数理解析研究所講究録
1034 巻 1998 年 199-203

Singular eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations

愛媛大・理　内藤 学 (Manabu Naito)

本講演は草野尚教授 (福岡大・理) との共同研究によるものである.

初めに, 2 階線形常微分方程式

$$(\mathrm{E}_\lambda) \qquad x'' + \lambda q(t)x = 0, \quad t \geq a,$$

を考える. ここで, λ は実のパラメータ, $q(t)$ は区間 $[a, \infty)$ 上の実数値連続関数である. もし, 積分条件

$$\int_a^\infty t|q(t)|\, dt < \infty$$

が成立していれば, 各 λ に対して, (E_λ) は $\lim_{t\to\infty} x_\lambda(t) = 1$ となる解 $x_\lambda(t)$ をただ一つもつ (例えば, Hille [1, Theorem 9.1.1]). この解 $x_\lambda(t)$ は, 十分大きなすべての t に対して $x_\lambda(t) > 0$ であるから, 区間 $[a, \infty)$ における零点の個数は有限個である. ここでは, λ を $-\infty$ から $+\infty$ まで動かしたとき, $x_\lambda(t)$ の零点の個数がどのように変化するかを考察したい.

方程式 (E_λ) において, $q(t) > 0$ $(t \geq a)$ の場合を考えてみよう. $\lambda \leq 0$ ならば, Sturm の比較定理によって, $x_\lambda(t)$ の $[a, \infty)$ における零点の個数は高々 1 個である. $\lambda > 0$ ならば, 再び Sturm の比較定理によって, $[a, \infty)$ における零点の個数は $\lambda > 0$ が小さくなれば減り, $\lambda > 0$ が大きくなれば増える. 最近, 草野-内藤 [2] は, λ を 0 から $+\infty$ まで変化させると, $[a, \infty)$ における零点の個数は 0 から $+\infty$ まで 1 個づつ増えていくことを示した.

前段で述べたことは, $q(t) > 0$ $(t \geq a)$ の場合であるが, 方程式 (E_λ) を

$$(\mathrm{E}_\lambda^*) \qquad x'' + (-\lambda)(-q(t))x = 0, \quad t \geq a,$$

と書き換えれば, $q(t) < 0$ $(t \geq a)$ の場合も対応した結果を得る. それでは, $q(t)$ が正の値もとるし, 負の値もとるような場合はどうなっているのであろうか. 本講演の目的は, この場合に明確な解答を与えることである.

方程式をもう少し一般的な形で扱おう:

$$(\mathrm{F}_\lambda) \qquad (p(t)x')' + \lambda q(t)x = 0, \quad t \geq a.$$

ここで, $\lambda \in \mathbb{R}$ はパラメータ, $p(t)$ および $q(t)$ は $[a, \infty)$ 上の実数値連続関数, $p(t) > 0$ $(t \geq a)$ とする. (F_λ) の終局的正値解の $t \to \infty$ のときの growth order は, $\int_a^\infty \frac{dt}{p(t)} = \infty$ のときと, $\int_a^\infty \frac{dt}{p(t)} < \infty$ のときは異なるから, この 2 つの場合を分けて考える.

定理 1. $\int_a^\infty \frac{dt}{p(t)} = \infty$ であると仮定し, $P(t) = \int_a^t \frac{ds}{p(s)}$ $(t \geq a)$ とおく. また, $q(t)$ は区間 $[a, \infty)$ で正の値もとるし負の値もとるとする. このとき, もし

$$\int_a^\infty P(t)|q(t)|\,dt < \infty$$

ならば, 次の (I) および (II) が成立する:

(I) 各 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, (F_λ) の解 $x(t;\lambda)$ で

$$\lim_{t\to\infty} x(t;\lambda) = 1$$

となるものがただ一つ存在する;

(II) (I) における $x(t;\lambda)$ に対して, 次の性質 [P], [Q] を満たす 2 つの列 $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ が存在する:

[P] (P–1) $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$,

(P–2) $\lambda \in (\lambda_{i-1}, \lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, ならば, $x(t;\lambda)$ は開区間 (a, ∞) に丁度 $i-1$ 個の零点をもち, $x(a;\lambda) \neq 0$ である,

(P–3) $\lambda = \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots$, ならば, $x(t;\lambda)$ は (a, ∞) に丁度 $i-1$ 個の零点をもち, $x(a;\lambda_i) = 0$ である;

[Q] (Q–1) $0 = \mu_0 > \mu_1 > \cdots > \mu_n > \cdots$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = -\infty$,

(Q–2) $\lambda \in (\mu_i, \mu_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots$, ならば, $x(t;\lambda)$ は開区間 (a, ∞) に丁度 $i-1$ 個の零点をもち, $x(a;\lambda) \neq 0$ である,

(Q–3)　$\lambda = \mu_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ ならば, $x(t;\lambda)$ は (a,∞) に丁度 $i-1$ 個の零点をもち, $x(a;\mu_i) = 0$ である.

