数理解析研究所講究録
1036 巻 1998 年 1-22

A Construction of Multiwavelets

Ryuichi ASHINO*, Michihiro NAGASE†, Rémi VAILLANCOURT‡
(芦野 隆一) (長瀬道弘)

In memoriam Nobuhisa IWASAKI

追悼文

本論文を作成中の１９９８年１月２４日に急逝された本研究集会の代表者京都大学教授岩崎敷久氏に対し深い悲しみとともに慎んで哀悼の意を表します.

概要

マルチウェーブレット (multiwavelets) はウェーブレット正規直交基底のひとつの一般化である. ここでは, ウェーブレットの構成法を概観しつつ, ウェーブレットとマルチウェーブレットを対比しながら, r 次正則マルチウェーブレットを定義し, スプリットタイプのマルチウェーブレットを複数のウェーブレットをもとにして構成する方法を述べる. ある種のスプリットタイプのマルチウェーブレットにおいては, これらもとになるウェーブレットの正則性やバニシングモーメントを失うことなく, マルチウェーブレットのスケーリング関数より小さいサポート幅や窓幅をもつマルチウェーブレットのウェーブレット関数を構成することができる. このことは, マルチウェーブレットによって, 与えられた関数の特異性を検出する場合に, 位置についての検出の精度を上げることになる. コンパクトサポートでない場合には, 対称性をもつマルチウェーブレットが構成できる.

これらの結果は多次元の場合に拡張できるが, ここでは簡単のため, 1 次元の場合に限ろう.

1 ウェーブレットからマルチウェーブレットへ

次の記号法を使う. $[0, 2\pi/2^j]$ の 0 と $2\pi/2^j$ を同一視したトーラスを $2^j\mathbf{T}$ とかく. 関数 $f \in L^2(\mathbf{R})$ と整数 $j, k \in \mathbf{Z}$ に対し,

$$f_{jk}(x) := 2^{j/2} f(2^j x - k)$$

とかく. このとき, $||f_{jk}|| = ||f||$ が成り立つ. この関数 f_{jk} は, f にふたつの作用:

*Division of Mathematical Sciences, Osaka Kyoiku University, Japan
†Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Japan
‡Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, Canada

- Translation by integers: $f(x-k),\ k \in \mathbf{Z}$.
- Dyadic dilation: $f(2^j x),\ j \in \mathbf{Z}$.

を作用させたものであると考えられる.

定義 1.1 関数 $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ が $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底となるとき，ψ を**ウェーブレット関数**（wavelet function），または単に**ウェーブレット**という．このとき，$f \in L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底 $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ に関する展開

$$f = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} (f, \psi_{jk})\, \psi_{jk} \tag{1}$$

を**ウェーブレット展開**とよぶ．それぞれの ψ_{jk} $(j,k \in \mathbf{Z})$ もウェーブレットとよばれる．

ウェーブレット ψ_{jk} のフーリエ像は

$$\widehat{\psi_{jk}} = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}\, 2^{j/2} \psi(2^j x - k)\, dx = 2^{-j/2}\, e^{-ik\xi/2^j}\, \widehat{\psi}(\xi/2^j) \tag{2}$$

となる．したがって，j を固定したとき，$\mathrm{supp}\,\widehat{\psi_{jk}}$ は $k \in \mathbf{Z}$ によらず一定である．たとえば，ウェーブレット ψ がシュワルツの急減少関数であるなら，関数 f のウェーブレット展開の各項 $(f, \psi_{jk})\,\psi_{jk}$ は，j を固定して $k \in \mathbf{Z}$ を動かすとき，関数 f を x 空間（時間領域）において $k/2^j$ 刻みで局所化すると同時に，ξ 空間（周波数領域）では，関数 $\widehat{\psi}(\xi/2^j)$ で切り落とされる部分に局所化する．このようにウェーブレット関数が適当な条件を満たせば，ウェーブレット展開を時間周波数解析（超局所解析）の道具として使うことができる．

応用上，ウェーブレットには次のような条件を課すことが多い．

条件 1.1 (i) 局所性 (localization):

$$^\forall \ell \in \mathbf{N}, {}^\exists C_\ell;\ |\psi(x)| \le C(1+|x|)^{-\ell}.$$

(ii) バニシングモーメント (vanishing moments):

$$^\exists L \in \mathbf{Z}_+ := \mathbf{N} \cup \{0\}, 0 \le {}^\forall \ell \le L;\ \int_{\mathbf{R}} x^\ell \psi(x)\, dx = 0.$$

(iii) 正則性 (regularity):

$$^\exists r \in \mathbf{Z}_+;\ \psi \in C^r(\mathbf{R}).$$

一般に関数 ψ が局所性 (i) をもつとき，ψ は**無限遠で急減少**とよぶ．

ウェーブレット関数 ψ が，r 次の正則性 (iii) をもち，ψ の r 次までの導関数が局所性 (i) をもつなら，ψ が r 次までのすべてのバニシングモーメント (ii) （$L = r$）をもつことが知られている．たとえば，[1] 定理 7.2.1 をみよ．そこで他の条件から導けるバニシングモーメントを仮定せずにすむように，条件 1.1 をうまくまとめた条件のひとつとして，次の r 次正則性がある．

定義 1.2 非負の整数 $r \in \mathbf{Z}_+$ に対し，

$$\mathcal{S}_r(\mathbf{R}) := \{f \in C^r(\mathbf{R});\ \ f^{(\alpha)}, 0 \leq \alpha \leq r \text{は無限遠で急減少}\}$$

とする．関数 f が $f \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R})$ を満たすとき，f は r **次正則**であるという．

[15] では，微分を超関数の意味で考えて，$C^r(\mathbf{R})$ を $L^\infty(\mathbf{R})$ に取り替えた弱い条件を **r-regular** と呼んでいることを注意しておく．

ウェーブレット正規直交基底のうち，最も有名なのは Daubechies のウェーブレット [9] であろう．Daubechies のウェーブレットは実数値のコンパクト台をもつ正規直交基底であり，任意の自然数 $N \geq 2$ に対し，適当にウェーブレット関数 ${}_N\psi$ を構成すれば，サポート幅は $2N-1$ であり，$r(N)$ 次のヘルダー連続性と $N-1$ 次までのバニシングモーメントをもつようにできる．この $r(N)$ は，十分大きな N に対し，

$$\lim_{N \to +\infty} N^{-1} r(N) = 1 - (\log 3)/(2 \log 2) \simeq 0.2075$$

であることが知られている．Daubechies のウェーブレットは，数値計算を用いた応用上は非常に有用であったが，対称性をもたなかった．画像処理などの一部の分野では，この対称性が重要な意味をもつ．そこで，次の問題が考えられた．

- ある程度のヘルダー連続性とバニシングモーメントをもち，実数値でコンパクト台をもつ対称なウェーブレット正規直交基底を構成することができるか．

この問題は否定的に解決された．たとえば，[9], Theorem 8.1.4 をみよ．その後，上の問題の条件のどれかあきらめて，ウェーブレットを構成する研究がなされた．複素数値を許した Lawton のウェーブレット [14] や正規直交基底をあきらめた双直交（biorthogonal）ウェーブレット [9] な

