数理解析研究所講究録
1034巻 1998年 52-64

放物型方程式の解の爆発現象：今何が問題か

鈴木貴 (Takashi SUZUKI) 大阪大学·大学院理学研究科

平成9年 12月 29日

1 古典解の有限時間爆発

$\Omega\subset\mathcal{R}^n$ を境界 $\partial\Omega$ が十分滑らかな有界領域、$f\in C^1(\mathcal{R})$ を非線形項として自励系の半線形放物型初期境界値問題

$$u_t-\Delta u=f(u)\quad\text{in}\quad\Omega\times(0,T),\qquad u|_{\partial\Omega}=0,\qquad u|_{t=0}=u_0(x)\tag{1}$$

を考える。初期値 $u_0\in C_0(\overline{\Omega})$、すなわち境界で 0 となる $\overline{\Omega}$ 上の連続関数とすれば $0<T\ll 1$ に対して時間局所的古典解

$$u=u(x,t)\in C\left(\overline{\Omega}\times[0,T)\right)\cap C^{2,1}\left(\Omega\times(0,T)\right)$$

が一意存在することは線形部分 $\partial_t-\Delta_D$ の基本解 $\{U(x,y;t)\}$ を用いて (1) を積分方程式

$$u(x,t)=\int_\Omega U(x,y;t)u_0(y)dy+\int_0^t ds\int_\Omega U(x,y;t-s)f\left(u(y,s)\right)dy\tag{2}$$

に書き換えて不動点定理に持ち込めば容易に証明することができる。またさらにこれと放物型正則性 ([34]) より $\limsup_{t\uparrow T}\|u(t)\|_\infty<+\infty$ ならば解は $t=T$ を越えて延長できることもわかる。

今 $\liminf_{t\uparrow T}\|u(t)\|_\infty<+\infty$ であるものとすると時刻 $t_j\uparrow T$ 定数 $M>0$ が存在して $\|u(t_j)\|_\infty\leq M$ となる。$b_j^\pm=b_j^\pm(t)$ を常微分初期値問題

$$\dot{b}=f(b),\qquad b|_{t=t_j}=\pm M\tag{3}$$

の解とすれば、比較定理より $u(x,t)$ と $b_j^\pm(t)$ が存在する限り

$$b_j^-(t)\leq u(x,t)\leq b_j^+(t)$$

が成り立つ。(3) は自励系であるから $b_j^\pm(t)$ の存在時刻は T を越え

$$\limsup_{t\uparrow T}\|u(t)\|_\infty<+\infty$$

となる。

言い換えると $T_{\max}$ を (1) の解の最大存在時間とするとき $T_{\max} < +\infty$ であれば $\lim_{t\uparrow T_{\max}} \|u(t)\|_\infty = +\infty$ となる。この事を勘案して $T_{\max} < +\infty$ のとき解 u は時刻 $T_{\max}$ で爆発 (blow-up) するといわれ

1. 解の爆発はおこるかどうか

2. 爆発時刻で解はどのようにふるまうか

3. 爆発後の解はどのようになるか

といったことが議論されてきたのである (c.f. [37]) 。

2　爆発条件と特異定常解

正定数 λ_0 に対して $f(u) = \lambda_0 e^u$ すなわち

$$u_t - \Delta u = \lambda_0 e^u \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \tag{4}$$

は燃焼気体のモデル方程式であり ([3]) 定常問題

$$-\Delta v = f(v) \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad v = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{5}$$

が非定常問題の解の時間大域的挙動に深く関ることが知られるきっかけとなったものである。Fujita [13] は (5) が解をもてば常にその最小解 $\underline{v}(x)$ が存在すること、またもし非最小解 $\overline{v}(x)$ が存在したものとすれば次が成り立つことを示している。

1. $0 \leq u_0 \leq\not\equiv \overline{v} \implies T_{\max} = +\infty$, $\lim_{t\to+\infty} \|u(t) - \underline{v}\|_\infty = 0$

