## 5. Andreotti-Mayer 形式

### 5.1 Andreotti-Mayer 形式.

定義：  $f(\tau) \in \mathcal{O}(\mathfrak{S}_g)$  が  $\Gamma'(\subset \Gamma_g)$  に関する重さ  $k$  の指標  $\chi$  付き保型形式

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma', \quad f(\gamma \cdot \tau) = \det(C\tau + D)^k \cdot \chi(\gamma) \cdot f(\tau).$$

$\Gamma' = \Gamma_g, \chi = 1$  の時、 $f(\tau)$  は重さ  $k$  の Siegel 保型形式と呼ばれる。

$g_{\Theta_\tau} := g_\tau|_{\Theta_\tau}$  を  $\Theta_\tau$  の Kähler 計量 ( $g_\tau = {}^t dz(Im\tau)^{-1} d\bar{z}$ )、

$\tau(\Theta_\tau)$  を  $(\Theta_\tau, g_{\Theta_\tau})$  の解析的トーシヨンとする。

**定理 5.1**([Y1]).  $N_g$  を零因子に持つ重さ  $\frac{(g+3) \cdot g!}{2}$  の Siegel 保型形式  $\Delta_g(\tau)$  が存在

して、次が成立する (テータ因子に対する Kronecker 極限公式)：

$$\tau(\Theta_\tau) = \left\{ (\det Im \tau)^{\frac{g+3}{2(\sigma+1)}} \cdot |\Delta_g(\tau)|^{\frac{2}{(\sigma+1)!}} \right\}^{(-1)^{g+1}}.$$

$\Delta_g(\tau)$  についてももう少し詳しいことがわかる。

$\forall a, b \in \mathbb{F}_2^g$  ( $F_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )、テータ定数を次式で定める：

$$(5.1) \quad \theta_{a,b}(\tau) := \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i \left( {}^t(m + \frac{1}{2}a)\tau(m + \frac{1}{2}a) + {}^t(m + \frac{1}{2}a)b \right).$$

$$((a, b) = {}^t a \cdot b \neq 0 \implies \theta_{a,b}(\tau) = 0, \quad (a, b) = 0 \implies \theta_{a,b}(\tau) \neq 0.)$$

$\chi_g(\tau) := \prod_{(a,b)=0} \theta_{a,b}(\tau)$  を偶テータ定数全部の積とする。

**命題 5.1.** Siegel 保型形式  $J_g(\tau)$  が存在して、

$$\Delta_g(\tau) = \chi_g(\tau) \cdot J_g(\tau)^2.$$

これより  $g < 5$  の時、 $\Delta_g(\tau)$  を定数倍を除いて決定できる。

$$(5.2) \quad \Delta_g(\tau) = \chi_g(\tau) \quad (g = 2, 3), \quad \Delta_4(\tau) = \chi_4(\tau) \cdot J_4(\tau)^2.$$

ここで、 $J_4(\tau) \in \mathbb{Z}[\theta_{a,b}(\tau)]_{a,b \in \mathbb{F}_2^g}$  は Schottky により発見された保型形式である。

(テータ定数による  $J_4$  の表示は一意的ではない。)

**命題 5.2** (Schottky、Beauville、井草).  $J_4(\tau)$  は  $\mathfrak{S}_4$  の中で種数 4 の曲線の *Jacobian* を特徴付ける。

### 5.2 Andreotti-Mayer 形式の積分公式.

Bismut-Lebeaut の定理 ([B-L]) を用いることにより  $\Delta_g(\tau)$  の積分表示を得る。

**定理 5.2** ([Y3]).  $\Omega_\tau := \frac{i}{2\pi} dz (Im \tau)^{-1} d\bar{z}$  を  $A_\tau$  のケーラー形式とすれば、

$$\begin{aligned} \log |\Delta_g(\tau)|^2 &= \int_{A_\tau} \sum_{i+j=g-1} \Omega_\tau^{i+1} \wedge \left( \Omega_\tau - \frac{i}{2\pi} \bar{\partial} \partial \log \|D\theta\|^2 \right)^j \log \|D\theta\|^2 \\ &\quad + \int_{A_\tau} \left( \Omega_\tau - \frac{i}{2\pi} \bar{\partial} \partial \log \|D\theta\|^2 \right)^g \log \|\theta\|^2 - g! \log \det Im \tau. \end{aligned}$$

ここで、 $D\theta$  は  $\theta \in H^0(A, L)$  ( $L = \mathcal{O}_A([\Theta])$ ) の Cartan 接続による共変微分である。

$g = 1$  の時は、 $\Delta_1(\tau) = \Delta(\tau)^{\frac{1}{6}}$  として次の Faltings の公式 ([F]) が得られる：

$$(5.3) \quad \log |\Delta(\tau)|^{\frac{1}{12}} = \int_{E_\tau} \log \|\theta\|^2 \Omega_\tau.$$

**応用.** 定理 5.2 の応用として Schottky 形式  $J_4$  と種数 3 曲線の定義方程式に関係がつく。

$J_4(\tau)$  を Schottky 形式、

$$\tau(t) = \begin{pmatrix} \tau_1 & tz \\ t^t z & \tau_2 \end{pmatrix} \quad (\tau_1 \in \mathfrak{S}_3, \tau_2 \in \mathbb{H}, z \in \mathbb{C}^3) \text{ とおく。}$$