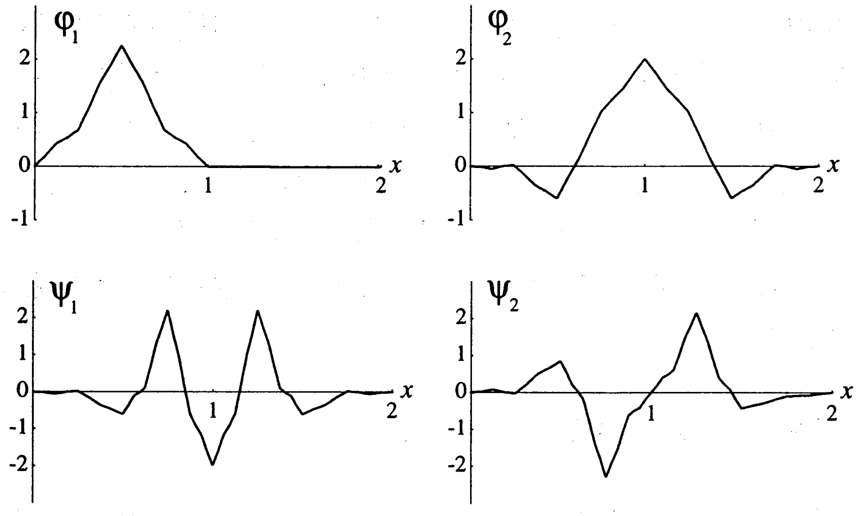

図 1: G-H-M マルチスケーリング関数と D-G-H-M マルチウェーブレット関数

どである．これ以前に構成されていたウェーブレットでは，不連続性を許した Haar のウェーブレット，コンパクト台でない場合には Meyer のウェーブレット [15] などがある．

このような流れとは別に，[2] のように，ウェーブレット正規直交基底をひとつのウェーブレット関数から生成するのではなく，複数のウェーブレット関数，つまり，ベクトル値のウェーブレット関数を使って，translation by integers と dyadic dilation だけで生成される正規直交基底を構成したとすればどのようなメリットをもつかが考えられた．

定義 1.3 $d \in \mathbf{N}$ に対し，$D := \{1, \dots, d\}$ とかく．ベクトル値関数 $\Psi := {}^t(\psi_1, \dots, \psi_d) \in L^2(\mathbf{R})^d$ が**マルチウェーブレット関数**（multiwavelet）であるとは，

$$\{(\psi_\delta)_{jk}(x) := 2^{j/2}\psi_\delta(2^j x - k)\}_{\delta \in D, j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}}$$

が $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底になるときをいう．$(\psi_\delta)_{jk}$ を**マルチウェーブレット**とよぶ．特に区別する必要があるときは，通常のウェーブレット（$d = 1$ の場合）を，ユニウェーブレット（uniwavelet）とよぶ．

$d = 2$ のとき，Geronimo, Hardin と Massopust [11] で構成されたマルチスケーリング関数（次節で説明）と Donavan, Geronimo, Hardin と Massopust [10] で構成されたマルチウェーブレット関数（図 1 を参照）は，fractal interpolation functions の方法を用いて構成し，連続で対称性をもち，0 次と 1 次のバニシングモーメントをもつコンパクト台の正規直交基底を生成する．これにより，

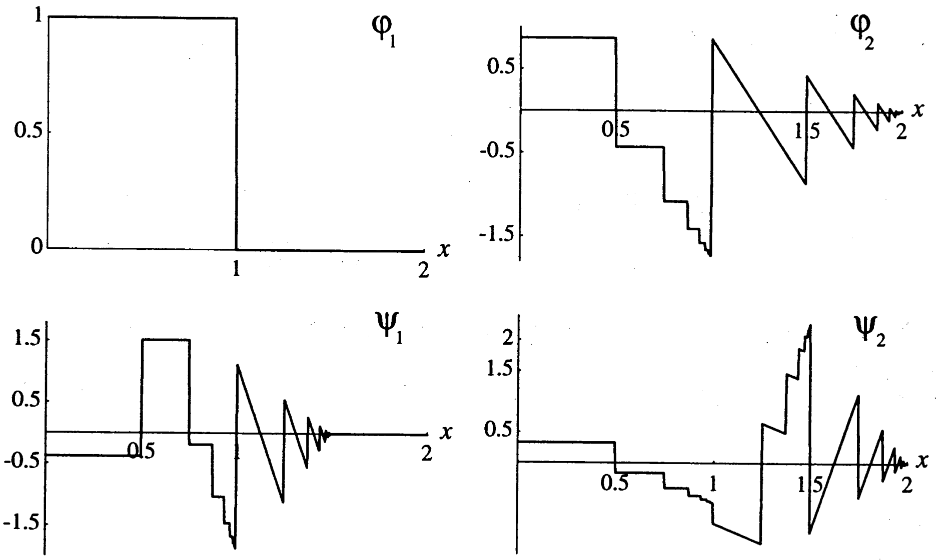

図 2: Strang–Strela のマルチスケーリング関数とマルチウェーブレット関数

- ある程度のヘルダー連続性とバニシングモーメントをもち，実数値でコンパクト台をもつ対称なマルチウェーブレット正規直交基底を構成することができるか.

という問題の肯定的解決が考えられているが，未だ十分に解決されてはいない．また，Strang と Strela [20] は $d = 2$ のとき，piecewise linear のマルチスケーリング関数とマルチウェーブレット関数（図 2 を参照）を構成した．マルチスケーリング関数からマルチウェーブレット関数を構成する一般論としては，Jia と Shen [12]，芦野と亀谷の [3] などがある.

2　多重解像度解析

いろいろなウェーブレットの構成を統一的に説明する Mallat の多重解像度解析（multiresolution analysis）方法のマルチウェーブレットへの拡張を述べよう.

定義 2.1 次の条件を満たす $L^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間の列 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ を多重解像度解析（MRA）とよぶ.

(a) $\cdots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots$（$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ は増大列であるという.）

(b) $\cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$

(c) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$

(d) $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$

(e) あるベクトル値関数 $\Phi(x) := {}^t(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_d(x)) \in (V_0)^d$ が存在して，$\{\varphi_\delta(x-k)\}_{\delta\in D, k\in\mathbf{Z}}$ は V_0 の正規直交基底となる.

整数 j を**スケール**といい，関数 Φ を**マルチスケーリング関数**とよぶ. 多重解像度解析 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ が r 次正則であるとは，$^\forall\delta \in D$; $\varphi_\delta \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R})$ が成り立つことをいう.

(e) より，

$$f(x) \in V_0 \iff {}^\forall k \in \mathbf{Z};\ f(x-k) \in V_0 \tag{3}$$

であり，(d) と (e) より，

$$V_j = \overline{\mathrm{Span}}\{(\varphi_\delta)_{jk}\}_{\delta\in D, k\in\mathbf{Z}} \tag{4}$$

が成り立つことに注意する.

一般存在定理とよばれる次の定理が成り立つ. 詳しい証明は [5] をみよ. この定理は変数 x が多次元の場合も成り立つ.

定理 2.1 r 次正則多重解像度解析 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ が与えられれば，r 次正則マルチウェーブレット関数を構成できる.