2. $u_0 \geq\not\equiv \overline{v} \implies T_{\max} < +\infty$ または

$$T_{\max} = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} \|u(t)\|_\infty = +\infty \tag{6}$$

(6) が成り立つとき解は無限時間爆発 (blow-up in infinite time) するといわれているが実はこのときはこのことはおこらない。すなわち Lacey [31] は上述の2番目のケースを次のように精密化した。

非最小解 $\overline{v}(x)$ のまわりの線形化作用素 $-\Delta_D - f'(\overline{v}(x))$ の第一固有関数を $\phi_1(x) > 0$ とするとき

$$u_0 \not\equiv \overline{v}, \int_\Omega u_0\phi_1 \geq \int_\Omega \overline{v}\phi_1 \implies T_{\max} < +\infty$$

特に初期値は $\overline{v}(x)$ と絡んでもよい。

ここで述べるのは別の方向への拡張であって $\underline{v}, \overline{v}$ はそれぞれ super- solution, sub-solution としてもよいというものである。

定理 1 ([30]) *(1)* において

$$f \in C^1(\mathcal{R}) : 凸, \qquad \limsup_{s\to-\infty} f(s)/s < \lambda_1 < \liminf_{s\to+\infty} f(s)/s,$$
$$\int^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty \tag{7}$$

であり関数 $\underline{v}, \overline{v} \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ が存在して

$$-\Delta \underline{v} \geq f(\underline{v}), \quad -\Delta \overline{v} \leq f(\overline{v}), \quad \underline{v} \leq\not\equiv \overline{v} \qquad in \quad \Omega$$

であるものとすれば、初期値 $u_0 \in C_0(\overline{\Omega})$ が $u_0 \geq\not\equiv \overline{v}$ をみたすときは

$$T_{\max} < +\infty, \qquad \lim_{t \uparrow T_{\max}} \max_{\overline{\Omega}} u(\cdot, t) = +\infty \tag{8}$$

である。

この定理から今まで知られていない爆発条件がいくつか得られる。次はその一例であり Friedman and McLeod [11] の研究などをある意味で正当化するものとなっている。

系 2 *(1)* において非線形項 $f(u)$ が *(7)* および $f(0) \leq 0$ をみたし初期値 $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ が

$$u_0 \geq 0, \quad -\Delta u_0 \leq \not\equiv f(u_0) \qquad in \quad \Omega$$

をみたすときは *(8)* となる。

[13] の証明は、定常問題 (2) の三つの解が順序を持つことはないという事実に基づいて背理法でなされていた。一方 [31] では $j(t) = \int_\Omega u(x,t)\phi_1(x)dx$ に関する微分不等式を導出する Kaplan の方法が適用されている。ここで我々が用いたのは定常問題に関する [13] の結果を特異解まで広げて議論することである。初期値をこのような範囲でとると (1) の解の時間局所一意存在はもはや成立しないし定常問題に対する [13] のような取り扱いもできなくなる。こうした技術的な困難は (2) の最小解を考えることにより克服した。

特異定常解が放物型発展系の解の時間大域挙動に果たす役割は Peral and Vazques [43] や Brezis, Cazenave, Martel and Ramiandrisa [6] でも論じられている。

3 無限時間爆発と特異定常解

$1 < p < \infty$ に対して

$$u_t - \Delta u = |u|^{p-1}u \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,T), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0(x) \tag{9}$$

を考えよう。Ôtani [41] は $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ の場合にはすべての時間大域的古典解は一様有界: $\|u(t)\|_\infty \leq C$。よってその軌道の ω 極限集合は連結·コンパクトで古典定常解の集合 E に含まれることを示している (c.f. [7], [17])。一方 $p \geq \frac{n+2}{n-2}$ で Ω:star-shaped のときは定常解の集合 E は空集合となる ([42])。Ni, Sacks and Tavantzis [40] はこのような場合に時間大域的古典軌道は無限時間爆発か 0 に一様収束かに分類されることを述べている。一般の領域では次のようなことが成り立つ。