この時、 $\{A_{\tau(t)}\}$  は 4 次元 Abel 多様体の族で  $A_{\tau(0)} = A_{\tau_1} \times E_{\tau_2}$  である。

**定理 5.3**([Y4]).  $\tau_1 \notin N_3$  ならば  $\mathcal{O}(\mathcal{G}_3)$ -係数の同次 4 次多項式  $F(z, \tau_1) \in \mathcal{O}(\mathcal{G}_3)[z_1, z_2, z_3]$  が存在して、次が成立する。

(1)

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^4 \Big|_{t=0} J_4(\tau(t)) = \Delta(\tau_2) \cdot F(z, \tau_1),$$

(2)  $C_{\tau_1} := \{z \in \mathbb{P}^2; F(z, \tau_1) = 0\}$  は種数 3 の曲線で  $Jac(C_{\tau_1}) = A_{\tau_1}$ 。

**注意.**  $\chi_4(\tau)$  に対して同様の事を考えると次のようになる：

$$(5.4) \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^{28} \Big|_{t=0} \chi_4(\tau(t)) = \Delta(\tau_2)^8 \cdot \Delta_3(\tau_1)^3 \cdot G(z, \tau_1).$$

ここで、 $L_{\tau_1} = \{z \in \mathbb{P}^2; G(z, \tau_1) = 0\}$  は  $C_{\tau_1}$  の 28 本の複接線である。

### 5.3 定理 5.1 の証明の方針.

(1)  $g_E := {}^t dz \cdot d\bar{z}$  を  $T\mathbb{A}/\mathcal{G}_g$  の Euclid 計量、

$g_{E, \Theta/\mathcal{G}_g}$  を  $g_E$  から定まる相対接束  $T\Theta/\mathcal{G}_g$  の Kähler 計量、

$\|\cdot\|'_Q$  を  $g_{E, \Theta/\mathcal{G}_g}$  に関する  $\lambda_\Theta$  の Quillen 計量とする。

Debbare の定理 ([D]) と定理 2.1、2.3 より次が従う：

$$(5.5) \quad c_1(\lambda_\Theta, \|\cdot\|'_Q) = \frac{(-1)^{g+1}}{(g+1)!} \delta_{N_g}.$$

これより、 $\Delta_g(\tau) \in \mathcal{O}(\mathcal{G}_g)$  が存在して次が成立する：

$$(5.6) \quad (\Delta_g)_0 = N_g, \quad \|\sigma_\Theta\|_Q'^2(\tau) = |\Delta_g(\tau)|^{\frac{2(-1)^{g+1}}{(g+1)!}}.$$

(2) 定理 2.2 より次がわかる： $\forall \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g(1, 2)$ 、

$$(5.7) \quad \log \left( \frac{\gamma^* \|\cdot\|'_Q(\tau)}{\|\cdot\|'_Q} \right)^2 = \frac{(-1)^g (g-1)}{g+1} \log |\det(C\tau + D)|$$

即ち、 $\Delta_g(\tau)$  は  $U(1)$ -指標付きの  $\Gamma_g(1, 2)$  に関する保型形式である。 $\Gamma_g$  と  $N_g$  の性質から  $\Delta_g(\tau)$  は  $\Gamma_g$  に関する保型形式で指標は自明ある。

(3) 再び定理 2.2 より次がわかる :

$$(5.8) \quad \log \left( \frac{\|\cdot\|'_Q}{\|\cdot\|_Q} \right)^2 = \frac{(-1)^g(g+1)}{2(g+1)} \log \det Im\tau.$$

(5.6) と (5.8) より

$$(5.9) \quad \|\sigma_\Theta\|_Q^2(\tau) = (\det Im\tau)^{\frac{(-1)^g(g-1)}{2(g+1)}} |\Delta_g(\tau)|^{\frac{2(-1)^{g+1}}{(g+1)!}}$$

となるので、

$$(5.10) \quad \log \|\sigma_\Theta\|_{L^2}^2(\tau) = (-1)^g \log(2\pi)^g \det Im\tau$$

と組み合わせて定理を得る。□

#### REFERENCES

- [B-G-S]. Bismut, J.-M., Gillet, H., Soulé, C., *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I, II, III*, Commun. Math. Phys. **115** (1988), 49-78, 79-126, 301-351.
- [B-L]. Bismut, J.-M., Lebeau, G., *Complex immersions and Quillen metrics*, Publ. Math. IHES **74** (1991), 1-297.
- [D]. Debarre, O., *Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **25** (1992), 687-708.
- [F]. Faltings, G., *Calculus on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **119** (1984), 612-649.
- [J-K]. Jorgenson, J. and Kramer, J., *Towards the arithmetic degree of line bundles on abelian varieties*, preprint (1997).
- [J-T1]. Jorgenson, J., Todorov, A., *A conjectured analogue of Dedekind's eta function for K3 surfaces*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 359-376.
- [J-T2]. ———, *Analytic discriminants for manifolds with canonical class zero*, Symposia Math. **36** (1996), 223-260.
- [Y1]. Yoshikawa, K.-I., *Smoothing of isolated hypersurface singularities and Quillen metrics*, preprint (1997).
- [Y2]. ———, *Discriminant of theta divisors and Quillen metrics*, preprint (1997).
- [Y3]. ———, *An integral representation formula for Andreotti-Mayer forms*, preprint (1997).
- [Y4]. ———, *Schottky's modular form and defining equation of curves of genus 3*, preprint (1997).