証明の方針： r 次正則多重解像度解析 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ が与えられたとする. 式 (4) と $V_0 \subset V_1$ により，

$$\begin{aligned} H_k : &= \left(\Phi(x), {}^t\Phi(2x-k)\right)_{L^2(\mathbf{R})} \\ &= \left((\varphi_\delta(x), \varphi_\eta(2x-k))_{L^2(\mathbf{R})}\right)_{(\delta,\eta)\in D\times D} \in \mathbf{C}^{d\times d} \end{aligned} \tag{5}$$

とおくと

$$\Phi(x) = 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} H_k \Phi(2x-k) \tag{6}$$

とかける. この式 (6) を Φ に関する方程式とみて，**伸張方程式**（dilation equation）とよぶ. 式 (6) のフーリエ変換は，

$$M_0(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} H_k e^{-ik\xi} \in L^2(\mathbf{T})^{d\times d} \tag{7}$$

とおくと，

$$\widehat{\Phi}(\xi) = M_0(\xi/2)\widehat{\Phi}(\xi/2) \tag{8}$$

とかける．ここで，$\widehat{\Phi}(\xi) := (\widehat{\varphi}_1(\xi), \ldots, \widehat{\varphi}_d(\xi)) \in L^2(\mathbf{R})^d$ である．関数 M_0 はローパスフィルタとよばれる．フィルタについては，次節で述べる．M_0 は次の補題 2.1 を満たす．

補題 2.1

$$M_0(\xi)M_0(\xi)^* + M_0(\xi+\pi)M_0(\xi+\pi)^* \equiv I_d, \qquad \text{a.e. } \xi \tag{9}$$

ただし，M_0^* は M_0 の複素共役転置，I_d は d 次単位行列である．

この証明には次の補題 2.2 を使う．

補題 2.2 関数列 $\{\varphi_\delta(x-k)\}_{\delta\in D, k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系である必要十分条件は

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \widehat{\Phi}(\xi+2\pi k)\widehat{\Phi}(\xi+2\pi k)^* \equiv I_d. \qquad \text{a.e. } \xi \tag{10}$$

整数 $j \in \mathbf{Z}$ に対し，V_{j+1} における V_j の直交補空間を W_j とおく．$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ である．V_0 と V_{-1} のフーリエ像が

$$\mathcal{F}V_0 = L^2(\mathbf{T})^d\widehat{\Phi}(\xi), \qquad \mathcal{F}V_{-1} = L^2(2\mathbf{T})^d M_0(\xi)\widehat{\Phi}(\xi) \tag{11}$$

であることを使って W_{-1} の構造を調べることにより，W_0 の構造がわかるから，あるベクトル値関数 $\Psi(x) := {}^t(\psi_1(x), \ldots, \psi_d(x)) \in (W_0)^d$ が存在して，$\{\psi_\delta(x-k)\}_{\delta\in D, k\in\mathbf{Z}}$ が W_0 の正規直交基底となることが示せる．このベクトル値関数 $\Psi(x)$ がマルチウェーブレット関数となる．■

注 2.1 変数 x の次元が n 次元なら，W_0 の基底を生成するマルチウェーブレット関数の成分の数は $(2^n-1)d$ である．たとえば，[3] をみよ．

具体的にマルチウェーブレット関数を構成する問題を考えよう．ベクトル値関数 $\Psi(x) := {}^t(\psi_1(x), \ldots, \psi_d(x)) \in (W_0)^d$ が存在して，$\{\psi_\delta(x-k)\}_{\delta\in D, k\in\mathbf{Z}}$ が W_0 の正規直交基底となるとする．このとき，

$$\begin{aligned} G_k : &= \left(\Psi(x), {}^t\Phi(2x-k)\right)_{L^2(\mathbf{R})} \\ &= \left((\psi_\delta(x), \varphi_\eta(2x-k))_{L^2(\mathbf{R})}\right)_{(\delta,\eta)\in D\times D} \in \mathbf{C}^{d\times d} \end{aligned} \tag{12}$$

とおくと

$$\Psi(x) = 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} G_k \Phi(2x-k) \tag{13}$$

とかける．この式 (13) を Ψ に関する方程式とみて，**ウェーブレット方程式**（wavelet equation）とよぶ．方程式 (13) は Φ を含むので，方程式 (7) と連立させて解く必要がある．式 (13) のフーリエ変換は，

$$M_1(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} G_k e^{-ik\xi} \in L^2(\mathbf{T})^{d\times d} \tag{14}$$

とおくと，

$$\widehat{\Psi}(\xi) = M_1(\xi/2)\widehat{\Phi}(\xi/2) \tag{15}$$

とかける．関数 M_1 はハイパスフィルタとよばれる．

補題 2.3 多重解像度解析 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ が与えられたとする．あるベクトル値関数 $\Psi(x) := {}^t(\psi_1(x),\ldots,\psi_d(x)) \in (W_0)^d$ が存在して，$\{\psi_\delta(x-k)\}_{\delta\in D,k\in\mathbf{Z}}$ が W_0 の正規直交基底となる必要十分条件は，$L^2(\mathbf{T})$ の元を成分とする $2d$ 次正方行列

$$M(\xi) := \begin{pmatrix} M_0(\xi) & M_0(\xi+\pi) \\ M_1(\xi) & M_1(\xi+\pi) \end{pmatrix} \tag{16}$$

が，ほとんど至るところの $\xi \in \mathbf{T}$ に対し，$2d$ 次ユニタリ行列になることである．

注 2.2 マルチスケーリング関数が r 次正則なら，$M_0(\xi) \in C^\infty(\mathbf{T})^{d\times d}$ が成り立つが，補題 2.3 の条件 (16) を満たす M_1 を $M_1(\xi) \in C^\infty(\mathbf{T})^{d\times d}$ が成り立つように構成できれば，式 (15) で定義されるマルチウェーブレット関数は，r 次正則なることが示せる．

定理 2.1 により，r 次正則マルチウェーブレット関数の構成は，r 次正則多重解像度解析の構成に帰着できるが，証明に使われている一般的な構成方法よりも，与えられた多重解像度解析，つまりマルチスケーリング関数に応じて，適切な構成方法を考えるほうが，良い性質をもつマルチウェーブレットが構成できることが多い．

3 フィルタ

簡単のため，通常のウェーブレット（ユニウェーブレット）について，ウェーブレットとフィルタとの関係を述べよう．

工学でいう信号とは，数学では時間 x の関数であると思ってよい．入力信号 $f(x)$ に対して出力信号 $g(x)$ を対応させる線形作用素：

$$g(x) = L[f(x)]$$

のことを**線形システム**という．任意の実数 $T \in \mathbf{R}$ に対し，

$$g(x) = L[f(x)] \implies g(x-T) = L[f(x-T)]$$

が成り立つとき，つまり任意の平行移動と可換であるとき，システム L は**時間不変**であるという．線形で時間不変なシステムを**フィルタ**（filter）とよぶ．フィルタをいくつか組合せたものを**フィルタバンク**（filter bank）という．フィルタは連続集合上の関数を変換する**連続フィルタ**と離散集合上の関数（したがって数列）を変換する**離散フィルタ**に分類されるが，ここでは $\mathbf{Z}$ 上の数列 $x = \{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ を変換する離散フィルタを扱う．

ある数列 $h = \{h_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ があって，合成積

$$(h * x)_n := \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_{n-k}x_k$$

で定義される離散フィルタ

$$H : \{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \mapsto (h * x)_n$$

を特に**デジタルフィルタ**（digital filter）とよぶ．また，作用素

$$S : \{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \mapsto \{x_{n-1}\}_{n\in\mathbf{Z}}$$