(1) において $T_{\max} = +\infty$ とすれば、解の軌道は一様有界でなければ無限時間爆発する。

軌道の一様有界性はそのコンパクト性と ω 極限集合に関する上述の性質を導く。$E_+ = \emptyset$ のとき $\|u(t)\|_\infty \leq C$ から $\lim_{t\to+\infty} \|u(t)\|_\infty = 0$ となり上述した [40] の分類定理が得られる。

ここで述べるのは無限時間爆発の energy level による特徴づけである。(9) の解 $u = u(x,t)$ は

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}$$

に対して

$$\frac{d}{dt}J(u(t)) = -\int_\Omega |u_t|^2 \leq 0$$

をみたす。$\beta = \lim_{t\uparrow T_{\max}} J(u(t))$ とおけば

定理 3 ([28]) $p = \frac{n+2}{n-2}$, *Ω:star-shaped,* $T_{\max} = +\infty$ のとき無限時間爆発と $\beta > 0$ とは同値である。

このことから

系 4 *(9)* において $p = \frac{n+2}{n-2}$,

$$\Omega = B_1(0), \qquad 0 \leq u_0 = u_0(|x|): \textit{ decreasing in } r = |x| \tag{10}$$

のときに無限時間爆発がおこるとすれば $\beta > 0$ に対して

$$\left(\frac{1}{2}|\nabla u(x,t)|^2 - \frac{1}{p+1}|u(x,t)|^{p+1}\right)dx \rightharpoonup \beta\delta_0(dx) \qquad (t \to +\infty) \tag{11}$$

実際、無限時間において (11) のような特異性が生成されることは前定理と特異定常解の非存在から導出することができる。(11) において $\beta > 0$ が重要だが実は $T_{\max} = +\infty$ で $\beta > 0$ ならば β は次元のみによる定数によって下から押さえられる。また一般の領域に対しては定理は

$T_{\max} = +\infty$ のとき

$$\beta = 0 \iff \lim_{t\to+\infty} \|u(t)\|_\infty = 0$$

という命題になる。

$1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ の場合には $T_{\max} < +\infty$ と $\beta < 0$ とが同値となることが知られている ([27], c.f. [17])。定理の証明はそこで用いられた double well の方法 ([46]) によりなされるが $p = \frac{n+2}{n-2}$ は $X = H_0^1(\Omega)$ において (9) の基本定理を作るのに critical であり解の存在域 T は下から、$\|\nabla u(t)\|_2$ は上から $\|\nabla u_0\|_2$ では評価できず ([26], [47]) 技術的な困難を与えることになる。

4 有限爆発時刻をもつ時間大域解

系 4 では無限時間爆発が実際におこるかどうかということは述べられていない。実はこのことと有限時刻で爆発したあとさらに解が時間的に接続されていくかどうかということは深い関りがあることが [40] で述べられている。これは Fujita のもう一つの爆発条件 [14] とも関係するので先にそれを述べる。

(9) で初期値は非負とする。$\lambda_1 > 0$, $\phi_1(x) > 0$ を $-\Delta_D$ の第一固有値および固有関数とし後者は $\int_\Omega \phi_1 = 1$ により正規化する。Jensen の不等式から $j(t) = \int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1$ は微分不等式

$$\frac{d}{dt}j + \lambda_1 j \geq j^p$$

をみたす。このことから $j_* = j_*(\lambda_1, p) > 0$ が存在して $j(0) > j_*$ ならば $T_{\max} < +\infty$ である。

[40] はこれを逆に使って $T_{\max} = +\infty$ ならば $j(0) \leq j_*$ よって初期時刻をずらせると

$$T_{\max} = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \int_\Omega u(\cdot,t)\phi_1 \leq j_* \quad (t \geq 0) \tag{12}$$