定理 2.　$\displaystyle\int_a^\infty \frac{dt}{p(t)} < \infty$ であると仮定し, $\displaystyle\rho(t) = \int_t^\infty \frac{ds}{p(s)}\ (t \geq a)$ とおく. また, $q(t)$ は区間 $[a,\infty)$ で正の値もとるし負の値もとるとする. このとき, もし

$$\int_a^\infty \rho(t)|q(t)|\,dt < \infty$$

ならば, 次の (I) および (II) が成立する:

(I)　各 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, (F_λ) の解 $x(t;\lambda)$ で

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t;\lambda)}{\rho(t)} = 1$$

となるものがただ一つ存在する;

(II)　定理 1 の (II) と同一の命題が成立する (すなわち, この定理の (I) における $x(t;\lambda)$ に対して, 定理 1 (II) の性質 [P], [Q] を満たす 2 つの列 $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ が存在する).

定理 1 を, $p(t) \equiv 1$ のときの特異固有値問題の形でまとめ直せば, 次の系が得られる.

系.　特異固有値問題

$$\begin{cases} x'' + \lambda q(t) x = 0, \quad t \geq a, \\ x(a) = 0, \quad \displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t) = 1 \end{cases}$$

を考える. $q(t)$ は $[a,\infty)$ 上の連続関数で, 正の値もとるし負の値もとるとする. このとき, もし

$$\int_a^\infty t|q(t)|\,dt < \infty$$

ならば, この問題は λ が固有値 λ_n および μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ のとき, かつ, このときに限り解をもつ. ここで,

$$\cdots < \mu_n < \cdots < \mu_2 < \mu_1 < 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

であり, n 番目の固有値 $\lambda = \lambda_n$ および $\lambda = \mu_n$ に対応する固有関数 $x(t;\lambda_n)$ および $x(t;\mu_n)$ は区間 $[a,\infty)$ に丁度 n 個の零点をもつ.

上述の系における特異固有値問題において, $q(t) > 0$ $(t \geq a)$ の場合は負の固有値列は出現しないし, 同様に, $q(t) < 0$ $(t \geq a)$ の場合は正の固有値列は出現しない. しかし, $q(t)$ が正の値もとるし負の値もとる場合は, 正の固有値列と負の固有値列が同時に出現するのである.

定理 1 の証明は, 方程式 (F_λ) を適当に変換して, 定理 2 が使える場合に帰着させる. 以下, 定理 2 を証明するために必要な補題を挙げよう. 補題の証明は紙数の関係で略す.

補題 1. 定理 2 における積分条件

$$\int_a^\infty \rho(t)|q(t)|\,dt < \infty, \quad ここで \quad \rho(t) = \int_t^\infty \frac{ds}{p(s)},$$

を仮定する. このとき, 各 $\lambda > 0$ に対して, (F_λ) の解 $x(t;\lambda)$ で

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t;\lambda)}{\rho(t)} = 1$$

となるものがただ一つ存在する. この $x(t;\lambda)$ は

$$\lim_{t\to\infty} p(t)x'(t;\lambda) = -1$$

を満たし, $x(t;\lambda)$ および $x'(t;\lambda)$ は $(t,\lambda) \in [a,\infty) \times (0,\infty)$ の連続関数である.

我々は, (F_λ) を

$$(\mathrm{F}_\lambda^*) \qquad (p(t)x')' + (-\lambda)(-q(t))x = 0, \quad t \geq a,$$

と書き換えることによって, $\lambda > 0$ であるとして一般性を失わないことに注意する.

補題 1 における解 $x(t;\lambda)$ に対して, 次の形の Prüfer 変換

$$\begin{cases} x(t;\lambda) = r(t;\lambda)\sin\theta(t;\lambda) \\ p(t)x'(t;\lambda) = \lambda r(t;\lambda)\cos\theta(t;\lambda) \end{cases}$$

を行う (通常の Prüfer 変換と僅かに違うことに注意されたい).

補題 2. $\theta(t;\lambda)$ は $(t,\lambda)\in[a,\infty)\times(0,\infty)$ の連続関数としてとれ,

$$\theta'(t;\lambda)=\frac{\lambda}{p(t)}\cos^2\theta(t;\lambda)+q(t)\sin^2\theta(t;\lambda)$$

を満たす.

補題 3. 各 $\lambda>0$ に対して, $\lim_{t\to\infty}\theta(t;\lambda)=\pi \pmod{2\pi}$ である.

我々は, 一般性を失うことなく, $\lim_{t\to\infty}\theta(t;\lambda)=\pi$ であるとする.

補題 4. 各 $t\in[a,\infty)$ に対して, $\theta(t;\lambda)$ は $\lambda\in(0,\infty)$ についての strictly decreasing な関数である.

補題 5. $\lim_{\lambda\to+0}\theta(a;\lambda)=\pi$ かつ $\lim_{\lambda\to+\infty}\theta(a;\lambda)=-\infty$ である.

補題 2 ~ 補題 5 を使うと, 各 $i=1,2,\ldots$ に対して, $\theta(a;\lambda_i)=-(i-1)\pi$ となる $\lambda_i>0$ がただ一つ存在することがわかる. このとき, この $\{\lambda_i\}$ は定理 2 (II) の性質 [P] を満たすことが検証できる.

References

[1] E. Hille, *Lectures on Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley, 1969.

[2] T. Kusano and M. Naito, Singular eigenvalue problems for second order linear ordinary differential equations, preprint.