を**シフト作用素**とよぶ．このとき，

$$(h * x)_n = (x * h)_n = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k x_{n-k} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k S^k x_n$$

が成り立つから，

$$H = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k S^k$$

とかける．

注 3.1 一般に，数列 $h = \{h_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ に対し，数列 h の **z 変換**を

$$H(z) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n z^{-n}$$

で定義する．これは $z = e^{i\xi}$ とおくとフーリエ変換を離散化したものに対応している．このため，デジタルフィルタ H を定義する数列 $h = \{h_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ やその z 変換 $H(z)$, $H(e^{i\xi})$ などもデジタルフィルタとよばれる．

関数 $f(x)$ に対するシフト作用素 S の作用を

$$Sf(x) = f(x-1)$$

で定義する．このとき，

$$Hf = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k f(x-k)$$

とかける．

スケーリング関数から作られるローパスフィルタ m_0 とウェーブレット関数から作られるハイパスフィルタ m_1 の効果を見てみよう．簡単のため，$f \in V_1$ としよう．$V_1 = V_0 \oplus W_0$ であるから，f の V_0 への正射影 $\pi_{V_0} f$ は，ある $h_f = \{(h_f)_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})$ があって，V_0 の正規直交基底 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ により，

$$\pi_{V_0} f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (h_f)_k \, \varphi(x-k) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (h_f)_k \, S^k \varphi(x) \tag{17}$$

とかける．したがって，V_0 への正射影 $\pi_{V_0} f$ とは，スケーリング関数 $\varphi(x)$ へのデジタルフィルタ $h_f \in \ell^2(\mathbf{Z})$ の作用であると考えられる．同様に f の W_0 への正射影 $\pi_{W_0} f$ は，ある $g_f = \{(g_f)_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \in \ell^2(\mathbf{Z})$ があって，W_0 の正規直交基底 $\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ により，

$$\pi_{W_0} f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (g_f)_k \, \psi(x-k) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (h_f)_k \, S^k \psi(x) \tag{18}$$

とかける．

$$m_0(f)(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} (h_f)_k \, e^{-ik\xi}, \;\; m_1(f)(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} (g_f)_k \, e^{-ik\xi}$$

とおくと，式 (17) のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[\pi_{V_0} f](\xi) = m_0(f)(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) \tag{19}$$

$$\mathcal{F}[\pi_{W_0} f](\xi) = m_1(f)(\xi)\widehat{\psi}(\xi) \tag{20}$$

ユニウェーブレットの場合の伸張方程式 (6) とウェーブレット方程式 (13) のフーリエ変換をそれぞれ

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2), \;\; \widehat{\psi}(\xi) = m_1(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2) \tag{21}$$

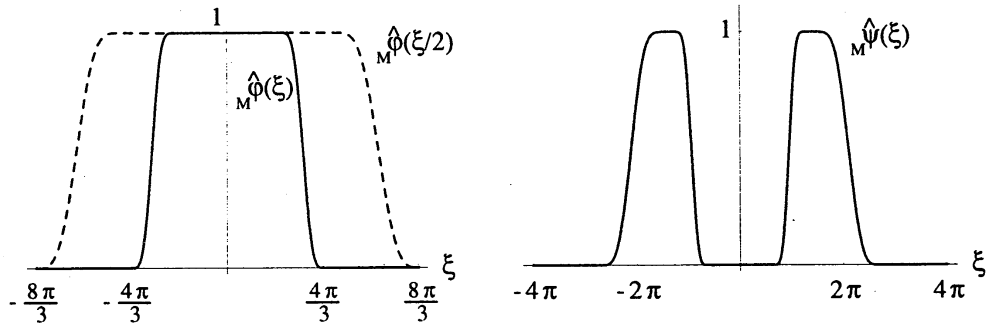

図 3: Meyer のスケーリング関数とウェーブレット関数のフーリエ像

とおくと，式 (19) と式 (20) はそれぞれ

$$\mathcal{F}[\pi_{V_0} f](\xi) = m_0(f)(\xi) m_0(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2) \tag{22}$$

$$\mathcal{F}[\pi_{W_0} f](\xi) = m_1(f)(\xi) m_1(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2) \tag{23}$$

とかける．したがって，V_0 への正射影と W_0 への正射影の効果を知るには，それぞれ $m_0(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2)$ と $m_1(\xi/2)\hat{\varphi}(\xi/2)$ を調べればよい．

典型的な Meyer のウェーブレット場合を見てみよう．Meyer のスケーリング関数のフーリエ像 $\widehat{_M\varphi}(\xi)$ と $\widehat{_M\varphi}(\xi/2)$ とウェーブレット関数のフーリエ像 $\widehat{_M\psi}(\xi)$ のグラフの概形を 図 3 に示す．グラフの概形からわかるように，$\mathrm{supp}\,\widehat{_M\varphi}(\xi)$ 上で，$\widehat{_M\varphi}(\xi/2) \equiv 1$ だから，Meyer のローパスフィルタ $_M m_0$ は，

$$_M m_0(\xi/2) = \widehat{_M\varphi}(\xi)/\widehat{_M\varphi}(\xi/2) = \widehat{_M\varphi}(\xi)$$

となり，$_M m_0(\xi/2)\widehat{_M\varphi}(\xi/2)$ は，周波数領域で，0 の近傍 $[-4\pi/3, 4\pi/3]$ に局所化する切落し関数として働く．一般に，補題 2.3 の式 (16) より，ユニウェーブレットのローパスフィルタ m_0 とハイパスフィルタ m_1 は

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_1(\xi)|^2 \equiv 1$$

を満たす．Meyer のハイパスフィルタ $_M m_1$ は，$[-2\pi/3, 2\pi/3]$ 上 $\widehat{_M\varphi}(\xi) \equiv 1$ だから，周波数領域で，$[-8\pi/3, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, 8\pi/3]$ に局所化する切落し関数として働く．Meyer のウェーブレット場合には，

$$f \in V_1 \implies \mathrm{supp}\,\hat{f} \subset [-8\pi/3, 8\pi/3]$$

であるから，ローパスフィルタ $_M m_0$ は信号 f の低周波部分を切り落とし，ハイパスフィルタ $_M m_1$ は信号 f の高周波部分を切り落としていると考えられる．これと同様のことが，一般のウェーブレット場合にも成

り立ち，m_0 がローパスフィルタ，m_1 がハイパスフィルタとよばれている理由である．

このローパスフィルタ m_0 とハイパスフィルタフィルタ m_1 によるフィルタリングのひとつの一般化を考えよう．

ウェーブレットを構成する多重解像度解析 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ が与えられたとする．このとき，多重解像度解析から決まるスケーリング関数 φ を使って，伸張方程式 (6) から m_0 が求まる．ウェーブレット関数は，ウェーブレット方程式 (13) から決まる m_1 が補題 2.3 の式 (16) を満たすように構成すればよい．これには，たとえば，

$$m_1(\xi) := e^{-i\xi}\,\overline{m_0(\xi+\pi)} \tag{24}$$

ととればよい．このとき，ウェーブレット関数は

$$\psi(x) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-i\xi/2}\,\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\,\widehat{\varphi}(\xi/2)] \tag{25}$$

で与えられる．ただし，$\mathcal{F}^{-1}$ はフーリエ逆変換を表す．これは，

$$m_0(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\, e^{-ik\xi}, \quad m_1(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k\, e^{-ik\xi} \tag{26}$$