となることに着目する。$0 \not\equiv\leq u_1(x) \in C_0(\overline{\Omega})$ を固定し初期値を正定数 $\tau > 0$ をもちいて $u_0 = \tau u_1$ ととる。積分方程式 (2) から $0 < \tau \ll 1$ ならば $T_{\max} = +\infty$ であるからその解 $u(x,t)$ に対して (12) が成り立つ。ここで j_* が τ に依存しないことが重要である。一方 $\tau \gg 1$ に対しては上述の爆発条件から $T_{\max} < +\infty$ である。

$$\tau_* = \sup\{\tau > 0 \mid \text{初期値 } u_0 = \tau u_1 \text{ に対する解が一様有界}\}$$

とするとき $u_0 = \tau_* u_1$ を初期値とする解はどうなるであろうか。

$1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ のときは $T_{\max} = +\infty$ で ω 極限集合が定常問題 (5) の energy 最小解を含むことが予想できる (c.f. [36])。実際 Ω:凸 のときは $0 < \tau < \tau_*$ に

対する (12) より $\tau = \tau_*$ に対する解の L^1 有界が出て、これから $1 < p < \frac{n+2}{n}$ のときはこの解は一様有界となり軌道のコンパクト性が保証される。ここで $p = \frac{n+2}{n}$ は Fujita [12] の臨界指数とよばれるものである (c.f. [35])。

一方 $p \geq \frac{n+2}{n-2}$ では一様有界でない時間大域的な L^1 解が得られる。実際 Ω:凸 としなくてもこの場合 $u(t)$ は $\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ に対し $L^1(\Omega, \delta(x)dx)$ に連続的に値をとり積分方程式 (2) の時間大域的な解となることがわかる。[40] によって発見されたこのような解は、前節で述べた無限時間の爆発というものがおこっていなければ有限爆発時刻をもつ時間大域解となるのである (c.f. [33])。なお (12) は定理 1 の証明にも用いられている。

5 不完全燃焼はおこり得るか

前節で述べた Ni-Sacks-Tavantzis の解について Galaktionov and Vazquez [16] は (10) (今後このようなときを radial case という) かつ $\frac{n+2}{n-2} < p < 1 + \frac{6}{(n-10)_+}$ のときは本当に有限爆発時間をおこすことを特異定常解および特異自己相似解をもちいた巧妙な比較定理で示している。実際これらの特殊解の構造について $p = \frac{n+2}{n-2}$ を越えた所にさらに臨界指数が存在することは Gui, Ni, and Wang [21] 以来認識されて来た。

これに対して $p = \frac{n+2}{n-2}$, $\Omega = \mathcal{R}^n$, かつ radial case ではこの解は無限時間の爆発をおこす。その根拠はこのケースでは有限時刻での爆発は必ず完全爆発になるからである。

完全爆発という概念は Baras and Cohen [2], Lacey and Tzanetis [32] に由来する。その説明には (2) の解を考えると都合がよい。$u_0(x) \geq 0$, $f(u) \geq 0$ を仮定し可測関数

$$u : Q \equiv \Omega \times (0, +\infty) \to [0, +\infty]$$

で (2) を a.e. in Q でみたすものを考える。$u \mapsto f(u)$ がさらに単調増加のとき単調反復列

$$u_{k+1}(x,t) = \int_\Omega U(x,y;t)u_0(y)dy + \int_0^t ds \int_\Omega U(x,y;t-s) f\left(u_k(y,s)\right) dy$$

は各点ごとに単調増加であり極限関数 $u_*(x,t)$ は (2) の最小解となる。

$$T_c = \sup\{t > 0 \mid u_*(x,t) < +\infty \qquad \text{a.e.} \quad x \in \Omega\}$$

を完全爆発時刻 (complete blow-up time)、$T_{\max} = T_c$ であるような爆発を完全爆発 (complete blow-up) と呼ぶ。完全爆発はまた (1) において $f(u)$ を $f_k(u) = f(u) \wedge k$ としたときの時間大域解 $u_k(x,t)$ をとり、もとの方程式の爆発時刻を $T_{\max}$ としたときに

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x,t) = +\infty \qquad (x \in \Omega,\ t > T_{\max})$$

となることを意味する。実際、常に $T_{\max} \leq T_c$ であり

$$t > T_c \quad \Longrightarrow \quad u_*(x,t) = +\infty \quad (x \in \Omega)$$

であることは容易にわかる。[2] では完全爆発のための十分条件として Ω: 有界、$1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ が上げられていたが [16] により radial case では $\Omega = \mathcal{R}^n$、$p = \frac{n+2}{n-2}$ も同様であるとされたのである。

ここで我々はもうひとつの問題を考えたい。すなわち爆発時刻後の解はすべて (2) をみたすのであろうか。この formulation では解は常に $u(x,t) = +\infty$ a.e. $x \in \Omega$ または $u(x,t) < +\infty$ a.e. $x \in \Omega$ となるがそれは正当なことなのであろうか。方程式を値が有限のところでみたし deat core

$$D(t) = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x,t) = +\infty\}}$$

が正測度を保つことはないのだろうか。実は測度論的にはそのようなことはおこりえず、定式化 (2) がほぼ正しいことを保証するのが次の定理である。

定理 5 ([45]) 有界領域 $\Omega \subset \mathcal{R}^n$, $T > 0$ に対して

$$u = u(x,t) : \Omega \times [0,T] \ \rightarrow \ (-\infty, +\infty]$$

は連続、*dead core* $D(t)$ は

$$D = \bigcup_{0 \leq t \leq T} D(t) \times \{t\} \subset \Omega \times [0,T]$$

をみたすものとすると超関数の意味で

$$u_t - \Delta u \geq 0 \qquad in \quad \Omega \times (0,T) \setminus D$$

ならば各 $t_0 \in (0,T)$ に対して $\liminf_{t \to t_0} L^n(D(t)) = 0$ である。

すなわち線形放物型方程式の super-solution は正測度の dead core を正の時間にわたってコンパクト集合の内部に閉じ込めることはできない。より詳しくは $n = 1$ のとき $\liminf_{t \to t_0} D(t) = \emptyset$, $n \geq 2$ のとき任意の $\emptyset \neq J$: open $\subset (0,T)$ に対し

$$\begin{aligned} \int_J \log\left(L^n(D(t))\right) dt &= -\infty \quad (\text{if } n = 2) \\ \int_J L^n(D(t))^{-\frac{n-2}{n}} dt &= +\infty \quad (\text{if } n \geq 3) \end{aligned}$$

となることが証明できる。

6 L^1 適切でない放物型方程式

爆発時刻後の解の挙動ないし接続については Masuda [38] がおそらく最初の仕事で、時間を複素変数にして爆発時刻を関数空間に値をとる解析関数の特異点とみなす考え方が提示されている。次に前述の、積分方程式 (2) に基づいて完全爆発や一様有界でない時間大域解を議論することがなされ、現在まで活発に研究されてきた。また従属変数 u の変換や similarity solution の範囲で解を考えることによる接続も提案されている ([33])。

我々が考えた方法は解の爆発時の形状を考慮したものである。例えば $n=1$ の場合

$$u_t - u_{xx} = f(u) \quad (-1 < x < 1,\ t > 0), \qquad u\big|_{x=\pm 1} = 0 \tag{13}$$

において一点爆発がおこる場合が知られている ([11], [8])。このことは爆発時刻 $t = T_{\max}$ において解 $u_*(x) = u(x, T_{\max})$ がある $x_0 \in (-1,1)$ に対して

$$u_*(x_0) = +\infty, \qquad 0 \le u_*(x) < +\infty \quad (x \ne x_0)$$

となることを示す。さらに $x \mapsto u_*(x)$ は $(-1, x_0)$, $(x_0, 1)$ でそれぞれ単調増加、単調減少となっている。このことから爆発時刻後の解を定めるとき独立変数を