と表すとき，m_1 を式 (24) で決めれば，

$$m_1(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^{1-k}\overline{h_{1-k}}\, e^{-ik\xi}$$

となるので，

$$g_k = (-1)^{1-k}\overline{h_{1-k}} \tag{27}$$

である．

次の補題 3.1 が成り立つ．証明は，たとえば，[1], 補題 10.2.1 をみよ．

補題 3.1 関数 $f\in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であるとする．多重解像度解析 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ に付随する，式 (26) で表されたローパスフィルタ m_0 とハイパスフィルタフィルタ m_1 が与えられたとする．このとき，

$$F_0(x) := 2\textstyle\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k f(2x-k), \quad F_1(x) := 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k f(2x-k)$$

とおくと，任意の $j\in\mathbf{Z}$ に対し，$\{(F_i)_{jk}\}_{i\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}}$ は正規直交系であって，

$$\overline{\mathrm{Span}}\,\{(F_i)_{jk}\}_{i\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}} = \overline{\mathrm{Span}}\,\{f_{j+1,k}\}_{k\in\mathbf{Z}} \tag{28}$$

が成り立つ．

補題 3.1 で，$f=F_1=\varphi$, $F_2=\psi$ とおいた場合が，スケーリング関数とウェーブレット関数を使った直交直和分解 $V_j\oplus W_j = V_{j+1}$ に対応する．

4 マルチウェーブレットの構成

まず，n 次元の場合も含めた結果を述べよう．証明は [5] をみよ．

定理 4.1 n 次元のユニウェーブレットを生成するひとつの r 次正則多重解像度解析から，$d=2^n$ の場合の n 次元のマルチウェーブレットを生成する r 次正則多重解像度解析が構成できる．

定理 4.2 1 次元のユニウェーブレットを生成するひとつの r 次正則多重解像度解析と 1 次元のユニウェーブレットを生成する (2^n-1) 個の 0 次正則多重解像度解析から，$d=2^n$ の場合の n 次元のマルチウェーブレットを生成する r 次正則多重解像度解析が構成できる．

定義 4.1 定理 4.2 の方法で生成されるマルチウェーブレットを**スプリットタイプ**（Split-type）のマルチウェーブレットとよぶ．

スプリットタイプのマルチウェーブレットの構成法は補題 3.1 をもとにしている．ある種のスプリットタイプのマルチウェーブレットにおいては，これらもとになるユニウェーブレットの正則性やバニシングモーメントを失うことなく，マルチスケーリング関数より小さいサポート幅や窓幅をもつマルチウェーブレット関数を構成することができる．

1 次元のスプリットタイプのマルチウェーブレットを構成してみよう．1 次元のユニウェーブレットを生成するひとつの r 次正則多重解像度解析が与えられたとする．したがって，式 (21) を満たす $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ が与えられたことになる．ただし，m_1 は式 (24) で定義する．同様に，1 次元のユニウェーブレットを生成する別の 0 次正則多重解像度解析が与えられたとすると，あるローパスフィルタ $\widetilde{m}_0(\xi)\in C^\infty(\mathbf{T})$ とハイパスフィルタ $\widetilde{m}_1(\xi)\in C^\infty(\mathbf{T})$ があって，補題 2.3 により，

$$\begin{cases} |\widetilde{m}_0(\xi)|^2+|\widetilde{m}_0(\xi+\pi)|^2=1 \\ |\widetilde{m}_1(\xi)|^2+|\widetilde{m}_1(\xi+\pi)|^2=1 \\ \widetilde{m}_0(\xi)\overline{\widetilde{m}_1(\xi)}+\widetilde{m}_0(\xi+\pi)\overline{\widetilde{m}_1(\xi+\pi)}=0 \end{cases} \tag{29}$$

を満たす．このとき，次の補題 4.1 が成り立つ．

補題 4.1 $d=2$ とする．1 次元のユニウェーブレットを生成するひとつの r 次正則多重解像度解析からスケーリング関数 φ とウェーブレット関

数 ψ および 1 次元のユニウェーブレットを生成する別の 0 次正則多重解像度解析からローパスフィルタ $\widetilde{m}_0$ とハイパスフィルタ $\widetilde{m}_1$ が与えられたとする．このとき，マルチスケーリング関数を

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}$$

とおけば，スプリットタイプのマルチウェーブレット関数は

$$\widehat{\Psi}(\xi) = \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1(\xi) \\ \widehat{\psi}_2(\xi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \widetilde{m}_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) \\ \widetilde{m}_1(\xi)\widehat{\psi}(\xi) \end{pmatrix}$$

で与えられる．

証明の方針： 伸張方程式 (6) は，

$$M_0(\xi) := \begin{pmatrix} m_0(\xi) & 0 \\ m_1(\xi) & 0 \end{pmatrix}$$

に対し，

$$\widehat{\Phi}(2\xi) = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1(2\xi) \\ \widehat{\varphi}_2(2\xi) \end{pmatrix} = M_0(\xi) \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1(\xi) \\ \widehat{\varphi}_2(\xi) \end{pmatrix}$$

である．与えられた 1 次元のユニウェーブレットを生成する r 次正則多重解像度解析を $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ とする．

$$\mathcal{V}_j := V_{j+1}, \quad {}^\forall j \in \mathbf{Z}$$

とおくと，$\{\mathcal{V}_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ が，$d=2$ の場合の，1 次元マルチウェーブレットを生成する r 次正則多重解像度解析であることが示せる．

定理 4.2 の証明に使われているスプリットタイプのマルチウェーブレット構成方法は次のようである．補題 2.3 によれば，行列 $M_1(\xi) \in C^\infty(\mathbf{T})^{2\times 2}$ を

$$\begin{pmatrix} M_0(\xi) & M_0(\xi+\pi) \\ M_1(\xi) & M_1(\xi+\pi) \end{pmatrix} \in U(4; C^\infty(\mathbf{T})) \tag{30}$$

を満たすように決めればよい．ここで，$U(4; C^\infty(\mathbf{T}))$ は $C^\infty(\mathbf{T})$ 関数を成分とする 4 次のユニタリ行列の集合を表す．式 (29) と同様に，補題 2.3 により，$m_0(\xi), m_1(\xi) \in C^\infty(\mathbf{T})$ は，

$$\begin{cases} |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 1 \\ |m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi+\pi)|^2 = 1 \\ m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} + m_0(\xi+\pi)\overline{m_1(\xi+\pi)} = 0 \end{cases} \tag{31}$$

を満たす．したがって，

$$M_1(\xi) := \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{m}_0(\xi) \\ 0 & \widetilde{m}_1(\xi) \end{pmatrix} \tag{32}$$

とおけば，条件 (30) を満たし，r 次正則マルチウェーブレットの多重解像度解析が構成できる．この場合，マルチウェーブレット関数は

$$\widehat{\Psi}(2\xi) = \begin{pmatrix} \widehat{\psi}_1(2\xi) \\ \widehat{\psi}_2(2\xi) \end{pmatrix} = M_1(\xi) \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(\xi) \\ \widehat{\psi}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{m}_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) \\ \widetilde{m}_1(\xi)\widehat{\psi}(\xi) \end{pmatrix} \tag{33}$$