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix}$$

従属変数を $u \mapsto x$ とする変換が有効ではないかという考えを導く。すなわち $x = x(u,t)$ として解を接続するわけである。方程式と境界条件と初期条件を変換してそれらを $x(u,t)$ に対して $u > 0, t > T_{\max}$ において与える。$x(u,t)$ は $u \to +\infty$ で正にとどまっていても良いとしよう。もしその問題を解くことができたとしたら、逆変換してえられる関数 $u(x,t)$ は dead core をかかえたとしてもそれが有限の値のところで (13) をみたすことになる。

ところがこの問題は逆変換がそのような意味をもつような解を持たぬことがことが証明された ([44])。そして実は前述の定理 5 はその多次元版である。実際得られる方程式は

$$x_t = x_u^{-2} x_{uu} - f(u) x_u \tag{14}$$

であり $v = x_u$ と $s = u$ によって

$$v_t = \left(-v^{-1}\right)_{ss} - \left(f(s)v\right)_s$$

となる。これを $s \gg 1$ において考えることになる。もともとの問題が x の有界区間で考えられていることから $v(\cdot, t) \in L^1(s_0, +\infty)$ でなければならな

い。実はこの方程式はこの空間では解けず、こうしたことは起こり得ないことが証明できるのである。

この問題は長い間解決の糸口がつかめないでいたが、実は Herrero [22] のほぼ逆のプロセスであることに気がついたことが突破口となったものである。すなわち [22] では $f(u) \equiv 0$ の場合に (14) を考察し古典解が $L^1(\mathcal{R})$ に属さぬことを (13) を用いて証明しているのである。そこで我々は $f(u) \geq 0$ のときも同様であろうと見当を付け、全く別の証明方法を考案したのである。

このような準線形特異放物型方程式の L^1 非適切性と関連するのは最近の Evans [10] や Chen, Giga and Sato [9] である。これらは有界区間 (a, b) において

$$x_t = x_u^{-2} x_{uu} \tag{15}$$

を考えている。上述の変換からこれは熱方程式

$$u_t = u_{xx} \tag{16}$$

と関連することになる。実際、前者は (16) において多価の初期値が瞬時に一価となること (instant unholding) を、後者は (15) の解が一瞬にして消滅すること (instant extinction) を論じている。

もし (15) を

$$x_t = \left(-x_u^{-1}\right)_u,$$

と見ればそれは特異 p-Laplace 方程式となる。従ってこのような方程式は L^∞ 非適切となることが予想できる。

また $v = x_u = w^{-1/2}$ とおくと

$$w_t = w w_{ss} - \frac{1}{2} w_s^2 \tag{17}$$

となるがこれは伝染病モデルの方程式として Fukuda, Ishii and Tsutsumi [15] で論じられているものである。それによって (17) は

$$0 \leq w \leq M\left(1 + s^2\right), \qquad |w_s| \leq M\left(1 + s^2\right)\right)^{1/2}$$

および $w_{ss} \leq K$ のもとで $C\left(\mathcal{R}^n \times [0, +\infty)\right)$ で適切ということもわかっている。

7　非線形項が支配的でない爆発

Giga and Kohn [18] をはじめとする自己相似変換をもちいた一連の仕事により (9) の解の爆発や時間大域解の様子はかなりはっきりとわかるようになってきた ([19], [20])。例えば [19] では $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ のとき (10) のようなケースで爆発がおこったとすると $T = T_{\max}$ に対して

$$0 \leq u(0, t) \leq C(T - t)^{-1/(p-1)}$$

となることが示されている。これは常微分方程式

$$\frac{du}{dt} = u^p$$

の爆発と同じ order である。ところが Herrero and Velázquez [23] は $n \geq 11$ ではこの order よりも早く爆発する解が存在することを示している。これは自己相似変換の内部と外部の遷移層において大域挙動に本質的な力が働くことを暗示している。

実際このことは、遷移層にさらにスケール変換をほどこして内部と外部を接続するという方法 (matched asymptotic expansion) により示されている。これは Bressan [4] により (4) に対して適用されて以来 Stefan 問題や走化性の方程式などで成果を納めてきているが ([5], [24], [25]) いずれも非線形項が支配的でない爆発現象である。

特に Keller-Segel 系 ([29]) は粘菌の走化性をあらわす方程式であり random walk からの導出も知られている ([1])。その解の爆発は粘菌の動物態から植物態への移行をあらわすもので concentration という興味深い現象が解明されつつある。詳しいことは [39] とその文献を参照して欲しい。

参考文献

[1] Alt, W., *Biased random walk models for chemotaxis and related diffusion approximations*, J. Math. Biol. **9** (1980) 147-177.

[2] Baras, P., Cohen, L., *Complete blow-up after T_{max} for the solution of a semilinear heat equation*, J. Funct. Anal. **71** (1987) 142-174.

[3] Bebernes, J., Eberly, D., *Mathematical Problems for Combustion Theory*, Springer, New York, 1989.

[4] Bressan, A., *On the asymptotic shape of blow-up*, Indiana Univ. Math. J. **39** (1990) 947-960.

[5] Bressan, A., *Stable blow-up patterns*, J. Differential Equations **98** (1992) 57-75.

[6] Brezis, H., Cazenave, T., Martel, Y., Ramiandrisoa, A., *Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited*, Advances in Differential Equations **1** (1996) 73-90.

[7] Cazenave, T., Lions, P.L., *Solutions globales d'equations de la chaleleur semi lineaires*, Comm. Partial Differential Equations **9** (1984) 955-978.

[8] Chen, X.Y., Matano, H., *Convergence, asymptotic periodicity, and finite-point blow-up in one-dimensional semilinear heat equations*, J. Differential Equations **78** (1989) 160-190.

[9] Chen, Y.G., Giga, Y., Sato, K., *On instant extinction for very fast diffusion equations*, preprint.

[10] Evans, L.C., *A geometric interpretation of the heat equation with mutivalued initial data*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996) 932-958.

[11] Friedman, A., McLeod, B., *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. Math. J. **34** (1985) 425-447.

[12] Fujita, H., *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA **13** (1966) 109-124.

[13] Fujita, H., *On the nonlinear equations* $\Delta u + e^u = 0$ *and* $\partial v/\partial t = \Delta v + e^v$, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969) 132-135.

[14] Fujita, H., *On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations*, Proc. Symp. Pure Math. **18**, Amer. Math. Soc. (1970) 105-113,

[15] Fukuda, I., Ishii, H., Tsutsumi, M., *Uniqueness of solutions to the Cauchy problem for* $u_t - u\Delta u + \gamma |\nabla u|^2 = 0$, Differential and Integral Equations **6** (1993) 1231-1252.

[16] Galaktionov, V.A., Vazquez, J.L., *Continuation of blowup solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **50** (1997) 1-67

[17] Giga, Y., *A bound for global solutions of semilinear heat equations*, Comm. Math. Phys. **103** (1986) 415-421.

[18] Giga, Y., Kohn, R.V., *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985) 297-319.

[19] Giga, Y., Kohn, R.V., *Characterizing blowup using similarity variables*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987) 1-40.

[20] Giga, Y., Kohn, R.V., *Nondegeneracy of blowup for semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989) 845-884.

[21] Gui, C., Ni, W.-M., Wang, X., *On the stability and instability of positive steady states of a semilinear heat equaiton in* $\mathcal{R}^n$, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992) 1153-1181.

[22] Herrero, M.A., *A limit case in nonlinear diffusion*, Nonlinear Anal. **13** (1989) 611-628.