で与えられる． ■

ウェーブレットパケットとの関連を述べておこう．

定義 4.2 ウェーブレット関数 ψ に対し，

$$\widehat{\psi}_{\ell;\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell}(2^\ell \xi) = \left(\prod_{j=1}^{\ell} m_{\varepsilon_j}(2^{\ell-j}\xi)\right)\widehat{\psi}(\xi) \tag{34}$$

で定義される関数 $\psi_{\ell;\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell}$ をウェーブレットパケットという．ただし，j 番目の $\varepsilon_j = 0$ または 1 に応じて，j 番目の積には m_0 または m_1 を選ぶとする．

上で述べたスプリットタイプのマルチウェーブレット ψ_1 と ψ_2 は，$\widetilde{m}_0 = m_0$ かつ $\widetilde{m}_1 = m_1$ の場合には，ウェーブレットパケット $\psi_{1;0}$ と $\psi_{1;1}$ に一致することを注意しておく．

5 マルチウェーブレットの例

ここでは，Daubechies のコンパクト台をもつユニウェーブレットをフィルタに使って，補題 4.1 で述べたスプリットタイプのマルチウェーブレットの例をあげよう．この例では，もとになるユニウェーブレットの正則性やバニシングモーメントを失うことなく，マルチウェーブレットのマルチスケーリング関数より小さいサポート幅や窓幅をもつマルチウェーブレット関数を構成する．

定義 5.1 関数 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ は $xf(x) \in L^2(\mathbf{R})$ を満たすとする．関数 f の平均（average）を

$$x_{\rm av} := \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x|f(x)|^2\,dx$$

とおく．関数 f の窓幅（width）を

$$\Delta_f := \frac{1}{\|f\|_2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_{\rm av})^2 |f(x)|^2\,dx \right]^{1/2}$$

とおく．

さらに，$\hat{f}(\xi), \xi\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbf{R})$ であるなら，$\xi_{\rm av}$ を $\hat{f}$ の平均とし，$\Delta_{\hat{f}}$ を $\hat{f}$ の窓幅とするとき，

$$[x_{\rm av} - \Delta_f, x_{\rm av} + \Delta_f] \times [\xi_{\rm av} - \Delta_{\hat{f}}, \xi_{\rm av} + \Delta_{\hat{f}}]$$

を**時間周波数の窓**（time-frequency window）という．

次の定理 5.1 はフーリエ解析の不確定性原理として知られている．

定理 5.1 $f(x), xf(x) \in L^2(\mathbf{R})$ かつ $\hat{f}(\xi), \xi\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbf{R})$ とする．このとき，

$$\Delta_f \Delta_{\hat{f}} \geq \frac{1}{2}$$

が成り立つ．

ユニウェーブレットのスケーリング関数 φ とウェーブレット関数 ψ がコンパクト台をもつなら，フィルタ m_0 と m_1 は三角多項式（フーリエ級数の項数が有限の場合）になる．したがって，Daubechies のコンパクト台をもつユニウェーブレットをフィルタに使ってスプリットタイプのマルチウェーブレットを構成する場合には，補題 4.1 は次の補題 5.1 にかきかえられる．

補題 5.1 $d = 2$, $N \in \mathbf{N}$ とする．1 次元のユニウェーブレットの r 次正則スケーリング関数を φ, r 次正則ウェーブレット関数を ψ とする．Daubechies のコンパクト台をもつユニウェーブレットのローパスフィルタを

$$_N m_0(\xi) = \sum_{k=0}^{2N-1} {_N h_k} e^{-ik\xi} \tag{35}$$

とおくと，

$$\psi_1(x) := 2\sum_{k=0}^{2N-1} {}_N h_k \psi(2x-k) \tag{36}$$

$$\psi_2(x) := 2\sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^{k+1} {}_N h_k \psi(2x+k-1) \tag{37}$$

で定義される関数 $\Psi := {}^t(\psi_1, \psi_2)$ は r 次正則マルチウェーブレット関数である．

注 5.1 ここでの記号法と Daubechies [9] の記号法とは，定数倍だけ違っている．[9] の Table 6.1 から得られるコンパクト台をもつユニウェーブレットのローパスフィルタのフィルタ係数 $\{{}_N h_k\}$ は，ローパスフィルタの定義が

$$_N m_0(\xi) = 2^{-1/2} \sum_{k=0}^{2N-1} {}_N h_k e^{-ik\xi} \tag{38}$$

であるから，補題 5.1 のフィルタ係数の $\sqrt{2}$ 倍となる．したがって，[9] のフィルタ ${}_N m_0(\xi)$ を $\widetilde{m}_0(\xi)$ として使う場合は，

$$\psi_1(x) := 2^{1/2}\sum_{k=0}^{2N-1} {}_N h_k \psi(2x-k) \tag{39}$$

$$\psi_2(x) := 2^{1/2}\sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^{k+1} {}_N h_k \psi(2x+k-1) \tag{40}$$

としなければならない．

補題 5.1 を使って，スプリットタイプのマルチウェーブレットの例をあげよう．まず，もとになる 1 次元のユニウェーブレットを生成する r 次正則多重解像度解析から得られるスケーリング関数とウェーブレット関数として，

(i) ${}_{\mathrm{M}}\varphi$, ${}_{\mathrm{M}}\psi$: Meyer のウェーブレット

(ii) ${}_{\mathrm{D3}}\varphi$, ${}_{\mathrm{D3}}\psi$: Daubechies の D3（N=3）ウェーブレット

(iii) ${}_{\mathrm{C6}}\varphi$, ${}_{\mathrm{C6}}\psi$: コアフレット（coiflet）C6

(iv) ${}_{\mathrm{S6}}\varphi$, ${}_{\mathrm{S6}}\psi$: シムレット（symlet）S6

表 1: Meyer のスケーリング関数とウェーブレット関数をマルチスケーリング関数として，Haar と Daubechies D2 のフィルタをそれぞれ使って構成したスプリットタイプのマルチスケーリング関数とマルチウェーブレット関数の窓幅および，Daubechies D3，コアフレット C6，シムレット S6 をマルチスケーリング関数として，Haar と Daubechies D2 のフィルタをそれぞれ使って構成したスプリットタイプのマルチスケーリング関数とマルチウェーブレット関数のサポート幅の表

${}_{\mathrm{M}}\varphi$	${}_{\mathrm{M}}\psi$	${}_{\mathrm{M}}\psi^1_{\mathrm{H}}$	${}_{\mathrm{M}}\psi^2_{\mathrm{H}}$	${}_{\mathrm{M}}\psi^1_{\mathrm{D2}}$	${}_{\mathrm{M}}\psi^2_{\mathrm{D2}}$
0.583	0.714	0.381	0.485	0.407	0.504
${}_{\mathrm{D3}}\varphi$	${}_{\mathrm{D3}}\psi$	${}_{\mathrm{D3}}\psi^1_{\mathrm{H}}$	${}_{\mathrm{D3}}\psi^2_{\mathrm{H}}$	${}_{\mathrm{D3}}\psi^1_{\mathrm{D2}}$	${}_{\mathrm{D3}}\psi^2_{\mathrm{D2}}$
5	5	3	3	4	4
${}_{\mathrm{C6}}\varphi$	${}_{\mathrm{C6}}\psi$	${}_{\mathrm{C6}}\psi^1_{\mathrm{H}}$	${}_{\mathrm{C6}}\psi^2_{\mathrm{H}}$	${}_{\mathrm{C6}}\psi^1_{\mathrm{D2}}$	${}_{\mathrm{C6}}\psi^2_{\mathrm{D2}}$
17	17	9	9	10	10
${}_{\mathrm{S6}}\varphi$	${}_{\mathrm{S6}}\psi$	${}_{\mathrm{S6}}\psi^1_{\mathrm{H}}$	${}_{\mathrm{S6}}\psi^2_{\mathrm{H}}$	${}_{\mathrm{S6}}\psi^1_{\mathrm{D2}}$	${}_{\mathrm{S6}}\psi^2_{\mathrm{D2}}$
11	11	6	6	7	7