[23] Herrero, M.A., Velázquez, J.J.L., *Explosion de solutions d'équations paraboliques semilinéaires supercritiques*, C.R. Acad. Sci. Paris, I **319** (1994) 141-145.

[24] Herrero, M.A., Velázques, J.J.L., *Singularity formation in the one-dimensional supercooled Stefan problem*, Euro. J. Appl. Math. **7** (1996) 119-150.

[25] Herrero, M.A., Velázquez, J.J.L., *Singularity patterns in a chemotaxis model*, Math. Ann. **306** (1996) 583-623.

[26] Hoshino, H., Yamada, Y., *Solvability and smoothing effect for semilinear parabolic equations*, Funckcial. Ekvac. **34** (1991) 475-494.

[27] Ikehata, R., Suzuki, T., *Stable and unstable sets for evolution equations of parabolic and hyperbolic type*, Hiroshima Math. J. **26** (1996) 475-491.

[28] Ikehata, R., Suzuki, T., *Semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent: local and asymptotic behavior of solutions*, preprint

[29] Keller, E.F., Segel, L.A., *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol. **26** (1970) 399-415.

[30] Kohda, A., Suzuki, T., *Blow-up criteira for semilinear parablic equations*, preprint

[31] Lacey, A.A., *Mathematical analysis of thermal runaway for spatially inhomogeneous reactions*, SIAM J. Appl. Math. **43** (1983) 1350-1366.

[32] Lacey, A.A., Tzanetis, D.E., *Complete blow-up for a semilinear diffusion equation with a sufficiently large initial condition*, IMA J. Appl. Math. 41 (1988) 207-215.

[33] Lacey, A.A., Tzanetis, D.E., *Global, unbounded solutions to a parabolic equation*, J. Differential Equations **101** (1993) 80-102.

[34] Ladyzenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., Ural'ceva, N.N., *Linear and Quasilinear Equation of Parabolic Type*, Amer. Math. Soc., Providence, 1968.

[35] Levine, H.A., *The role of critical exponents in blowup theorems*, SIAM Review, **32** (1990) 262–288.

[36] Lions, P.L., *Asymptotic behavior of some nonlinear heat equations*, Physica **5D** (1982) 293-306.

[37] Matano, H., *Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **12** (1979) 401-454.

[38] Masuda, K., *Analytic solutions of some nonlinear diffusion equations*, Math. Z. **187** (1984) 61-73.

[39] Nagai, T., Senba, T., Suzuki, T., *Concentration behavior of blow-up solutions to a simplified system of chemotaxis*, in preparation

[40] Ni, W.-M., Sacks, P.E., Tavantzis, J., *On the asymptotic behavior of solutions of certain quasilinear parabolic equations*, J. Differential Equations **54** (1984) 97-120.

[41] Ôtani, M., *Existence and asymptotic stability of strong solutions of nonlinear evolution equations with a difference term of subdifferentials*, In; Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai **30**, *Qualitative Theory of Differential Equations*, North-Holland, Amsterdom, 1980.

[42] Pohozaev, S.I., *Eigenfunction of the equation* $\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Dokl. **6** (1965) 1408-1411.

[43] Peral, I., Vazquez, J.L., *On the stability or instability of the singular solution of semilinear heat equation with exponential reaction term*, Arch. Rational Meth. Anal. **129** (1995) 201-224.

[44] Sakaguchi, S., Suzuki, T., *Nonexistence of solutions for a degenerate parabolic equation describing imperfect ignition*, to appear in Nolinear Anal..

[45] Sakaguchi, S., Suzuki, T., *Interior imperfect ignition cannot occur on a set of positive measure*, to appear in Arch. Rational Mech. Anal..

[46] Sattinger, D.H., *On global solution of nonlinear hyperbolic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **30** (1968) 148-172.

[47] Weissler, F.B., *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in* L^p, Indiana Univ. Math. J. **29** (1980) 79-102.