をとる．つまり，φ, ψ として，上記のウェーブレットから得られるスケーリング関数とウェーブレット関数をそれぞれ使う．これらのウェーブレットについては，たとえば，[9] をみよ．次に，1 次元のユニウェーブレットを生成する別の 0 次正則多重解像度解析から得られるローパスフィルタ $\widetilde{m}_0$ とハイパスフィルタ $\widetilde{m}_1$ として，

(a) ${}_{\mathrm{H}}m_0$, ${}_{\mathrm{H}}m_1$: Haar のフィルタ

(b) ${}_{\mathrm{D2}}m_0$, ${}_{\mathrm{D2}}m_1$: Daubechies の D2（N=2）フィルタ

をとる．これらを組み合わせてスプリットタイプのマルチウェーブレット関数を式 (36) と (37) により構成する．

得られたスプリットタイプのマルチウェーブレット関数の窓幅あるいはサポート幅を表 1 に，それぞれのスプリットタイプのマルチスケーリング関数とマルチウェーブレット関数のグラフを 図 4–7 にまとめておく．

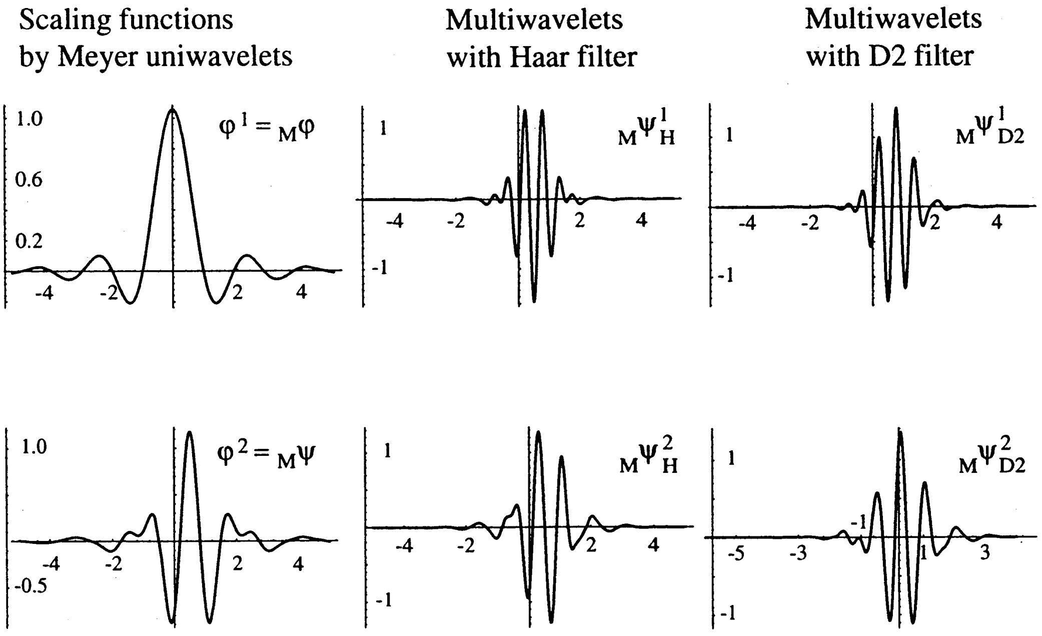

図 4: Meyer のスケーリング関数とウェーブレット関数マルチスケーリング関数として，Haar と Daubechies D2 のフィルタを使って構成したスプリットタイプのマルチスケーリング関数とマルチウェーブレット関数

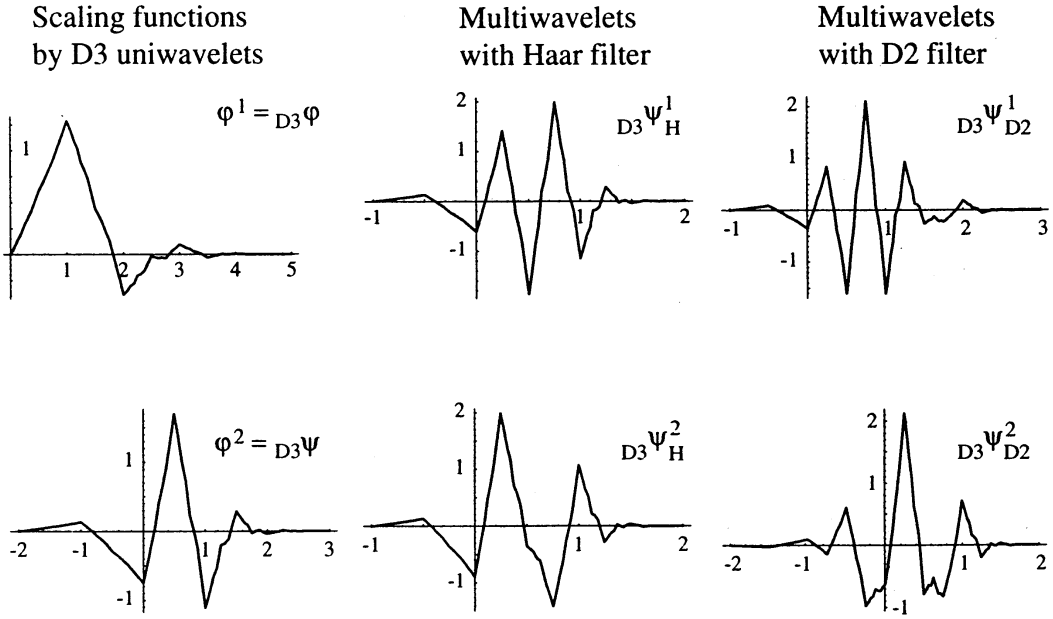

図 5: Daubechies D3 をマルチスケーリング関数として，Haar と Daubechies D2 のフィルタを使って構成したスプリットタイプのマルチスケーリング関数とマルチウェーブレット関数

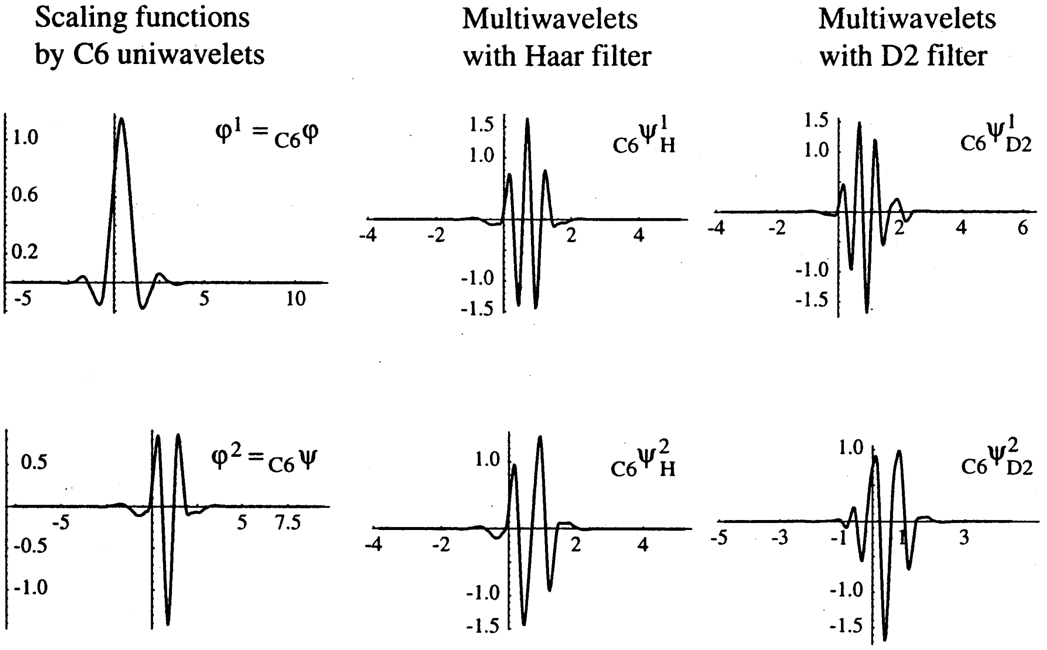

図 6: コアフレット C6 をマルチスケーリング関数として，Haar と Daubechies D2 のフィルタを使って構成したスプリットタイプののマルチスケーリング関数とマルチウェーブレット関数

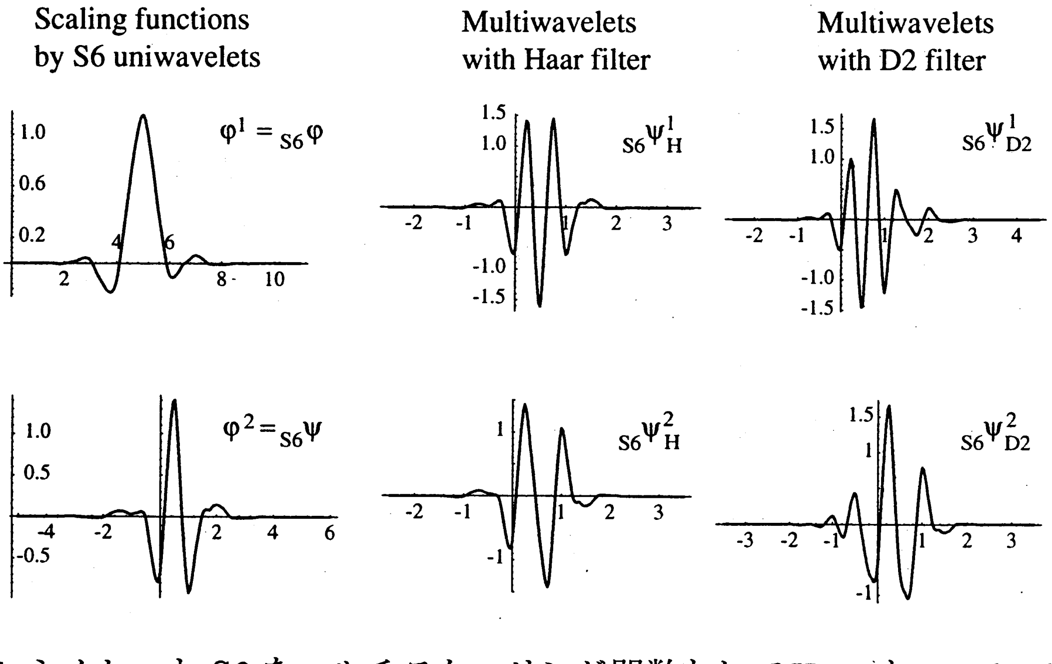

図 7: シムレット S6 をマルチスケーリング関数として Haar と Daubechies D2 のフィルタを使って構成したスプリットタイプのマルチスケーリング関数とマルチウェーブレット関数

参考文献

[1] 芦野 隆一・山本 鎮男, 『ウェーブレット解析 – 誕生・発展・応用 –』, 共立出版, 1997.

[2] B. Alpert, *A class of bases in L^2 for the sparse representation of integral Operators*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1993), 246–262.

[3] R. Ashino and M. Kametani, *A lemma on matrices and the construction of multi-wavelets*, Math. Japon. **45** (1997), 267–287.

[4] R. Ashino, M. Nagase, and R. Vaillancourt, *A computer search for simple multi-dimensional wavelets*, Computer Math. Applic. **28** (1994), 57–69.

[5] R. Ashino, M. Nagase, and R. Vaillancourt, *A construction of multiwavelets*, Computer Math. Applic. **32** (1996), 23–37.

[6] A. Cohen, I. Daubechies, and G. Plonka, *Regularity of refinable function vectors*, preprint, Rostock University (1996).

[7] T. Cooklev, *Rgular perfect-reconstruction filter banks and wavelet bases*, Ph.D. thesis, Tokyo Institute of Technology (1995).

[8] T. Cooklev, M. Kato, A. Nishihara and M. Sablatash, *Multifilter banks and multiwavelet bases*, Technical Report of IEICE **I E95–22** (1995), 51–58.

[9] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **61** (1992), SIAM.

[10] G. Donavan, J. Geronimo, D. Hardin, and P. R. Massopust, *Construction of orthogonal wavelet using fractal interpolation functions*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), 1158–1192.

[11] J. Geronimo, D. Hardin, and P. R. Massopust, *Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions*, J. Approx. Theory **78** (1994), 373–401.

[12] JR.-Q. Jia and Z. Shen, *Multiresolution and wavelets*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **37** (1994), 271–300.

[13] A. Karoui and R. Vaillancourt, *McClellan transformation and the construction of biorthogonal wavelet bases of $L^2(\mathbf{R}^n)$*, Computers Math. Applic. **29** (1995), 13–25.

[14] W. Lawton, *Applications of complex valued wavelet transforms to subband decomposition*, IEEE Trans. on Signal Processing **41** (1993), 3566–3568.

[15] Y. Meyer, *Wavelets and operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **37** (1992), Cambridge.

[16] G. Plonka, *Factorization of refinement masks of function vectors*, Approximation Theory VIII, ed. by C. K. Chui and L. L. Schumaker (1995), World Scientific Publishing Co.

[17] G. Plonka and V. Strela, *Construction of multi-scaling functions with approximation and symmetry*, preprint, Rostock University (1995).

[18] Z. Shen, *Refinable function vectors*, preprint, National University of Singapore (1996).

[19] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and filter banks*, (1996), Wellesley-Cambridge Press.

[20] G. Strang and V. Strela, *Short wavelets and matrix dilation equations*, IEEE Trans. on Signal Processing **45** (1995), 108–115.

[21] G. Strang and V. Strela, *Orthogonal multiwavelets with vanishing moments*, J. Optical Engineering **33** (1994), 2104–2107.

[22] V. Strela, *Multiwavelets: Regularity, orthogonality and symmetry via two-scale similarity transform*, appear in Studies in Appl. Math. **98** (1997), 335–354.

[23] E. Y. Zheng, *A comparative study of wavelets and multiwavelets*, Ottawa-Carleton Institute of Mathematics and Statistics, M.Sc. thesis, (1996).